revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Fractais no GeoGebra: entre o objeto matemático e suas representações na exploração do Triângulo de Sierpinski

DOI: https://doi.org/10.33871/rpem.2025.14.33.9911

Marcelo Antonio dos Santos[1]
Marcus Vinicius de Azevedo Basso[2]

Resumo: Este artigo tem como objetivo discutir como pode se configurar a distinção entre o objeto matemático e suas representações em uma proposta de exploração de fractais no GeoGebra. O referencial teórico contempla a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, além de escritos que tratam das potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica no desenvolvimento de abordagens voltadas à transformação de representações semióticas, que, nessa perspectiva, se apresenta como um processo central na análise da atividade matemática. Por meio de dados coletados em um experimento realizado junto um grupo de estudantes do sétimo ano Ensino Fundamental, são apresentados exemplos que ilustram como se desenvolvem as atividades cognitivas fundamentais de tratamento e conversão na construção de um fractal clássico, o Triângulo de Sierpinski. A metodologia contempla uma abordagem qualitativa, com dados coletados por meio de atividades no GeoGebra, vídeos dos encontros com os participantes, notas de campo e protocolos de observação, com intervenções orientadas no método clínico de Jean Piaget. Os resultados apontam que, durante as explorações, os sujeitos mobilizaram diferentes tipos de registros de representação e passaram a considerar a ideia de um objeto cuja construção pode continuar infinitamente, com iterações sucessivas. Além disso, identificaram padrões que se repetem em escalas cada vez menores, com uma estrutura básica que se mantém, independentemente do nível de ampliação. Dessa forma, observou-se o início de um processo de construção do objeto geométrico, neste estudo representado pelo Triângulo de Sierpinski.
Palavras-chave: Atividade matemática; Fractais; GeoGebra; Registro figural dinâmico.

Fractals in GeoGebra: between the mathematical object and its representations in the exploration of the Sierpinski Triangle

Abstract: This article aims to discuss how the distinction between the mathematical object and its representations can be configured in a proposal to explore fractals in GeoGebra. The theoretical framework includes Raymond Duval's theory of semiotic representation records, in addition to writings that deal with the potential of dynamic geometry environments in the development of approaches aimed at transforming semiotic representations, which, from this perspective, presents itself as a central process in analysis of mathematical activity. Using data collected in an experiment carried out with a group of seventh-year elementary school students, examples are presented that illustrate how the fundamental cognitive activities of treatment and conversion are developed in the construction of a classic fractal, the Sierpinski Triangle. The methodology includes a qualitative approach, with data collected through activities in GeoGebra, videos of meetings with participants, field notes and observation protocols, with interventions guided by Jean Piaget's clinical method. The results indicate that, during the explorations, the subjects mobilized different types of representation records and began to consider the idea of an object whose construction can continue infinitely, with successive iterations. Furthermore, they identified patterns that repeat themselves on increasingly smaller scales, with a basic structure that remains, regardless of the level of magnification. In this way, the beginning of a process of construction of the geometric object was observed, in this study represented by the Sierpinski Triangle.

[1]Mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Professor EBTT da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. E-mail: marcelo7906@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7059-8982.
[2]Doutor em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) – Professor titular do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). E-mail: mbasso@ufrgs.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2312-9056.

Keywords: Dynamic figural registration; Fractals; GeoGebra; Mathematical activity.

1 Introdução

Os fractais e suas aplicações têm sido objeto de estudo em diferentes cenários. No campo educacional, pesquisas apontam que essa temática poderia ser contemplada com maior profundidade, considerando a importância de que os estudantes tenham contato com outras perspectivas sobre determinados conceitos dentro da matemática. Nesse contexto, inclui-se os trabalhos de Sinclair et al. (2016), Holton e Symons (2021), Gutierrez Figueroa e Parraguez Gonzalez (2021), Hershkowitz et al. (2023) e Conner et al. (2023).

Estudos que tratam de possibilidades de integração dessa temática em processos de ensino e de aprendizagem de Matemática contemplam abordagens diversas, que incluem explorações por meio de recursos físicos e digitais, entre as quais se destaca a realização de atividades em ambientes de geometria dinâmica. São os casos de Rezende et al. (2018), Moran e Rezende (2020) e dos Santos et al. (2023).

Nesses ambientes, a transição entre representações estáticas e dinâmicas pode apresentar uma série de implicações do ponto de vista cognitivo. Em uma atividade de exploração de fractais no GeoGebra, os estudantes podem agir sobre diferentes registros figurais que representam o mesmo objeto geométrico. Como um fractal não pode ser representado em sua totalidade, esses registros figurais consistem em representações de um número determinado de iterações, que pode variar conforme as especificidades da proposta. Nessa perspectiva, a distinção entre o objeto matemático – o fractal – e suas representações pode ser desafiadora, considerando propriedades como complexidade infinita e autossimilaridade. Com base na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, este artigo discute como pode se configurar essa distinção em um contexto de exploração de representações figurais de fractais no GeoGebra.

O estudo apresenta a análise de dados coletados junto a um grupo de estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental, durante uma atividade de exploração de um fractal clássico: o Triângulo de Sierpinski. Nessa atividade, os sujeitos são desafiados a agir sobre os *applets* do GeoGebra e a experimentar diferentes possibilidades de transformação de representações semióticas, elaborando conjecturas relacionadas às propriedades desse fractal. Propomos que, nesse processo, evidenciam-se compreensões que podem contribuir para a construção do Triângulo de Sierpinski do ponto de vista conceitual, o que representa um desafio para estudantes nesse nível de escolaridade.

2 Objetos geométricos e suas representações no GeoGebra

Um objeto matemático não pode ser acessado diretamente pelo sujeito do ponto de vista físico ou material, o que traz implicações ao considerarmos a natureza da atividade matemática e como os sujeitos acessam esses objetos. Sobre essa questão, Duval (2011) explica que a atividade matemática consiste na transformação de representações semióticas e introduz a noção de registro, que, para ele, é essencial para analisar o funcionamento cognitivo e, consequentemente, possíveis dificuldades de aprendizagem em matemática

Para o autor, os objetos matemáticos não devem ser confundidos com a representação que é feita deles, ressaltando ainda que a distinção entre um objeto e sua representação é um ponto estratégico para a compreensão da matemática. Sobre o papel das representações semióticas na atividade matemática, Duval (2012, p. 268) trata do que chama de paradoxo cognitivo, e afirma que "[...] de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível".

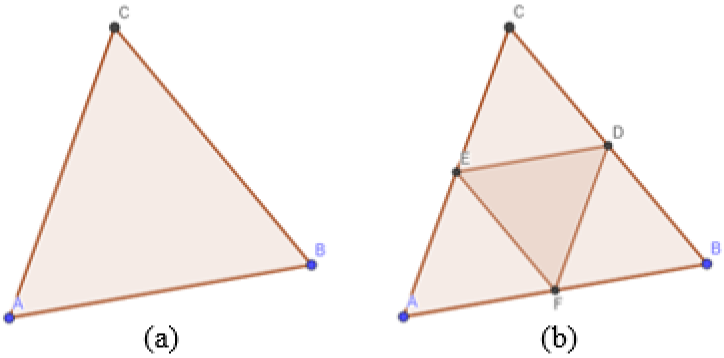
Em relação aos registros de representação, a partir de Duval (2012), podemos distinguir quatro tipos: a linguagem natural, algébrica, representações gráficas e representações figurais. Duval (2012) define ainda que para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir três atividades cognitivas fundamentais: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

Passamos a uma breve discussão sobre cada uma dessas atividades cognitivas. Considerando os objetivos do presente estudo, os exemplos apresentados tratam inicialmente da exploração de registros figurais de diferentes iterações de um fractal no GeoGebra. Nessa perspectiva, partimos das ideias de Salazar e Almouloud (2015), que definem o registro figural dinâmico e argumentam que essas atividades se realizam de maneira diferente ao se trabalhar em um ambiente de geometria dinâmica.

A atividade de formação se relaciona à criação da representação de um objeto em um determinado sistema semiótico, levando em consideração certas regras de conformidade inerentes a esse sistema. Nas palavras de Duval (2012, p. 271), a formação "implica seleção de relações e de dados no conteúdo a representar. Esta seleção se faz em função de unidades e de regras de formação que são próprias do registro cognitivo no qual a representação é produto".

