revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O ensino e a aprendizagem de Números Racionais na formação de futuros professores de Matemática: o caso partes de partes

DOI: https://doi.org/10.33871/rpem.2025.14.33.9503

Evandro Vaz dos Santos[1]
Adriana Fátima de Souza Miola[2]

Resumo: O presente texto tem como objetivo principal discutir as contribuições da Assimilação Solidária para o ensino e a aprendizagem de números racionais, na forma fracionária, na formação de futuros professores de matemática. Trata-se de um recorte de uma pesquisa desenvolvida em nível de mestrado. Neste estudo, utilizamos alguns pesquisadores, como Cabral, Baldino, Lins, Pinto, Fiorentini, entre outros, para discutir o ensino e a aprendizagem na formação de professores de matemática. O estudo foi desenvolvido durante a realização de uma disciplina em um curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública. Neste texto será relatado um dos episódios ocorridos durante o desenvolvimento da disciplina que utilizou a organização didática da Assimilação Solidária e envolveu 13 acadêmicos. Os resultados revelaram indícios de que a Assimilação Solidária pode contribuir com a formação de futuros professores de matemática, pois possibilitou aos participantes a compreensão do conceito de frações, e a vivenciarem processos de ensino os quais realizarão em contexto escolar, seu futuro campo de atuação.
Palavras-chave: Educação Matemática. Formação de Professores. Metodologia de Ensino. Números Racionais.

Teaching and learning rational numbers in the training of future mathematics teachers: the parts of parts case

Abstract: The main objective of this text is to discuss the contributions of Solidarity Assimilation to the teaching and learning of rational numbers in the training of future mathematics teachers. This is an excerpt from research conducted at master's level. In this study, we used some researchers, such as Cabral, Baldino, Lins, Pinto, Fiorentini, among others, to discuss teaching and learning in mathematics teacher training. The study was developed during a course in a Mathematics Degree course at a public university. In this text, one of the episodes that occurred during the development of the discipline will be reported, which used the didactic organization of Solidarity Assimilation and involved thirteen academics. The results revealed evidence that Solidarity Assimilation can contribute to the training of future mathematics teachers, as it enabled participants to understand the concept of fractions, and to experience teaching processes which they will carry out in a school context, their future field of activity.
Keywords: Mathematics Education. Teacher Training. Teaching Methodology. Rational Numbers.

1 Considerações iniciais

A aprendizagem matemática é um processo complexo, pois são vários os fatores e as situações que podem definir se o aluno realmente vai aprender o conteúdo, e nesse contexto é

[1] Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados. Professor da Rede Pública de Dourados, Mato Grosso do Sul, Brasil. E-mail: evandrovazds@hotmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0035-4322.
[2] Doutora em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Docente no curso de Licenciatura em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados, Mato Grosso do Sul, Brasil. E-mail: adrianamiola@ufgd.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4757-2554.

importante levar em consideração todos os aspectos didáticos envolvidos na sala de aula, tais como a realidade individual do aluno, o ambiente escolar em que está inserido, os materiais didáticos adotados pela instituição de ensino, as concepções dos professores, as metodologias de ensino empregadas, entre tantos outros aspectos, conforme ressalta Freire (1996).

No Ensino Superior, essa complexidade na aprendizagem fica ainda mais evidente, principalmente quando falamos de disciplinas mais conceituais, no caso das licenciaturas em Matemática, cujos conceitos matemáticos são muitas vezes apresentados de modo descontextualizado, sem que na exposição dos conceitos sejam estabelecidas correlações entre estes e a área de formação profissional, no caso, a formação de professores de matemática.

Cabe anotar que essas disciplinas e a forma como são ministradas são decisivas para a aquisição dos conhecimentos por esses futuros professores, que atuarão na Educação Básica. Ou seja, além de ser necessário o domínio conceitual do conteúdo, é primordial que esses futuros profissionais utilizem formas/maneiras/estratégias de tornar esses conteúdos compreensíveis para seus futuros alunos.

Ademais, é relevante destacar a perspectiva apontada por Fiorentini (2005) e Lins (2005) sobre a importância de os professores dos cursos de licenciatura compreenderem que, para além de estar formando futuros professores, eles também são modelos e exemplos para seus estudantes, que seguirão a carreira docente no futuro. Essa responsabilidade vai além do simples ato de “dar” uma aula e isso requer uma abordagem mais ampla.

