ANÁLISE CRÍTICA DA TEORIA DE TIPOS INTUICIONISTAS DE PER MARTIN LÖF

Euclides Souza[1]

RESUMO: A Teoria de Tipos de Per Martin Löf é um sistema formal que combina lógica intuicionista e teoria dos tipos, com aplicações na formalização de provas matemáticas e na computação. No entanto, apesar de sua estrutura rigorosa, a teoria apresenta desafios conceituais fundamentais. Este artigo investiga a relação entre julgamento e proposição, a formalização da disjunção, a distinção entre conjuntos e categorias, e a definição intuicionista de verdade. Concluímos que a teoria necessita de revisões conceituais para garantir maior precisão e coerência em suas aplicações.
Palavras-chave: tipos, categorias, provas, linguagem, revisão.

Critical Analysis of Per Martin Löf's Intuitionistic Type Theory

Abstract: Per Martin Löf's Type Theory is a formal system that combines intuitionistic logic and type theory, with applications in the formalization of mathematical proofs and in computation. However, despite its rigorous structure, the theory presents fundamental conceptual challenges. This paper investigates the relationship between judgment and proposition, the formalization of disjunction, the distinction between sets and categories, and the intuitionistic definition of truth. We conclude that the theory needs conceptual revisions to ensure greater precision and coherence in its applications.
Keywords: types, categories, proofs, language, revision.

INTRODUÇÃO

A Teoria de Tipos de Per Martin Löf é uma linguagem formal e um sistema dedutivo que tem a forma de uma linguagem de programação tipificada (isto é, uma linguagem cujas variáveis estão categorizadas por tipos específicos, como inteiros, booleanos, frases, etc.). Ela possui aplicações tanto em Topologia (estudo de espaços de dimensão três ou superior) como na Lógica Intuicionista (uma lógica não clássica que,

---

[1] UFPB

basicamente, rejeita a lei do terceiro excluído, eliminação da dupla negação, dentre outras propriedades).

Em geral, a teoria de tipos de Löf tem sido utilizada para uma formalização computacional de provas matemáticas informais a qual facilita a verificação via programação da validade dessas provas, permitindo que lógicos e matemáticos economizem tempo e garantam a precisão da revisão dessas conclusões formais. Uma teoria de tipos foi feita para realizar uma formalização da matemática intuicionista (BISHOP, 1967). Essa linguagem é mais rica que a linguagem de primeira ordem, fortalecendo os axiomas de existência e disjunção.

Antes que uma teoria seja posta em prática, é sempre interessante analisar os fundamentos conceituais que lhe servem de base. A proposta deste artigo é rever filosoficamente alguns dos conceitos fundamentais utilizados por Löf em sua teoria devido ao fato de certas distinções não estarem completamente claras ou mesmo serem difíceis de conceber. Tal revisão poderá trazer algumas consequências sobre como a teoria age na prática computacional de prova para a qual foi desenvolvida.

1. Julgamento e proposição: uma relação problemática

Conceitos fundamentais para a composição dessa teoria são os conceitos de *proposição* e de *julgamento*. Uma proposição é formada por aquilo que é combinado pelos operadores lógicos e se *pode* dizer ser verdadeira ou falsa. Quando se estabelece uma proposição como verdadeira ou falsa, está-se fazendo um julgamento. Premissas e conclusões de uma inferência lógica são julgamentos. Proposições, ao contrário de fórmulas, formam um conceito aberto e não são definidas indutivamente.

O objetivo de Löf é explicar certas formas de julgamentos e inferências de provas matemáticas (o que se supõe ser apenas formal) *semanticamente* (tecnicamente, uma dimensão informal). Ele quer tornar explícito o funcionamento de certas inferências da dedução natural que não são, segundo o autor, exatamente formais, como A → A v B. O mais formal seria indicar que A e B são proposições e que, se A for verdadeiro, A ou B (outra proposição) será também.

Na Lógica Aristotélica, uma proposição era dividida entre afirmação e negação. Julgar também era separar uma afirmação de uma negação. Aristóteles dizia que uma afirmação era associar um predicado a um sujeito e, na negação, essa associação não ocorreria. Hoje em dia não seria mais necessária essa dualidade, restando apenas dizer, por exemplo, que "A é verdadeiro", em vez de "João possui a propriedade de ser médico". Agora, as coisas que provamos, premissas e conclusões, são julgamentos (asserções) e as coisas que combinamos por operadores lógicos são proposições. Por exemplo, A = "o céu está azul" é uma proposição, enquanto não dizemos se isso é V ou F, embora *entendamos* o significado. Ao dizermos, porém, que A é verdadeiro e B = "não chove" é verdadeiro, chegamos à conclusão de que A^B = "o céu está azul e não chove" é verdadeira.