O GeoGebra consiste em um ambiente de matemática dinâmica que possibilita o desenvolvimento de atividades que integram diferentes tipos de registros. No caso das figuras geométricas, a formação de uma representação semiótica se dá a partir de ferramentas, cada uma caracterizada por regras distintas próprias desse ambiente. Para originar o registro figural de um triângulo equilátero ABC, por exemplo, pode-se utilizar a ferramenta Polígono Regular, que na Barra de Ferramentas está associada a uma figura que a representa; o mesmo ocorre com as demais ferramentas. Ao selecionar essa ferramenta, é necessário clicar em dois pontos quaisquer, A e B, e em seguida digitar o número de vértices, que neste caso é 3. Com esse procedimento, obtém-se um registro figural que representa um triângulo equilátero (Figura 1 (a)).

Figura 1 - Formação de registros figurais no GeoGebra



Fonte: construção dos autores no GeoGebra.

Dando continuidade à construção no GeoGebra, podemos utilizar a ferramenta Ponto Médio ou Centro para marcar os pontos D, E e F, pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Posteriormente, com a ferramenta Polígono, constrói-se o triângulo DEF. A Figura 1 (b) apresenta o registro figural obtido.

Os registros obtidos em cada etapa de construção apresentam elementos que podem ser reconhecidos por meio da visualização imediata de formas, configurando-se a partir de contornos fechados, justapostos e separados. É o caso do triângulo ABC (Figura 1 (a)) ou dos triângulos EDF, AEF, FDB e DEC (Figura 1 (b)), que consistem em unidades figurais 2D[3] . Por outro lado, os mesmos registros apresentam elementos conceituais e propriedades que não são necessariamente perceptíveis ou visualizadas de forma imediata.

Nesse contexto, pode-se analisar o registro correspondente ao triângulo ABC sob outras perspectivas, identificando, por exemplo, unidades figurais 1D, que correspondem aos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$; também é possível identificar unidades figurais 0D, que consistem nos pontos A, B e C, cada um podendo ser definido pela interseção de dois dos segmentos

[3]De acordo com Duval (2011), para ver matematicamente uma figura é preciso mudar o olhar sem que a representação seja modificada, e para tanto, há a necessidade de considerar a dimensão das unidades figurais, que podem ser 3D, 2D, 1D ou 0D.

indicados anteriormente. Caberia também analisar a medida do comprimento de cada segmento, assim como a medida do menor ângulo formado por dois segmentos consecutivos. Essas propriedades constituem a conceituação de um triângulo equilátero, objeto geométrico que está sendo representado. Análise semelhante poderia ser feita no caso da Figura 1 (b).

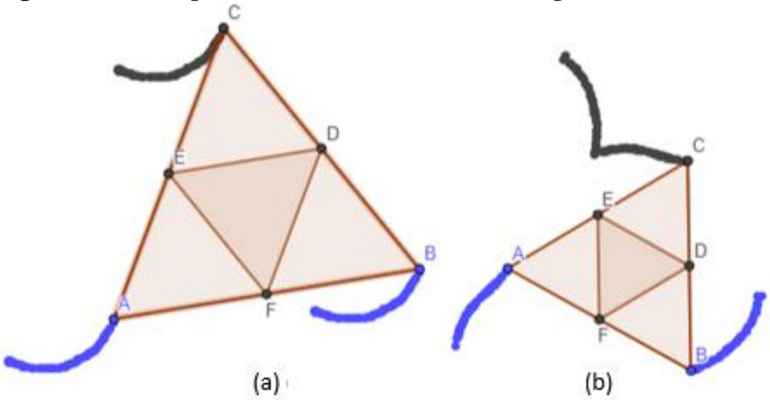
Duval (2011) trata da desconstrução dimensional como operação essencial relativa às figuras geométricas, o que pode engendrar diferentes maneiras de reconhecer as formas ou unidades figurais e principalmente, promover transformações de representações semióticas. Uma dessas transformações consiste no tratamento, que "[...] é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro" (Duval, 2012, p. 272).

A possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado (Duval, 2012, p 268). Salazar e Almouloud (2015) descrevem o tratamento dinâmico de uma representação em um ambiente de geometria dinâmica, destacando as funções fundamentais de manipulação direta, como mudar a posição de uma figura, e de arrastamento, como mover um ponto, por exemplo. Nesse contexto, os autores identificam diferentes tipos de tratamento de uma figura: mudar a sua posição, sem modificá-la; mudar o comprimento dos lados e reconfigurar.

A representação apresentada na Figura 1 (b) foi obtida por meio do acréscimo de outros objetos geométricos à construção apresentada na Figura 1 (a), tais como os pontos D, E e F e o triângulo DEF, o que caracteriza um tratamento no registro figural. A formação dos dois registros mobiliza conhecimentos de Geometria e determinadas propriedades geométricas que, uma vez impostas à construção, podem promover diferentes possibilidades de exploração, que de acordo com as ideias de Salazar e Almouloud (2015), também constituem tratamentos.

Tomando novamente a Figura 1(b), destacamos que os pontos A e B estão representados na cor azul. No GeoGebra, tal sinalização indica que estes dois pontos podem ser movidos sem restrições na Janela de Visualização. O mesmo não ocorre com o ponto C, com os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ e com o triângulo DEF, pois estes dependem funcionalmente dos pontos A e B. A Figura 2, partes (a) e (b), apresenta duas possibilidades de tratamento figural que partem da Figura 1(b).

Figura 2 - Duas possibilidades de tratamento figural no GeoGebra



Fonte: construção dos autores no GeoGebra.

Na Figura 2 (a), apresenta-se o resultado do movimento de translação do triângulo ABC, obtido ao clicar sobre este triângulo, segurar e arrastar. O rastro dos vértices ilustra as diferentes posições que a figura ocupa durante a exploração. A Figura 2 (b) é obtida ao arrastar o ponto B e, depois, o ponto A. Neste caso, as medidas dos lados do triângulo ABC e do triângulo DEF variam proporcionalmente. O rastro do ponto C indica as diferentes posições que ele ocupa no plano, determinadas pela dependência funcional em relação aos pontos A e B.

A terceira atividade cognitiva considerada fundamental por Duval é a conversão, que consiste em "[...] transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro" (Duval, 2009, p. 58).

De acordo com as ideias do autor, a conversão de uma representação em língua natural para uma representação figural corresponde a uma ilustração, enquanto a conversão de uma representação figural para uma representação em língua natural corresponde a uma descrição ou a uma interpretação. A conversão dinâmica, também analisada por Salazar e Almouloud (2015), ocorre, por exemplo, quando o sujeito explora as diferentes possibilidades de tratamento de registros figurais no GeoGebra e elabora conjecturas relacionadas às propriedades da construção, expressando-as em língua natural ou por meio de registros numéricos ou algébricos.

Desafiados por propostas de exploração que envolvem tratamentos e conversões, os sujeitos podem agir sobre diferentes registros de representação, o que é considerado fundamental por Duval para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com a sua representação e também para que sejam reconhecidos em diferentes representações.

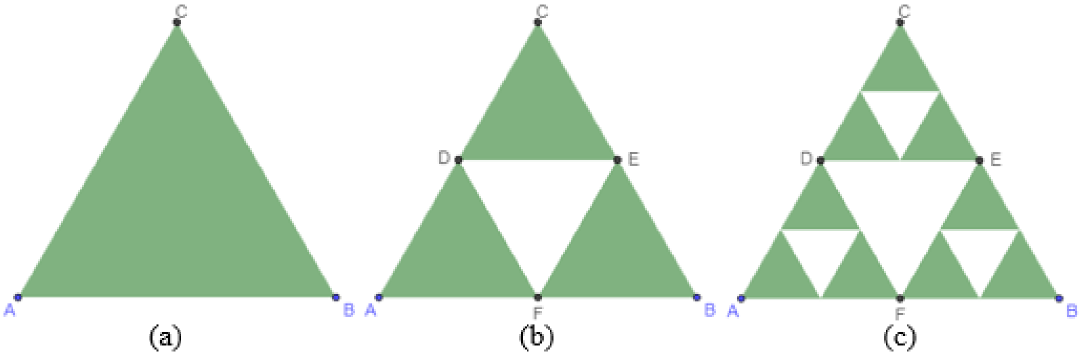
> A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado. (Duval, 2012, p. 270).