Ao atuar como formadores nos cursos de licenciatura, os docentes, por meio de suas práticas em sala de aula, têm a possibilidade de influenciar diretamente a formação de futuros educadores, moldando a sua concepção sobre como se ensina e como se aprende. Significa dizer que esses discentes podem espelhar-se nas práticas de seus professores, para que assim — munidos dos conhecimentos acerca das metodologias e das intervenções pedagógicas de ensino e tendo observado como seus docentes atuam em sala de aula — possam adaptar suas estratégias de ensino, lidar com os desafios e promover a interação e a participação de seus futuros alunos.

Nessa linha de pensamento, Fiorentini (2005) destaca que professores de disciplinas como Cálculo, Álgebra, Análise de Topologia etc. acreditam que lecionam apenas conceitos e procedimentos matemáticos, e não se dão conta de que ensinam também um jeito de se construir como pessoas e professores e de conceber e estabelecer relações com o mundo e com a Matemática durante seu ensino.

Lins (2005) complementa essa ideia afirmando que, em cursos como o de Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, é ofertado aos alunos, como ocorre em qualquer outro curso, um certo modelo de aula, no qual o discente (futuro professor) tem à sua frente um profissional — seu professor —, que desempenha a mesma função para a qual ele está se preparando. Em síntese, o ensino dessas disciplinas não se limita apenas à transmissão de conceitos e procedimentos matemáticos, mas também influencia a forma como os discentes da licenciatura percebem a Matemática.

Nesse contexto, sabe-se que algumas disciplinas, como as ministradas na licenciatura em Matemática (Aplicada, Pura, Estatística e Educação Matemática) são trabalhadas de modo diretivo, também conhecido como Ensino Tradicional Vigente (ETV). De acordo com Baldino (1995), o ETV é um método de ensino no qual o professor fica a maior parte do tempo ao quadro, explicando a matéria, enquanto os alunos se sentam em forma matricial e prestam atenção.

Esse modo de ensino se refere à abordagem em que o professor assume um papel central na transmissão de conhecimento para os alunos. Nesse modelo, a aula é geralmente conduzida de forma expositiva, com o professor apresentando os conceitos matemáticos de modo linear e sequencial, e os alunos assumem uma postura passiva de receptores do conhecimento, sem que sejam estimulados a desenvolver o pensamento crítico. Cabe destacar que, muitas vezes, os professores podem até organizar a sala em formatos de pequenos grupos, mas ainda assim valorizam a exposição de conteúdo.

Diante disso, pensando em entender e discutir essas questões, Pinto *et al*. (2012) propõem metodologias alternativas às tradicionais de ensino, que se referem a um processo pelo qual os alunos participam de atividades, como leitura, escrita, discussão ou resolução de problemas que, de sua feita, promovem a síntese, a análise e a avaliação do conteúdo de classe, com vistas a propiciar uma aprendizagem mais ativa na qual o aluno trabalhe em grupo e fomente sua criatividade.

Desta maneira, entendemos que no desenvolvimento da prática educativa é necessário estabelecer prioridades na condução dos procedimentos adotados em sala de aula, à medida que entendemos que o professor é um importante ator do sistema didático escolar. Percebendo a metodologia de ensino como um encaminhamento pedagógico proposto ao estudo de um determinado saber, avaliamos que uma dessas prioridades diz respeito à escolha de uma dessas metodologias.

Entretanto, a adoção de uma metodologia de ensino não pode ser dissociada dos aspectos do objeto de aprendizagem, dos recursos disponíveis, das características dos alunos e dos objetivos a serem atingidos com a prática pedagógica. A partir disso, consideramos que a escolha de uma metodologia de ensino é uma decisão relevante para a formação de futuros professores e que essa escolha pode ter consequências diversas no processo educativo.

De modo geral, destacamos que se a metodologia utilizada for predominantemente tradicional, enfatizando a transmissão de conteúdo de forma expositiva e enfocando a resolução de exercícios padronizados, os futuros professores podem internalizar essa abordagem como o padrão a ser seguido, o que tende a resultar em uma concepção restrita do ensino na qual a matemática é vista como uma disciplina rígida, desvinculada da realidade e das necessidades dos estudantes. Além disso, pode levar a uma formação docente centrada na transmissão de conhecimentos prontos e acabados, sem espaço para reflexões críticas ou para o desenvolvimento de habilidades pedagógicas mais amplas.