Uma primeira dificuldade conceitual seria apontar o quanto de julgamento *não está* envolvido na definição de proposição como algo que podemos *compreender*, mas ainda não decidimos sobre ser verdadeiro ou falso. Afinal, o que é compreender uma proposição senão julgar se o seu significado corresponde ou não àquele significado que um agente possui em sua mente? (Se corresponde, o agente entendeu). Se o significado compreendido é verificado como um fato no mundo ou não (que é o sentido que Löf utiliza para julgamento), seria essa uma dimensão conceitual *posterior* de julgamento.

Em suma, a distinção entre julgamento e proposição é fundamental na teoria de Löf. Segundo ele, uma proposição é um conceito aberto que pode ser entendido independentemente da determinação de sua verdade, enquanto um julgamento é a atribuição de verdade ou falsidade a uma proposição. No entanto, surge uma questão essencial: compreender uma proposição não envolveria necessariamente um julgamento sobre seu significado? Essa interdependência pode indicar que a separação proposta por Löf não é tão clara quanto se pretende.

2. O problema da disjunção e a formalização

Indo adiante na análise de conceitos, nos perguntamos: uma disjunção advinda da afirmação (A é verdadeira → A v B é verdadeira) supõe que A e B sejam proposições sobre fórmulas de uma dada linguagem? Segundo Löf, essa dependência de uma linguagem não parece primordial, uma vez que basta que saibamos que A e B expressam proposições para a validade da disjunção (em última instância, não precisamos dizer que se tratam, por exemplo, de proposições aritméticas).

Mas, segundo ao autor, isso é problemático, porque a regra de inferência da inclusão da disjunção não deve pressupor noções semânticas como as de proposição, afinal, é uma regra formal. Temos a distinção entre expressão completa e expressão funcional está relacionada à formalidade da proposição dentro do sistema lógico:

Expressão completa: É uma proposição totalmente formada, que pode ser julgada como verdadeira ou falsa. Não requer argumentos adicionais para ser compreendida ou avaliada dentro do sistema lógico.

Expressão funcional: Refere-se a uma proposição ou estrutura que ainda depende de parâmetros ou variáveis para ser completada. Ou seja, uma expressão funcional é uma função proposicional que precisa de um argumento para se tornar uma proposição completa.

Essa distinção é relevante na Teoria de Tipos, porque impacta como proposições são formalizadas e interpretadas, especialmente no contexto da inferência lógica e da construção de provas.

Então, se proposições são sempre expressas por expressões completas e não expressões funcionais, a formalidade da regra de disjunção teria que considerar, antes, que A e B são proposições (expressões completas) e que A é verdadeiro para que A ou B sejam verdadeiros.

Se premissas e conclusões fossem julgamentos, proposições também seriam, mas estas últimas não são afirmações ou negações. Löf não parece resolver esse impasse, o qual até nos aponta à primeira dificuldade citada acima, sobre o fato de que o conceito de proposição na verdade dependeria do conceito de julgamento e vice-versa, enquanto Löf defende apenas que um julgamento é posterior a uma proposição.

Em suma, Löf argumenta que não é necessário que A e B sejam expressões formais de uma linguagem específica para que a regra seja válida. No entanto, essa abordagem pode ser problemática, pois, se a formalização for secundária, a regra de inferência dependeria de uma noção semântica prévia, o que entra em conflito com o caráter estritamente formal da teoria.

3. Tipos, categorias e a definição de conjunto

Voltando ao conceito de tipo, todo objeto matemático é de certo tipo, sendo este tipo a extensão de significância de uma função proposicional. Em outras palavras, um tipo é um conjunto que define o que devemos fazer para construir um objeto que pertença a ele. "É uma questão de saber o que significa ser um objeto *arbitrário* do tipo em questão" (LÖF, 1972, p. 2), independentemente de podermos vislumbrar todos individualmente. A notação é a ∈ A (a pertence a A), a é um objeto do tipo A.