Agora, passa-se a analisar as construções anteriores sob outra perspectiva. A Figura 3, partes (a) e (b), apresenta dois registros que correspondem, do ponto de vista de formação, às mesmas figuras apresentadas na Figura 1, porém, com alguns elementos que as diferenciam.

Figura 3 - Duas transformações do triângulo ABC



Fonte: construção dos autores no GeoGebra.

No caso da Figura 3 (b), o triângulo DEF foi configurado na cor branca. Com isso, propomos a seguinte descrição: dado um triângulo equilátero ABC (Figura 3 (a)), remove-se um triângulo central DEF, que tem como vértices os pontos médios dos lados do triângulo equilátero ABC; obtém-se, com essa transformação, os triângulos equiláteros ADF, DCE e FEB, cuja medida do lado corresponde à metade da medida do lado do triângulo equilátero ABC (Figura 3 (b)).

No GeoGebra, com a opção "Criar uma Nova Ferramenta", essa transformação pode ser repetida. Ou seja, em cada um dos triângulos equiláteros ADF, DCE e FEB, remove-se um triângulo central com vértices nos pontos médios dos lados desses triângulos. Como resultado, obtém-se nove triângulos equiláteros, agora cuja medida do lado corresponde à um quarto da medida do lado do triângulo ABC. O resultado da transformação é apresentado na Figura 3 (c).

O processo de tratamento que resultou no registro figural apresentado na Figura 3 (c) promoveu transformações da Figura 3 (a). Essas transformações podem ser relacionadas a níveis de construção: parte-se de uma construção inicial, correspondente ao nível zero, e, após duas transformações, níveis 1 e 2, obtém-se o registro figural apresentado na Figura 3 (c). Uma vez que esse processo de construção tenha continuidade com o acréscimo de novos níveis, poderíamos pensar sobre as propriedades que a construção apresentaria; também caberia discutir sobre o objeto geométrico que estaríamos representando com esses registros. É o que nos propomos a discutir na próxima seção, introduzindo conceitos e propriedades relacionadas à Geometria dos Fractais.

3 Definindo o objeto geométrico: o fractal Triângulo de Sierpinski

De acordo com Barbosa (2005, p. 9), os fractais são entes geométricos que "[...] constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes. Segue que suas partes lhe são semelhantes; propriedade conhecida como autossimilaridade". Além da autossimilaridade, os fractais são definidos por outras propriedades, tais como iteração infinita, proporcionalidade das suas partes e dimensão, esta não necessariamente inteira.

O termo Fractal foi proposto por Benoit Mandelbrot (1924-2010) nos anos 70. Mandelbrot (2003) menciona que algumas formas naturais são demasiadamente complexas para serem modeladas pela geometria clássica que se aprende na escola, o que leva à necessidade de utilizar ferramentas mais elaboradas. A Geometria dos Fractais tem em suas origens a busca por essas ferramentas, envolvendo objetos geométricos cujo acesso pelos sujeitos ocorre por meio de representações semióticas.

Barbosa (2005) discute as possibilidades de exploração dos fractais em sala de aula sob diferentes perspectivas, analisando questões como o senso estético, a arte e a beleza das formas fractais, de forma articulada a conceitos como simetria, proporção e padrões numéricos, por exemplo. Percebe-se, nessas e em outras ideias deste autor, uma relação entre componentes figurais e conceituais na análise das possibilidades de exploração desses objetos matemáticos.

O registro figural obtido na seção anterior (Figura 3 (c)) consiste em uma instância de representação da segunda iteração de um fractal geométrico clássico, conhecido como Triângulo de Sierpinski, um fractal criado por remoção. A descrição de um procedimento de construção deste fractal pode ser encontrada em dos Santos et. al (2023, p. 14):

> Para construir o Triângulo de Sierpinski, parte-se de um triângulo equilátero ABC, com lado de medida l. Na primeira iteração, remove-se um triângulo central com lado de medida $l/2$, formado pelos pontos médios dos lados do triângulo inicial, gerando três triângulos equiláteros; na segunda iteração, repete-se o mesmo procedimento nos três triângulos remanescentes, formando agora nove triângulos, com lado de medida $l/4$. Este procedimento é repetido sucessivamente [...].

A Figura 4 apresenta representações por meio de registros figurais de quatro iterações do Triângulo de Sierpinski, dispostas uma ao lado da outra.

Figura 4 - Triângulo ABC e quatro primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski

Fonte: construção dos autores no GeoGebra.

Destacamos que toda representação de um fractal por meio de registros figurais é limitada a determinado número de iterações; o fractal, enquanto objeto matemático, envolve um processo de construção com iteração infinita, o que impossibilita obter uma figura que o represente em sua totalidade, mesmo em um ambiente dinâmico como o GeoGebra.

De acordo com Duval (2011, p. 91), uma figura "é identificada pelas propriedades que não vemos porque nenhum desenho as mostra em sua generalidade". Analisados separadamente, os registros figurais correspondentes a cada iteração de um fractal representam objetos geométricos com propriedades distintas; na perspectiva dos fractais, impõe-se uma análise desses registros em conjunto, em que cada nova iteração é obtida por meio de transformações na iteração anterior.

O Triângulo de Sierpinski apresenta diferentes possibilidades de exploração. Possíveis conversões partindo dos registros figurais podem incluir descrições numéricas, registros em língua natural ou registros algébricos, por exemplo. Para os estudantes, em um possível contexto de exploração em sala de aula, mesmo que tais propriedades não sejam tratadas formalmente do ponto de vista matemático, podem ser levantadas questões aparentemente paradoxais. Um exemplo é o fato de que o processo de construção pode continuar indefinidamente, sempre permitindo a remoção de um número ainda maior de triângulos, cujas medidas dos lados podem se aproximar do nível infinitesimal.

4 Procedimentos Metodológicos

Este estudo está vinculado a um projeto de pesquisa que tem como objetivo investigar os percursos cognitivos de estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental ao realizarem atividades de exploração de fractais no Ambiente de Geometria Dinâmica GeoGebra.

Com abordagem qualitativa (Gomes e Gomes, 2019), a pesquisa foi conduzida com um grupo de 10 estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental, com idades entre 12 e 13 anos.

A prática foi realizada no Laboratório de Informática e foi organizada em cinco encontros com periodicidade semanal, com a duração de 1 hora e 30 minutos cada.

As atividades foram desenvolvidas no GeoGebra em formato de Tarefas. Cada atividade foi composta por duas partes principais: um ou mais *applets* com propostas de construção e exploração de objetos geométricos, e questões abertas, acompanhadas de campos de edição de texto, permitindo que os participantes registrassem suas elaborações. Uma vez configuradas pelo professor, as tarefas foram atribuídas e disponibilizadas aos estudantes de duas maneiras: por meio de um link, que permite o acesso direto em um navegador, ou por meio de um código, informado após o acesso ao GeoGebra online.

O registro e análise das condutas cognitivas demandam a interação direta entre o pesquisador e os sujeitos, assim como o acompanhamento constante e sistemático dos processos de pensamento envolvidos na realização das atividades. Nesse cenário, o Método Clínico de Jean Piaget se configurou como uma importante fonte de inspiração.

De acordo com Delval (2002, p. 67), o método clínico é um procedimento que busca "investigar como as crianças pensam, percebem, agem e sentem, procurando descobrir o que não é evidente no que os sujeitos fazem ou dizem, o que está por trás da aparência de sua conduta, seja em ações ou palavras". O autor complementa que a essência desse método está no tipo de atividade do experimentador durante as interações entre ele e o sujeito.