Por outro lado, ao adotar metodologias mais abertas, participativas e contextualizadas, o professor do curso de licenciatura de Matemática propicia o despertar do interesse dos seus alunos, futuros docentes em abordagens pedagógicas centradas no discente. Ou seja, fomenta-se nesses futuros professores a adoção de metodologias que valorizam a participação ativa dos estudantes, a construção coletiva do conhecimento e o estímulo à criatividade, incentivando-os a adotarem práticas pedagógicas mais dinâmicas e próximas da realidade em que os futuros professores irão atuar.

Fiorentini (2005), Lins (2005), Pinto *et al*. (2012), Cabral e Baldino (2015), entre outros, destacam que a escolha da metodologia também influencia diretamente a seleção de materiais e recursos pedagógicos utilizados na formação dos futuros professores. Uma abordagem mais tradicional geralmente se utiliza de materiais didáticos padronizados e recursos mais estáticos, enquanto uma abordagem mais participativa pode envolver a exploração de materiais diversificados e tecnologias educacionais.

Eles também alertam, que a forma como o professor avalia o desempenho dos alunos é impactada pela metodologia adotada. Uma abordagem mais tradicional inclina-se para avaliações mais focadas em aspectos procedimentais e de memorização, ao passo que uma abordagem mais construtivista valoriza a compreensão conceitual e a resolução criativa de problemas.

Diante dessas considerações, surgem algumas indagações sobre se as metodologias de ensino têm exclusivamente a função de contribuir com aspectos meramente pedagógicos, influenciando apenas a forma como os futuros professores vão ensinar. E mais: de que maneira essas escolhas metodológicas estão relacionadas à sua formação e à percepção de como seus alunos, futuros professores, devem ser formados?

A partir desses questionamentos, encontramos na literatura trabalhos desenvolvidos por Cabral e Baldino (Baldino, 1997; Baldino; Cabral, 1998, 1999, 2006, 2008, 2010, 2013; Baldino; Carrera, 1999; Cabral, 1998, 2015) que elaboraram uma proposta de intervenção pedagógica denominada Assimilação Solidária (AS), cuja abordagem vai além dos aspectos pedagógicos de uma aula de matemática.

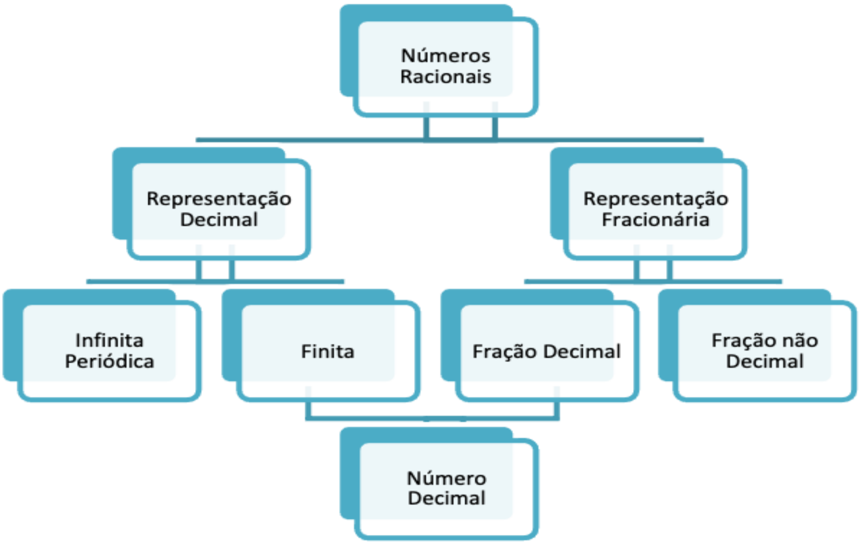
Durante nossos estudos sobre a vasta obra desses autores, identificamos que muitas de suas produções foram desenvolvidas com participantes de cursos de bacharelado. Inquietos diante das provocações que apresentam em seus textos, buscamos desenvolver esta investigação com uma turma de licenciandos em matemática. O objetivo foi de discutir as contribuições da AS para a aprendizagem de números racionais, na forma fracionária, na formação de futuros professores de matemática.