Uma proposição é definida como uma prescrição de como podemos prová-la. Dessa maneira, cada proposição geraria um tipo para suas provas. Se A for um tipo para uma proposição, dizemos que a ∈ A se lê "a é uma prova da proposição A".

Diferentemente de Wittgenstein e Frege, os intuicionistas (Heyting) não dizem *exatamente* que uma proposição seja a expressão de suas condições de verdade, mas uma expectativa de sua prova. Kolmogorov completa dizendo que uma proposição se trata de um problema a ser resolvido ou uma tarefa a ser cumprida. Gentzen, também, sugere que as regras de introdução das constantes lógicas (operadores lógicos) definem seus significados.

Löf quer defender que todas essas quatro explicações de uma proposição são, no fim, as mesmas. De fato, expressar em que condições uma constante lógica constrói uma proposição verdadeira (Wittgenstein e Frege) é o mesmo que introduzir (Gentzen) tais constantes respeitando as regras de introdução (segundo o autor, é a mesma definição de conjunto e também de tipo, LÖF, 1984, p. 23). Da mesma forma, Heyting e Kolmogorov dizem o mesmo quando o primeiro usa a noção de expectativa, enquanto o segundo usa a noção de problema. Ora, quem espera por uma prova de A está, na verdade, tentando encontrar a resposta para o problema de se A é verdadeiro ou não.

Teríamos aqui um problema geral de referência. Quando dizemos que "uma proposição é uma expressão de *suas* condições de verdade", o pronome possessivo "suas" já aponta para algo que ainda estaríamos tentando definir, que é a própria proposição. Portanto, considerando que as quatro definições acima dizem o mesmo, segundo Löf, como poderíamos saber o que é isso que tem condições de verdade expressas se ainda não sabemos o que é uma proposição? Não é coerente definir algo utilizando ele mesmo na definição.

Ainda sobre tipos, o autor distingue conjunto (tipo) de categoria, apenas porque, no primeiro, temos um grupo de regras *exaustivas* para formar seus objetos (o que, segundo o autor, é o mesmo que uma proposição) e, no segundo, não. Uma distinção bastante duvidosa. Quando ele diz que sabe o que é um conjunto e quando dois conjuntos são iguais, o que forma a categoria dos conjuntos, é claro que ele conhece as regras do que caracteriza (forma) um conjunto.

Analisemos: "*Para definir uma categoria, não é necessário prescrever como seus objetos são formados, mas apenas compreender o que um objeto arbitrário de uma categoria é*" (LÖF, 1984, p. 22) é algo impossível de ocorrer sem que o agente analisador não tenha algumas regras de formação do objeto. Seria falacioso, todavia, que fosse escolhido, *arbitrariamente*, algum conjunto de regras que são ditos necessários e suficientes para a formação de um objeto. Por exemplo, sabemos identificar o que é um refrigerante e colocar um certo objeto dentro ou fora dessa categoria. Isso quer dizer que sabemos qual é o processo industrial envolvido na produção do refrigerante? Não. Mas, também não está decidido que é o processo industrial de produção de refrigerante que caracteriza suficientemente como se "produz" um refrigerante. Tudo vai depender do quanto se é capaz de convencer a audiência de que o produto se trata de um refrigerante.

Às vezes, apenas dizer que estou em posse de "1. um líquido gaseificado, 2. contido em um recipiente plástico ou metálico e 3. que possui diferentes cores" é suficiente para eu ter produzido, para o meu público, um refrigerante. Devemos perceber que as três regras citadas não descrevem, diretamente, o processo de produção industrial do refrigerante, porém, ainda assim, eu "produzi" um refrigerante. No fim, tivemos um conjunto de regras que me permite produzir todos os objetos que possuem a qualidade de ser um refrigerante e caracteriza sua categoria, diferentemente do que diz Löf.

Em suma, na teoria de tipos de Löf, cada objeto pertence a um tipo, e os tipos podem ser vistos como conjuntos de provas de proposições. No entanto, a distinção entre conjunto e categoria feita pelo autor não é completamente convincente. Segundo Löf, conjuntos possuem regras exaustivas de formação de objetos, enquanto categorias não. Isso, porém, ignora o fato de que qualquer categorização requer, ainda que implicitamente, um conjunto de regras formadoras.

4. Enunciação vs. proposição

Outra distinção interessante e problemática é entre enunciação e proposição. A primeira é precisamente a exposição do pensamento sem compromisso com prova. "*Uma proposição sem força epistêmica*" (LÖF, 1996, p. 12). Porém, falando em termos contemporâneos, Löf prefere tratar uma enunciação como um julgamento não analisado e uma proposição como um julgamento provado.