Além das elaborações textuais dos sujeitos, das construções realizadas por eles e do protocolo de construções, o processo de coleta de dados também envolveu outros instrumentos. O pesquisador utilizou uma câmera móvel para gravar seus diálogos com os estudantes durante os encontros, visando captar aspectos relacionados às suas ações, expressos por meio de gestos e da manipulação dos objetos geométricos na janela de visualização do ambiente. Ao atender aos estudantes quando eles o chamavam ou por iniciativa sua, o pesquisador procurou conduzir pequenas entrevistas inspiradas no método clínico piagetiano, apresentando questões complementares, com o objetivo de reunir evidências sobre como eles estavam pensando ao realizar as atividades. Notas de campo foram produzidas com registros complementares sobre essas intervenções. Uma assistente de pesquisa acompanhou todos os encontros, observando as ações dos sujeitos, ouvindo possíveis diálogos e fazendo registros sobre as estratégias utilizadas e elementos que julgasse pertinentes, levando em consideração os objetivos do estudo. Esses registros compuseram o protocolo de observação.

Os dados coletados foram organizados em um relatório e categorizados de acordo com o número da atividade e os tipos de respostas. Antes da análise dos dados, realizou-se uma redução dos mesmos, eliminando respostas semelhantes por saturação. Alguns trechos usados nas análises passaram por correção linguística, preservando o conteúdo original do texto. Foi realizada uma triangulação entre os diferentes instrumentos utilizados (Flick, 2009), o que contribuiu enriquecer a compreensão em relação às estratégias adotadas pelos participantes durante as interações.

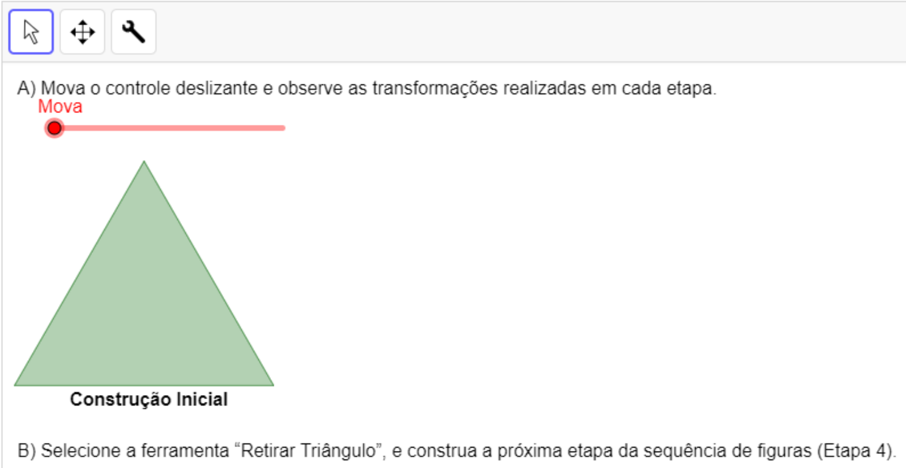
5 Descrição do Experimento

Utilizando os recursos do GeoGebra, o pesquisador desenvolveu tarefas que propõem diferentes formas de interação sujeitos-*applets*, com foco nas transformações de representações, tomando o registro figural como ponto de partida. Essas transformações estão associadas às atividades cognitivas de tratamento e conversão, analisadas no contexto dos registros figurais dinâmicos (Salazar e Almouloud, 2015).

O conjunto de atividades propostas durante a prática contemplou diferentes padrões fractais. A atividade selecionada consiste em um recorte de um conjunto de experimentos realizados junto aos sujeitos que participaram do estudo, e envolve a exploração do Triângulo de Sierpinski por meio de dois *applets*. Uma descrição alternativa do experimento pode ser encontrada em dos Santos et al. (2023).

Um dos *applets* (Figura 5) exibe como configuração inicial um triângulo equilátero, identificado com a legenda "Construção Inicial", além de um controle deslizante denominado "Mova".

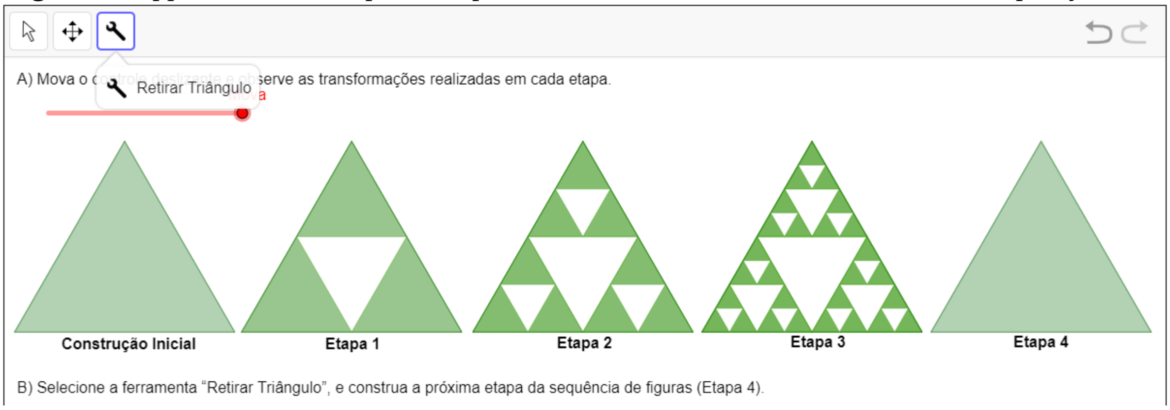
Figura 5 - *Apllet* utilizado na primeira parte da atividade, em sua configuração inicial



Fonte: construção dos autores no GeoGebra.

Inicialmente, é proposto aos sujeitos que movam este controle deslizante e observem as transformações que se realizam nas construções. A animação foi configurada de forma que cada uma das quatro posições do controle deslizante corresponda a uma iteração do fractal Triângulo de Sierpinski, tornando a exibição das figuras progressiva. Assim, a posição inicial corresponde à iteração 0, e a posição final corresponde à iteração 3. A Figura 6 representa a configuração da construção quando o controle deslizante ocupa sua posição final, momento em que também é exibido um novo triângulo, sobre o qual deve ser construída a iteração 4, aqui identificada como “Etapa 4”.

Figura 6 - *Applet* utilizado na primeira parte da atividade, com controle deslizante na posição final



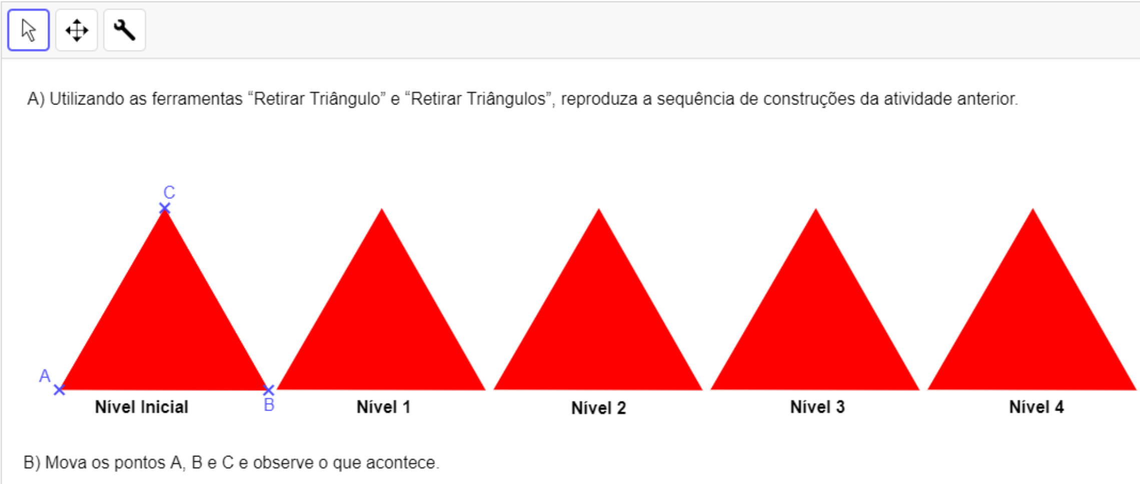
Fonte: construção dos autores no GeoGebra.

Posteriormente, os estudantes são desafiados a construir a etapa 4, dando continuidade ao padrão geométrico. Eles poderiam fazer isso utilizando uma ferramenta nomeada como “Retirar Triângulo”, disponibilizada na Barra de Ferramentas. Na Figura 6, ao selecionar a ferramenta e clicar sobre o triângulo correspondente à etapa 4, é removido um triângulo central, cujos lados são formados pelos pontos médios dos lados do triângulo selecionado; essa transformação constitui a primeira iteração do fractal. As demais iterações são obtidas aplicando a mesma transformação nos triângulos restantes, até que se obtenha uma representação da quarta iteração.