2 O Ensino e a Aprendizagem dos Números Racionais e a Assimilação Solidária

A aprendizagem envolvendo números racionais tem sido amplamente estudada, tanto no que concerne a sua importância, devido à base para aprendizagens matemáticas futuras, quanto pelas dificuldades reveladas por vários estudos, como Bukowitz (2017), Miola e Lima (2020), Miola e Pereira (2013), Carolino e Pietropaolo (2019), entre outros.

Esses estudos revelam que embora as representações dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos desde os anos iniciais, o que se mostra é que os alunos chegam ao Ensino Superior sem compreender os diferentes significados desse tipo de número, tampouco suas operações, em especial as que envolvem os racionais na forma fracionária, em que muitos alunos enfrentam dificuldades, pois exigem rupturas com as ideias construídas para os números naturais. Para esclarecer como definimos os números racionais neste estudo, apresentamos na Figura 1 um organograma contendo todas as representações do conjunto dos números racionais.

Figura 1: Representação do conjunto dos números racionais



Fonte: Miola e Lima (2020).

Nessa estruturação identificamos a representação fracionária dos números racionais, como um conjunto de frações decimais e não decimais, em que as decimais são frações cujos termos são números inteiros em que o denominador é uma potência de 10 e, de acordo com Miola (2011), essas frações representam os números decimais. Assim, entendemos que os números racionais assumem diferentes significados nos diversos contextos, sendo eles: relação parte/todo, divisão, razão, entre outros. Desse modo, "A relação parte/todo se apresenta quando um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. A fração, por exemplo, indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes, é o caso das tradicionais divisões de uma figura geométrica em partes iguais" (Brasil, 1998, p. 102).

Diante desse contexto de significações, buscamos pelos documentos oficiais, e identificamos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que esse tópico é tratado de maneira superficial. No Ensino Médio, por exemplo, o documento menciona os números racionais apenas uma vez, em meio a uma orientação envolvendo outros conjuntos numéricos. Já no Ensino Fundamental, ele enfatiza que nos anos finais a "[...] expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos" (Brasil, 1998, p. 266). No entanto, não propõe nenhuma possiblidade metodológica ou com recursos didáticos de como esse conteúdo pode ser desenvolvido na Educação Básica.

Nesse sentido, pesquisadores relatam a importância de recursos didáticos para a aprendizagem dos números racionais, em destaque para a representação das operações fracionárias. Conforme defendido por Lorenzato (2010) e Nunes (2015), a manipulação de materiais didáticos favorece a aprendizagem desse conteúdo. Os estudos de Campos, Magina e Merlini (2024) enfatizam que a utilização de diferentes representações pode contribuir para o ensino de operações com frações.

Ainda nesse sentido, Cabral e Baldino (2010) chamam a atenção para além dos recursos didáticos para a compreensão dos conceitos matemáticos. A partir de sua proposta de intervenção pedagógica, a AS, eles mencionam que o aluno aprende falando e o professor ensina ouvindo. Isso destaca a importância do diálogo e da expressão verbal na construção do conhecimento. Ao falar, o discente articula pensamentos, confronta suas próprias ideias e, muitas vezes, chega a uma compreensão mais profunda do conteúdo.

Eles afirmam ainda, que o aluno aprende ao falar, referem-se ao acesso à linguagem específica que a Matemática possui, realizada pelo próprio estudante. Isso faz com que ele, por meio de seus significantes, atribua significado ao conceito que está sendo estudado. Já a ideia de que o professor ensina ouvindo é destacada pelo papel ativo da escuta por parte do educador. Escutar atentamente implica estar receptivo ao discurso dos alunos, compreendendo não apenas as palavras ditas, mas também as possíveis dificuldades por eles apresentadas.

Na AS, segundo os mesmos autores, a orientação de "fazer perguntas" durante a aula para os alunos é interpretada como um mecanismo estratégico que visa conduzir o aprendiz à contradição. Nesse contexto, a contradição é concebida como um ponto de inflexão crítico, alinhando-se com a perspectiva lacaniana de que o confronto com a contradição é essencial para o processo de transformação subjetiva. Isso é caracterizado por Lacan (1988) como uma hipnose às avessas, sendo que, para conduzir o aluno até a contradição, o docente precisa entrar no discurso do aluno e conduzi-lo até esse momento.