Daí, vem a diferença entre *evidência* de um julgamento e a *verdade* de uma proposição. Segundo Per Martin Löf, a distinção entre evidência de um julgamento e verdade de uma proposição está no papel que cada um desempenha dentro da estrutura epistêmica da lógica intuicionista:

Evidência de um julgamento: Diz respeito ao conhecimento que temos para afirmar um julgamento. Ou seja, para que um julgamento seja válido, deve haver uma evidência justificável que o sustente. Esse conceito está ligado à ideia intuicionista de que um julgamento não é meramente uma afirmação abstrata, mas algo que precisa ser demonstrado.

Verdade de uma proposição: Está associada à existência de uma prova direta para a proposição. Em termos intuicionistas, uma proposição só pode ser considerada verdadeira se houver uma prova explícita para ela. Diferente do *realismo clássico,* que assume que uma proposição pode ser verdadeira independentemente de conhecermos ou não sua prova, Löf segue a linha intuicionista, onde a verdade está intrinsecamente ligada à possibilidade de uma demonstração.

Em resumo, a evidência de um julgamento é o suporte epistêmico que justifica a validade de um julgamento, enquanto a verdade de uma proposição depende da existência de uma prova que a torne verificável dentro da lógica intuicionista. Pois, *não seria o entendimento de uma proposição também evidente*, já que julgamos *se entendemos* o conteúdo da proposição, *antes* mesmo de a julgarmos como V ou F? Essa diferença realmente se sustentaria? Afinal, que melhor suporte epistêmico teríamos senão a explícita verificação lógica da verdade de uma proposição?

Em suma, Löf distingue entre enunciação e proposição ao afirmar que uma enunciação é a expressão de um pensamento sem compromisso com sua prova. Contudo, se consideramos que entender uma proposição requer um julgamento sobre sua inteligibilidade, então não haveria diferença significativa entre essas duas noções.

5. O conceito de prova e sua justificação

Agora, sobre o conceito de prova. Antes de uma regra de inferência ser justificada, deve ser explicado o que o locutor precisa saber de modo a ter o direito de realizar um dado julgamento. Um julgamento, sobre um conjunto, por exemplo, pode ser explicado por meio das respostas das seguintes perguntas:

1. O que é um conjunto? (*ontologia*, era antiga)

2. O que devemos saber para ter o direito de julgar algo como um conjunto (*epistemologia*, era moderna)

3. O que um julgamento da forma “A é um julgamento” quer dizer? (*semântica*, era contemporânea).

Se um elemento de um conjunto for obtido diretamente pelas regras que o definem, o chamamos de canônico e, no caso contrário, não canônico. A computação (execução) de $2 + 2 \in N$ dá o resultado $(2 + 1)'$ (sucessor de 3) $\in N$ e, portanto, é um elemento canônico de N, pois a definição de pertencer aos naturais é que $0 \in N$ e, se $a \in N$, então $a' \in N$.

Löf define que uma proposição é definida por aquilo que conta como sua prova direta (isto é, sem provas mediadoras). Numa disjunção, por exemplo, A v B, uma prova direta seria provar A ou B (toda regra de eliminação é uma prova direta). Löf completa definindo uma prova indireta como o método para oferecer uma prova direta. Então, s*aber como fazer* uma prova direta é dar uma prova indireta. Saber que uma proposição é verdadeira é saber que ela pode ser provada diretamente (ou seja, prova direta → verdade). Portanto, o conceito de prova de uma proposição é anterior à noção de verdade.

O intuicionismo é uma filosofia *idealista*, pois dizer que uma proposição é verdadeira é dizer que *alguém sabe* que ela é e, inclusive, como provar. Bolzano, Brentano e a tradição aristotélica (e a tradição escolástica) defendem que é a noção de verdade que vem antes da de julgamento evidente (prova), ao contrário do que defende Husserl e Kant, embora Brentano tenha mudado de lado posteriormente.

A questão é saber, afinal, como um idealista vai saber que uma proposição é verdadeira sem haver um parâmetro realista da proposição (com o que o agente comparará para ter essa resposta? No fim, sua prova vai parecer uma mera opinião) e, por outro lado, como se poderia ter o conceito de verdade antes da prova se a prova é a única forma de conhecer (provar) a verdade?