A ferramenta “Retirar Triângulo” produz uma reconfiguração da figura inicial – triângulo equilátero: ao selecionar a ferramenta e clicar sobre um triângulo com lado de medida l, este é dividido em 4 subfiguras, que consistem em triângulos equiláteros congruentes, cuja medida do lado é $l/2$. Destes, o triângulo central é removido, formando-se assim outra figura.

Em outro *applet* (Figura 7), cinco triângulos equiláteros são apresentados aos sujeitos, cada um acompanhado de uma legenda que informa o nível de construção correspondente. Inicialmente, a atividade propõe a construção das quatro primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski; em seguida, os participantes são convidados a mover os pontos A e B para observar as mudanças que ocorrem nas construções.

Figura 7 - *Applet* utilizado na segunda parte da atividade



Fonte: construção dos autores no GeoGebra.

Além da ferramenta "Retirar Triângulo", mencionada anteriormente, também foi configurada a ferramenta "Retirar Triângulos", que permite a construção de duas iterações do Triângulo de Sierpinski em qualquer triângulo dado. Durante a realização da atividade, os estudantes têm a opção de utilizar apenas uma das ferramentas ou combinar ambas para atingir determinado objetivo na construção de novas iterações.

No *applet*, o triângulo ABC foi construído com a ferramenta *Polígono*. As coordenadas dos pontos A, B e C foram editadas para que a configuração inicial dessa figura constituísse a representação de um triângulo equilátero; no entanto, essa propriedade não é preservada quando esses pontos são movidos. Tal possibilidade de exploração gera diferentes configurações nas primeiras iterações do triângulo de Sierpinski, desafiando os sujeitos a generalizar possíveis conjecturas para um conjunto maior de triângulos.

As questões básicas e complementares propostas pelo pesquisador aos sujeitos exploram ideias relacionadas a variação das medidas do lado e da área em cada figura, comparações entre diferentes iterações, correspondências entre o número da iteração e o número de certas subfiguras ou ainda, conjecturas relacionadas a continuidade das construções para um número maior de iterações.

A conversão entre os registros figural e em língua natural ocorre quando os sujeitos descrevem as construções e explicam que mudanças são promovidas com a exploração das diferentes possibilidades de tratamento figural no ambiente dinâmico. As propostas de interação apresentadas no *applet* e nas intervenções sistemáticas do pesquisador também podem promover tratamentos no registro em língua natural, evidenciados por meio das elaborações dos participantes em diferentes momentos da atividade.

6 Análise dos Resultados

A atividade descrita na seção anterior contou com a participação de nove estudantes. Para referir-se a eles nas análises desta investigação, foi atribuído um número a cada um. Assim, ao descrever ou apresentar registros correspondentes às interações de um sujeito, será utilizada a letra P, seguida de um número entre 1 e 10.

Após mover o controle deslizante da posição inicial para a final, os sujeitos acessaram a ferramenta "Retirar Triângulo" e, com ela selecionada, começaram a clicar sobre o triângulo correspondente à etapa 4, encontrando dificuldades na realização da atividade proposta, que consistia em analisar as figuras iniciais e obter uma representação da próxima figura que integra o padrão geométrico. Nessa fase, observou-se que, ao agir sobre a figura correspondente à etapa 4, os sujeitos o faziam de forma isolada, sem uma análise prévia de cada figura correspondente às etapas anteriores e, principalmente, das transformações que ocorriam entre uma etapa e outra.

Durante as interações, o pesquisador sugeriu que os participantes retomassem as ações no controle deslizante e observassem as transformações nas figuras, registrando suas descrições em um campo de texto disponibilizado junto ao *applet* da atividade. Sobre a transição entre a construção inicial e a etapa 1, foram coletados os seguintes registros:

> *P9*: Forma o mesmo triângulo, sem o meio.
> *P1*: Foi retirado um pedaço do triângulo anterior.
> *P6*: Um triângulo de cabeça para baixo foi criado.
> *P4*: Na etapa 1, um triângulo se transformou em quatro, 3 verdes e um branco, e isso continua nas próximas etapas.
> *P2*: Apareceu um triângulo no meio do triângulo, e, nos triângulos que surgiram, formou-se mais um triângulo branco no meio.

A descrição elaborada pelos participantes P1, P6 e P9 aborda de forma mais específica a transformação entre as figuras correspondentes à construção inicial e à etapa 1. Já as descrições dos participantes P2 e P4, assim como suas ações no *applet*, evidenciam que eles passaram a analisar a transição entre as etapas 1 e 2, e, posteriormente, entre as etapas 2 e 3, estabelecendo uma correspondência entre cada posição ocupada pelo controle deslizante e a figura exibida na janela de visualização.

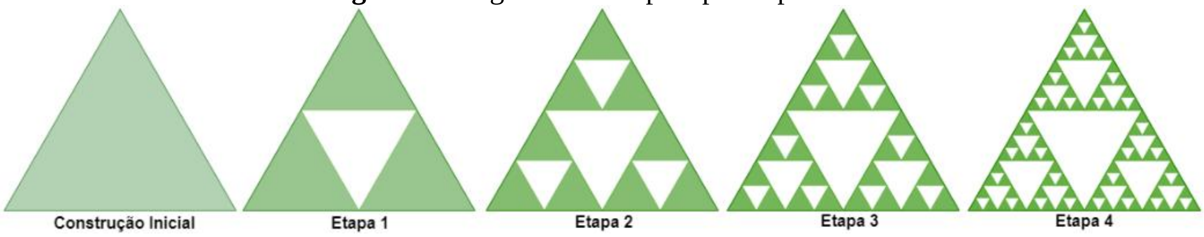
Dos 9 participantes que realizaram essa parte da atividade, 7 a concluíram com êxito, obtendo um registro figural da quarta iteração do fractal após um processo de exploração que, progressivamente, evidenciou descrições numéricas no desenvolvimento do padrão geométrico.

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nessa direção, destacamos como exemplo a fala da participante P2. Ao ser questionada pelo pesquisador sobre como procedeu para concluir a atividade, ela respondeu que "na etapa 1, eu cliquei uma vez sobre o triângulo verde. Depois, como sobraram 3 triângulos verdes menores, eu cliquei 3 vezes, uma vez em cada um. E assim por diante". O pesquisador pediu, então, que ela explicasse quantas vezes clicou para obter a etapa 4. A estudante iniciou sua fala e hesitou; retornou à construção, desfez uma etapa e repetiu o processo. Posteriormente, concluiu: "Na etapa 3 eu cliquei 9 vezes, pois tinham sobrado 9 triângulos" (P2). E completou: "Então é 27. É sempre três vezes a etapa anterior" (P2).

Ao clicar uma vez sobre cada um dos 27 triângulos restantes na etapa 3, são construídos 81 triângulos, que formariam a etapa 4, ou a quarta iteração do Triângulo de Sierpinski. Para obter uma figura correspondente a essa etapa, os participantes precisavam reconstituir, sobre um triângulo equilátero inicial, as três etapas anteriores. A Figura 8 ilustra o estágio final da construção, após as ações da participante P2. Nessa sequência de figuras, as etapas 1, 2 e 3 são exibidas de acordo com as diferentes posições do controle deslizante; já a etapa 4 resulta de uma construção do participante, utilizando a ferramenta disponibilizada para tal.

Figura 8 - Registro obtido pela participante P2

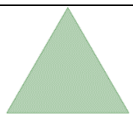
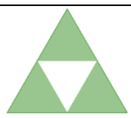
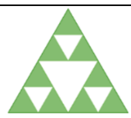
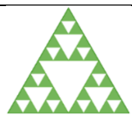
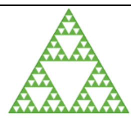


Fonte: acervo da pesquisa.

Assim como outros participantes, P2 apresentou uma descrição numérica da sequência de construções, sem que isso fosse solicitado pelo pesquisador ou especificado no enunciado da atividade. Inicialmente, ela estabeleceu uma correspondência entre os novos triângulos verdes construídos sobre os anteriores e a sequência de números naturais $(3, 9, 27, 81, \ldots)$. Nessa correspondência, acrescenta-se a ação de clicar sobre um triângulo para construir outros: um clique resulta em 3 novos triângulos, três cliques resultam em 9 novos triângulos, e assim sucessivamente. A compreensão do processo iterativo de construção do Triângulo de Sierpinski pela estudante também demandou outro tipo de correspondência. Trata-se da relação entre cada etapa e o número correspondente de triângulos verdes remanescentes na figura: na primeira etapa, 3 triângulos verdes; na segunda, 9 triângulos verdes; na terceira, 27, e assim por diante.

Analisando as ações dos participantes no *applet*, assim como dúvidas e questionamentos dirigidos ao pesquisador, observou-se que a atividade proposta promoveu conversões por meio de descrições numéricas, o que, no contexto de um processo iterativo de construção característico de um fractal, se evidencia em diferentes possibilidades, cada uma com implicações distintas do ponto de vista cognitivo. O Quadro 1 apresenta algumas dessas possibilidades:

Quadro 1 - Diferentes correspondências estabelecidas pelos participantes

Registros figurais					
Numeração 1	1	2	3	4	5
Numeração 2	0	1	2	3	4
Numeração 3	0	1	3	9	27
Conversão 1	1	3	9	27	81
Conversão 2	1	$3 + 1$	$9 + 4$	$27 + 13$	$81 + 40$

Fonte: construção dos autores.

No quadro, a primeira linha apresenta a sequência de registros figurais que representa o padrão geométrico, o que, no caso do Triângulo de Sierpinski, constitui a figura inicial, e suas quatro primeiras iterações. Inicialmente, observou-se que os participantes se referiam às figuras numerando-as de 1 a 5, onde cada número representa a posição da figura no ordenamento apresentado, conforme a linha correspondente à numeração 1. Ao agir sobre o controle deslizante e relacionar as diferentes posições por ele ocupadas com as etapas de construção do padrão geométrico, os participantes começaram a questionar a razão pela qual a segunda figura estava associada à etapa 1, sendo que, até aquele momento, para eles correspondia à figura 2. Em relação às etapas de construção, eles passaram a integrar a numeração 2 nas suas intervenções; nesse cenário, a etapa 4 deveria ser construída sobre a figura 5.

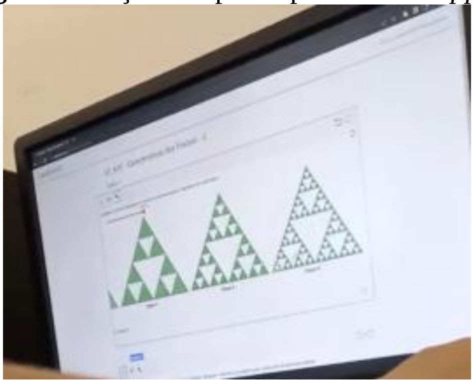
Conforme exemplificado no extrato correspondente à estudante P2, ela e outros participantes utilizaram a sequência numérica indicada na linha correspondente à numeração 3 para descrever o padrão geométrico, estabelecendo uma correspondência entre essa sequência e a indicada na linha correspondente à conversão 1, isto é, 1 clique para construir 3 triângulos verdes, 3 cliques para construir 9, e assim sucessivamente. Aqui, os participantes reconheceram os triângulos verdes como unidades figurais, sendo que, em diferentes etapas, esses triângulos apresentavam medidas diferentes.

Ao analisar a sequência de transformações, o participante P4 fez referência ao fato de que “um triângulo se dividia em 4”. Entre esses quatro, ele referiu tratar-se de três triângulos verdes e um branco, indicando o triângulo central e citando ainda que esse padrão continuava nas próximas etapas. Constatou-se que, em determinado momento, P4 passou a descrever o padrão geométrico não somente mencionando o número de triângulos verdes, mas também o número de triângulos brancos: na primeira etapa, 4 triângulos, sendo três verdes e um branco; na segunda etapa, 13 triângulos, 9 verdes e 4 brancos, e assim sucessivamente. A linha correspondente à descrição 2 no Quadro 1 apresenta esses registros numéricos.

Ao se referir aos triângulos centrais e considerá-los na contagem, P4 passou a tratar um triângulo composto por três triângulos verdes e um branco como unidade figural, que se repetia nas próximas etapas, porém, em escala menor. Sabe-se que, pelo procedimento de construção do Triângulo de Sierpinski apresentado anteriormente, os triângulos centrais são removidos e, portanto, esses "triângulos brancos" não integram efetivamente as figuras. No entanto, do ponto de vista dos conhecimentos mobilizados e das possibilidades de conversão e tratamento envolvendo os registros figural e numérico, considerou-se válido incluir esses dados na presente análise. Durante as intervenções do pesquisador com os estudantes, foram feitos questionamentos complementares para abordar essa questão.

O participante P5 também tive êxito na construção da quarta iteração. Em determinado momento, o pesquisador questionou sobre as suas estratégias. Ele respondeu: "As partes se encaixam. A etapa anterior está dentro da próxima, só que os triângulos são menores" (P5). Ao acompanhar o sujeito durante as interações, o pesquisador observou que o estudante utilizou a ferramenta Ampliar ou Reduzir o *zoom* na janela de visualização, recurso que pode ser acessado por meio de ícones específicos, ou simplesmente através do botão de rolagem do mouse. A Figura 9 apresenta a imagem do *applet* após as interações do estudante, que no momento do registro utilizava a ferramenta *zoom* para explicar sua resposta.

Figura 9 - Ações do participante P5 no *applet*



Fonte: acervo da pesquisa.

Em sua fala, o estudante não fez referência ao número de triângulos em cada etapa; entretanto, sua conduta durante as explorações e sua resposta ao pesquisador indicam que ele identificou uma propriedade relacionada ao registro figural: a autossimilaridade do fractal. A participante P10 também fez referência à propriedade de autossimilaridade em uma de suas falas ao pesquisador, ao afirmar que “uma etapa é formada por três partes menores dela”.

Na primeira parte da atividade, os participantes exploraram transformações de representações, tanto na forma de tratamentos quanto de conversões. Os tratamentos no registro figural podem ser caracterizados pelas transformações promovidas entre uma etapa e outra, assim como pelo reconhecimento, pelos participantes, de diferentes possibilidades de reconfiguração da figura correspondente a determinada etapa. No que diz respeito às conversões, foram evidenciadas descrições em língua natural, as quais também integravam registros numéricos.

Em relação às conversões, foram registrados momentos nos quais os participantes utilizavam propriedades do registro numérico para calcular o número de triângulos que deveriam compor uma nova iteração. Feito isso, passavam a agir sobre o registro figural para obter a representação correspondente.

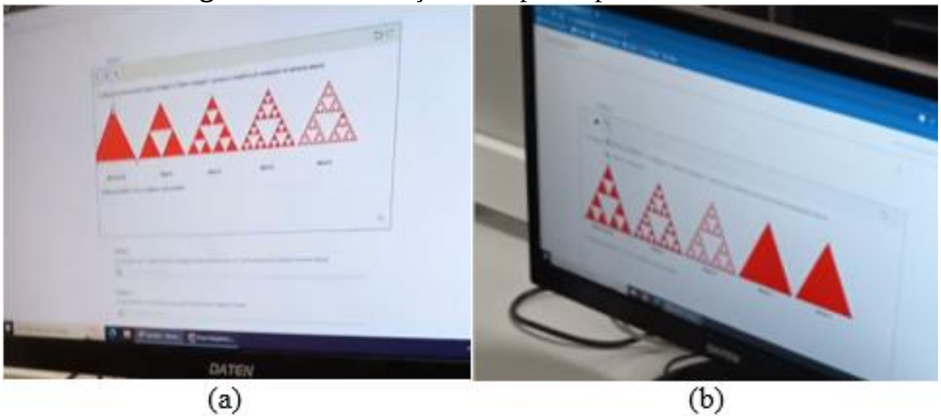
Na segunda parte da atividade 1, os participantes foram solicitados a reconstituir a sequência de construções correspondente às quatro primeiras iterações do mesmo fractal, o Triângulo de Sierpinski, utilizando duas ferramentas. A primeira, "Retirar Triângulo", era idêntica à usada no *applet* anterior; a segunda, "Retirar Triângulos", diferia da primeira por permitir construir, a partir de um triângulo inicial, duas iterações do fractal.