Por fim, Löf diz que uma prova em si mesma não provaria qualquer coisa até que a verificássemos. Basicamente, entraríamos em uma regressão infinita de provas das provas das provas… *ad infinitum*. Sabendo da inviabilidade disso, o autor apenas nos recomenda nos "contentarmos" com nossas limitações e, pelo menos, abrir algumas discussões acerca dos nossos possíveis erros.

A *verdade de uma proposição*, segundo o autor, é diferente de v*erdade de uma prova*, sua validade, *conclusividade*, pois a segunda tem a ver com o ato de saber e, adicionalmente, aos objetos do conhecimento, enquanto a primeira não teria necessariamente ligação com aquilo que podemos saber (o que já vimos ser estranho no primeiro problema, pois parece claro que precisamos saber se entendemos a proposição, isto é, julgá-la).

O autor afirma que o *idealismo teórico* do conhecimento é compatível com o "realismo metafísico" (ao contrário do realismo teórico do conhecimento, o qual afirma que o mundo existe independentemente de nossa cognição) no sentido dos dois terem como dada a noção de verdade e de realidade (a qual, de fato, é bem aberta) e que, portanto, elas podem ser checadas, ao contrário do subjetivismo ou relativismo. O problema deste caso é que não soa rígida a teoria que dependa de noções "dadas" (por quem?) de verdade e de realidade. Haveria alguma referência precisa para isso?

Em suma, a teoria de Löf estabelece que uma proposição é definida pelo conjunto de suas provas diretas. Isso leva à conclusão intuicionista de que a verdade de uma proposição é equivalente à existência de uma prova para ela. No entanto, essa abordagem é idealista, pois assume que a verdade depende do conhecimento humano e não de um critério objetivo independente. A questão filosófica central é: como podemos justificar uma proposição sem um padrão de referência externo (realista)?

Conclusão

A análise crítica apresentada demonstra que a teoria de tipos intuicionista de Löf, apesar de sua elegância formal, enfrenta sérios desafios conceituais. A relação entre julgamento e proposição, a validade da disjunção sem formalização prévia, a distinção entre conjunto e categoria, e a definição intuicionista de verdade são pontos que exigem revisão e aprofundamento filosófico. A resolução dessas ambiguidades pode impactar significativamente a aplicação da teoria, tanto em lógica matemática quanto em computação.

Referências

AWODEY, S. “Type theory and homotopy”. In Dybjer, P.; Lindstrom, ¨ Sten; Palmgren, Erik; et al. Epistemology versus Ontology. Logic, Epistemology, and the Unity of Science.

Springer. pp. 183–201. doi:10.1007/978-94-007-4435-6 9. ISBN 978-94-007-4434-9, 2012.

BISHOP, E. Foundations of constructive analysis. McGraw-Hill, 1967.

LÖF, M. Constructive Mathematics and Computer Programing. University of Stockholm, 1982.

_______. An intutitionistic theory of types. University of Stockholm, 1972.

_______. Intuitionistic type theory. Bibliopolis, edizioni di filosofia e scienze, Napoli, ISBN 88-7088-105-9, 1984.

_______. A path from logic to metaphysics. *Atti del Congresso Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza*, 1990.

_______. Verificationism Then and Now. M. van der Schaar (ed.), Judgement and the Epistemic Foundation of Logic, 3 Logic, Epistemology, and the Unity of Science 31, DOI 10.1007/978-94-007-5137-8_1, © Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013.

_______. Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof. *Synthese 73 407-420, by D. Reidel Publishing Company*, 1987.

_______. On the meaning of logical constants and the justifications of the logical laws. *Nordic Journal of Philosophical Logic, Vol. 1, No. 1, pp. 11–60. ! Scandinavian University Press*, 1996.

MINTS, G. Short introduction to intuitionistic logic. Kluwer Academic Publishers, New York, ISBN: 0-306-46975-8, 2000.

PRAWITZ, D. The fundamental problem of general proof theory. *Studia Logica,* https://doi.org/10.1007/s11225-018-9785-9, 2018.

RUY, J. G. B. de Queiroz, From Tractatus to Later Writings and Back. Manuscript. April 2022. (submitted for publication).

___________. de Veras, T. M. L., Ramos, A. F., de Queiroz., and de Oliveira, A. G. On the calculation of fundamental groups in homotopy type theory by means of computational paths. April 2018. https://arxiv.org/abs/1804.01413.