Em suas intervenções com os participantes nesse momento do experimento, o pesquisador buscou questioná-los sobre a continuidade do processo construtivo para um número maior de iterações. Outro ponto explorado pelo pesquisador com os sujeitos foi a variação da área do fractal à medida que o número de iterações aumenta, sempre com o objetivo de promover o pensamento matemático, sem exigir que recorressem a aspectos métricos.

Nessa parte da atividade, dos 9 estudantes que participaram do experimento, 6 a realizaram com êxito. Além de obter representações por meio de registros figurais das primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski, os participantes foram desafiados a mover os vértices da figura inicial, que corresponde ao triângulo ABC. Cada nível de construção, nessa parte da atividade, foi construído sobre um conjunto mais abrangente de triângulos, não necessariamente equiláteros. Para os estudantes que participaram do experimento, em sua maioria iniciantes no uso do GeoGebra em atividades dessa natureza, essa possibilidade gerou surpresas: “[...] essa parte eu não sabia” (P1).

Para exemplificar as explorações, são apresentadas as construções dos participantes P8 e P9 no *applet*, representados na Figura 10, partes (a) e (b), respectivamente.

Figura 10 - Construções dos participantes P8 e P9



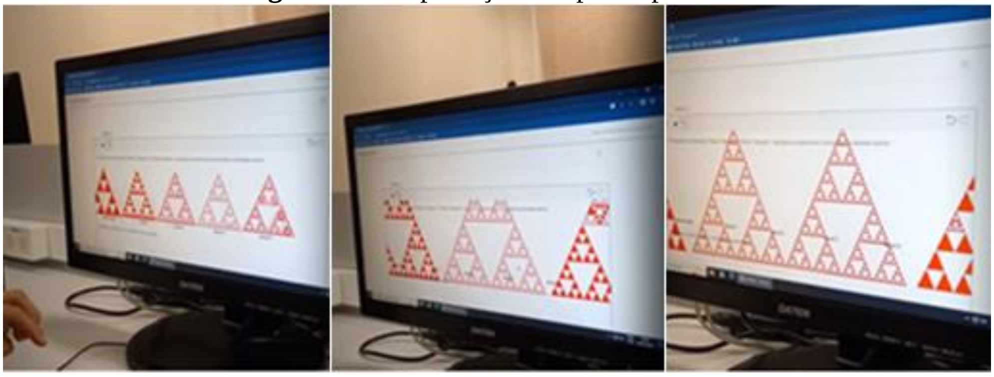
Fonte: acervo da pesquisa.

Em relação aos participantes P8 e P9, a análise dos protocolos de construção indicou que eles utilizaram as ferramentas “Retirar Triângulo” e “Retirar Triângulos” de forma coordenada, o que evidencia compreensões em relação ao processo de construção do padrão geométrico. Sobre os registros obtidos pelos dois participantes, ressalta-se que P8 optou por representar as quatro primeiras iterações do fractal, enquanto P9 utilizou o primeiro triângulo para representar a iteração 2, o segundo para representar a iteração 3 e o terceiro para representar a iteração 4. Restavam ainda os dois últimos triângulos, que poderiam ser utilizados para representar as iterações 5 e 6.

Sobre as suas escritas no GeoGebra Tarefas e respostas aos questionamentos do pesquisador, foram registradas elaborações relacionadas a diferentes conceitos, destacando-se a menção ao infinito. No momento em que P9 realizava a atividade, o pesquisador questionou o que ocorreria com a superfície retirada, por ele identificada como superfície branca, quando aumentamos os níveis. O participante respondeu: “Vai aparecendo mais áreas brancas, e diminuindo as áreas vermelhas”. Em resposta a outro questionamento do pesquisador, no momento em que explorava o *zoom* e dava continuidade à construção, P9 afirmou que “tem mais triângulos vermelhos. Se eu ficar apertando, apertando [...]. Seria quase o nível infinito”.

Ao dar continuidade à construção, o participante procurou construir as próximas iterações, fazendo uso da ferramenta de *zoom* do GeoGebra. A sequências de frames da Figura 11 ilustra momentos distintos de exploração de P9:

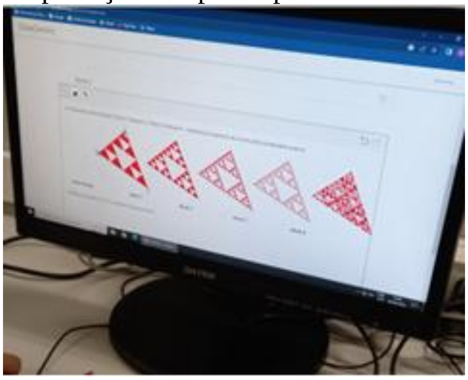
Figura 11 - Explorações do participante P9



Fonte: acervo da pesquisa

Após construir de forma correta as 5 primeiras iterações, utilizando de forma alternada as duas ferramentas utilizadas, ele passou a explorar o último triângulo da sequência, o qual na ideia inicial seria utilizado para construir a iteração 4. Além de utilizar a ferramenta *zoom*, ele passou a arrastar os pontos A, B e C e analisar as propriedades da construção, agora para triângulos ABC quaisquer (Figura 12).

Figura 12 - Explorações do participante P9 em outro momento



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na Figura 12, a construção da iteração 6 do fractal não está completa. O pesquisador voltou a questionar o sujeito em relação ao que aconteceria na construção se o padrão de construção tivesse continuidade: “Se eu apertar de novo, aí vai dar um nível infinito. E por mais que eu aumente, aumente, não teria um fim” (P9). Ao ser questionado sobre a variação da área dos triângulos brancos ou dos vermelhos, foi registrada a seguinte resposta: “Olha, para mim um dos dois tem um fim” (P9).

No GeoGebra Tarefas, uma das questões básicas propostas a todos os sujeitos perguntava se haveria a possibilidade de adicionar novos níveis à construção; em outra, os sujeitos foram desafiados a responder o que aconteceria com a soma das áreas dos triângulos remanescentes, que, nessa parte da atividade, estavam representados pela cor vermelha. Em relação aos níveis de construção, foram registradas as seguintes respostas:

> *P9*: Por mim, os níveis são infinitos.
> *P1*: Ficaria com mais triângulos desenhados. É um ciclo infinito de triângulos.
> *P4*: Seriam infinitos, pois quanto mais aproximamos [o *zoom*] mais triângulos podem ser formados.

Sobre a soma das áreas destes triângulos remanescentes, os mesmos participantes registraram as seguintes respostas:

> *P9*: A superfície vermelha vai desaparecer, fica zero.
> *P1*: A superfície vermelha desaparece cada vez mais.
> *P4*: Ela vai diminuindo gradativamente. E ela é dividida em muitos outros triângulos.

Na primeira parte da atividade, os participantes limitaram-se a explorar as primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski, o que era esperado, considerando diferentes fatores, a começar pelo próprio enunciado da tarefa no *applet*. Como a experiência em atividades com padrões geométricos dessa natureza era inédita para eles até aquele momento, observar quatro figuras geométricas, abstrair propriedades relativas às transformações ocorridas entre elas, realizar as correspondências necessárias e criar a representação de uma nova figura com a ferramenta disponibilizada representaram desafios importantes do ponto de vista cognitivo.

Na segunda parte, ao explorarem as ferramentas de manipulação direta do GeoGebra para mover os pontos A, B e C e, principalmente, para ampliar ou reduzir o *zoom* na janela de visualização, foi intrigante para os participantes perceber que era possível construir novos níveis, tantos quantos eles quisessem. Partindo dessa possibilidade, sem que o pesquisador solicitasse, eles começaram a originar representações de novas iterações, mantendo coerência com o processo de construção do Triângulo de Sierpinski, objeto matemático contemplado na atividade. Nesse processo, identificou-se uma articulação entre as duas ferramentas disponibilizadas, o que demandou diferentes correspondências: em relação à ferramenta "Retirar Triângulos", um clique agora resultava em um conjunto de nove triângulos, e não três como na anterior.

Foi então que, em dado momento, eles abandonaram as ações no *applet* e começaram a elaborar conjecturas envolvendo a ideia de um objeto constituído por um número cada vez maior de triângulos, os quais, após muitas iterações, teriam sua área reduzida a praticamente zero. Nessa parte da atividade, além de compreensões relacionadas ao processo iterativo de construção do Triângulo de Sierpinski, o pensamento dos participantes passou a tratar de um objeto cuja representação completa do ponto de vista figural não era possível.

7 Considerações Finais

A questão central discutida neste artigo envolve a distinção entre o fractal como objeto geométrico e suas representações. Os fractais são definidos de diferentes formas na literatura, abrangendo conceitos variados, com distintos níveis de formalidade do ponto de vista matemático. Nessas definições, destacam-se aspectos como a autossimilaridade e a complexidade infinita das formas, cuja compreensão exige construções conceituais por parte dos sujeitos. Enquanto objeto matemático, o acesso a um fractal pelos sujeitos requer a mobilização de representações, entre as quais os registros figurais assumem um caráter fundamental.

Partindo de propostas de exploração de registros figurais um fractal no GeoGebra, os sujeitos participantes do estudo foram desafiados não somente a descrever as construções, mas principalmente agir sobre os objetos e transformá-los. Essas transformações se evidenciaram no momento em que eles utilizavam as ferramentas disponíveis para obter determinada iteração reconfigurando a anterior. Nesse processo, os sujeitos passaram a analisar a transição entre figuras sucessivas e a identificar padrões, seja explorando diferentes divisões de uma iteração ou comparando uma iteração com a anterior, concluindo que ela poderia ser dividida em partes menores de si mesma, o que está relacionado à propriedade de autossimilaridade.

Durante as explorações, por diversos momentos observou-se que os sujeitos utilizaram descrições numéricas, estas resultantes de correspondências realizadas durante as ações sobre os registros figurais. Desse processo, concluíram que cada figura corresponde a um nível de construção de um único objeto, evidenciando compreensões relacionadas ao caráter iterativo do fractal.

Observou-se também que, em diferentes momentos da atividade, os estudantes analisavam propriedades relacionadas ao registro numérico, para, em seguida, verificar como essa propriedade se configurava no registro figural. Isso aconteceu, por exemplo, quando um sujeito concluiu que a próxima etapa de construção deveria ser composta pela justaposição de 27 triângulos, justificando que esse número era o triplo dos triângulos da etapa anterior; posteriormente, ele utilizou a ferramenta disponível para obter o registro figural correspondente. As correspondências que relacionavam unidades figurais e registros numéricos também contribuíram para o enriquecimento das elaborações dos sujeitos nos registros em língua natural.

No decorrer do estudo, buscamos na literatura o conceito de registro figural dinâmico e procuramos integrá-lo no desenvolvimento dos experimentos. Ao explorar diferentes possibilidades de tratamento dinâmico, especialmente na segunda parte do experimento, os sujeitos passaram a elaborar conjecturas relacionadas a outras propriedades do objeto para um número maior de iterações, tais como a variação da área remanescente ou retirada a cada nova iteração.

As conjecturas envolveram ideias relacionadas ao infinito, ou ainda, ao fato de que, em algum momento, a área remanescente poderia se aproximar muito de zero. Essas ideias foram identificadas em diferentes momentos, como, por exemplo, quando os sujeitos ampliavam o *zoom* na janela de visualização e constatavam que sempre haveria a possibilidade de construir uma nova iteração sobre as anteriores.

Considerando o nível de escolaridade dos sujeitos participantes do estudo, não eram esperadas quantificações de maior complexidade ou o uso de registros algébricos, uma vez que a construção de determinados conceitos ainda estava em andamento. Além disso, foram observadas certas dificuldades em relação a alguns conceitos, como área e perímetro de figuras planas, por exemplo. Por outro lado, do ponto de vista do desenvolvimento do pensamento matemático, ponderamos que as interações promovidas nos *applets* e as elaborações desses sujeitos evidenciam um processo promissor, que pode contribuir para engendrar construções conceituais relacionadas a outros objetos matemáticos, além do contexto dos fractais.

Em relação ao GeoGebra, a ideia de desenvolver *applets* com ferramentas próprias para a construção de registros figurais de fractais partiu de uma análise prévia do perfil dos sujeitos participantes do estudo e se mostrou relevante, pois permitiu aos sujeitos explorar de maneira dinâmica as propriedades do Triângulo de Sierpinski e, principalmente, mobilizar diferentes registros em suas explorações.

Uma vez que a experiência na exploração de fractais foi inédita para este grupo de estudantes, avalia-se que os resultados do experimento são promissores e, combinados com os resultados dos demais experimentos que integram o estudo em sua totalidade, podem promover compreensões que possibilitem aos sujeitos construir o conceito de fractal e utilizá-lo na investigação de diferentes padrões geométricos. Nesse processo, ao agir sobre as construções e expressar o pensamento matemático por meio de textos escritos e falas, os sujeitos apresentaram ideias que não se restringem às figuras representadas na janela de visualização do GeoGebra, o que evidencia um processo de construção do objeto geométrico, neste estudo representado pelo Triângulo de Sierpinski.

Referências

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autentica, 2005.

CONNER, A.; TABACH, M.; RASMUSSEN, C. Collectively engaging with others' reasoning: Building intuition through argumentation in a paradoxical situation. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**, v. 9, n. 3, p. 666-693, 2023. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s40753-022-00168-x. Acesso em: 13 ago. 2024.

DELVAL, J. **Introdução à prática do método clínico: Descobrindo o pensamento das crianças.** Trad. Fátima Murad - Porto Alegre: Artmed, 2002.

DOS SANTOS, M. A.; DE AZEVEDO BASSO, M. V.; MAESTRI, A. B. Padrões Fractais e Geometria Dinâmica: uma análise a partir da Teoria da Abstração Reflexionante. **Schème: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**, v. 15, n. 2, p. 5-44. Disponível em: https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/scheme/article/view/15256. Acesso em: 14 set 2024.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. São Paulo: PROEM, v. 1, 2011.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais.** Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R.; THADEU, M. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em: 12 maio 2024.

FLICK, U. **Desenho da Pesquisa Qualitativa.** Porto Alegre: Artmed, 2009.

GOMES, A. S.; GOMES, C. R. A. (2019). Classificação dos tipos de pesquisa em informática na educação. In **Metodologia de Pesquisa em Informática na Educacão: Concepcão da Pesquisa**, Porto Alegre - RS. Sociedade Brasileira de Computacão. Disponível em: https://metodologia.ceie-br.org/wp-content/uploads/2019/06/livro1_cap4.pdf. Acesso em: 16 maio 2024.

GUTIERREZ FIGUEROA, X.; PARRAGUEZ GONZALEZ, M. Mental mechanism of synthesis in the learning of the Sierpinski triangle as a totality. **Ensenanza de las Ciencias**, v. 39, n. 3, p. 71-92, 2021.

HERSHKOWITZ, R.; DREYFUS, T.; TABACH, M. Constructing the self-similarity concept. **International journal of research in undergraduate mathematics education**, v. 9, n. 2, p. 322-349, 2023. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s40753-022-00173-0. Acesso em: 13 mar. 2024.

HOLTON, D.; SYMONS, D. Infinity-based thinking'in the primary classroom: a case for its inclusion in the curriculum. **Mathematics Education Research Journal**, v. 33, n. 3, p. 435-

450, 2021. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-020-00311-4. Acesso em: 18 mar. 2024.

MANDELBROT, B. Fractais. In: FAUSTO, R.; FIOLHAIS; C.; QUEIRÓ, J. F. (org.). **Fronteiras da Ciência: desenvolvimentos recentes, desafios futuros.** Coimbra: Gradiva, 2003. p. 63-88.

MORAN, M.; REZENDE, V. Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica. **Revista Boletim online de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, n. 15, p. 109-127, 2020. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/download/17141/12100. Acesso em: 2 set 2024.

REZENDE, V. et al. O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 160-171, 2018. Disponível em: https://jieem.pgsscogna.com.br/jieem/article/view/4616. Acesso em: 9 abr. 2024.

SALAZAR, J. V. F.; ALMOULOUD, S. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica Figural. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 17, n. 5, p. 919-941, 2015. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/26325. Acesso em: 10 nov. 2023.

SINCLAIR, N. et al. Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. **ZDM**, v. 48, p. 691-719, 2016. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-016-0796-6. Acesso em: 13 mar. 2024.