Nessa perspectiva, quando o professor adota a postura de escuta, o aluno se depara com a ambiguidade de discernir se o professor está simplesmente tentando compreender o que está sendo dito ou se está reservando tempo para reflexão. Nesse contexto, a AS busca garantir ao aluno que o professor não represente um Outro capaz de preencher a falta que permitiria a aprendizagem mecânica e, por consequência, o ganho de crédito acadêmico. Em vez disso, o educador na AS procura manter aberta a lacuna na compreensão do aluno, instigando questionamentos internos, como "Eu realmente compreendo? O que pretendo alcançar?" (Cabral; Baldino, 2010, p. 631).

Cabral e Baldino(2010) relatam que surge a ansiedade[3], quando o aluno presume que

[3] Em seu artigo "I love maths anxiety", de 2008, Baldino e Cabral discutem a importância da ansiedade matemática para a aprendizagem dos alunos. Ao oferecer explicações prontas, o professor não apenas encobre suas próprias

compreendeu um conceito, tornando-se vulnerável à possibilidade de o professor negar essa compreensão. Essa vulnerabilidade ocorre quando o estudante entende como preenchida a falta de conhecimento e se depara com a ameaça de um veredicto negativo na próxima resposta. A escuta seletiva dos professores é hábil em identificar sinais de ansiedade nos gestos e na fala do aluno. Na AS, a abordagem é cuidadosa quanto aos vereditos negativos do professor em relação às falas dos alunos, que monitora o potencial destes de desencadear uma angústia insuportável. Desse modo, a estratégia adotada pelo professor na AS é a de substituir vereditos negativos por novas perguntas. Essa prática busca manter um ambiente de aprendizagem que encoraje a exploração contínua, evitando penalizar o aluno por respostas equivocadas.

Ela é também uma maneira de apoiar a falta de conhecimento do aluno, regularizando e aceitando sua posição inicial de não querer aprender algo que já supostamente já conhece. No contexto dessa abordagem, o discente pergunta: "Posso fazer isso?", e a resposta depende da correção da proposta; se estiver correto, pode, se estiver incorreto, não pode; vamos verificar juntos[4]. Isso ilustra como a AS permite que o aluno aprenda a falar, enquanto o professor ensina ao ouvir (Cabral; Baldino, 2010).

Na AS, conforme Cabral (2015), o professor atua, portanto, como um mediador e facilitador da aprendizagem, buscando criar um ambiente propício para a participação ativa dos alunos. O professor não é mais a única fonte de conhecimento, e sim um guia que auxilia os estudantes na construção do seu próprio entendimento.

O diálogo é valorizado e estimulado, os alunos são encorajados a expressar suas ideias, levantar questionamentos, debater conceitos e interagir com os colegas, ao passo que o professor tem o papel de promover e incentivar essa troca de ideias, garantindo que todos tenham voz e sejam ouvidos. O diálogo constante entre professor e alunos, bem como entre os próprios discentes, contribui para uma aprendizagem mais efetiva e para o desenvolvimento de habilidades sociais e comunicativas (Cabral, 2015).

Considerando todos esses aspectos, a AS é fundamentada em sete princípios básicos que orientam sua organização e prática pedagógica, que, segundo Cabral (1992), são tidos como essenciais dentro dessa abordagem:

1. Supremacia dos grupos sobre os indivíduos e do grupão sobre os grupos: é promovida a conscientização de que as decisões devem ser discutidas

falhas, mas também as do aluno. Esse comportamento nega ao aluno a oportunidade de confrontar suas próprias incertezas e contribui para a ilusão de que o entendimento foi alcançado.

[4] Essa atitude adotada pelo professor é enfatizada por Baldino e Cabral em vários de seus escritos, como, por exemplo, no texto "Educação matemática conversando com psicanálise", de 2010.

coletivamente, envolvendo todos os estudantes. O objetivo é estimular a participação ativa de todos os alunos no processo decisório, levando em consideração suas opiniões e perspectivas; assim, busca-se alcançar um acordo comum que seja compartilhado por todos os estudantes envolvidos. A ideia é que as decisões sejam tomadas por meio de um processo democrático no qual sejam consideradas as diferentes vozes e os pontos de vista presentes na sala de aula. Cabe destacar que o consenso absoluto nem sempre é possível e, assim, pode ser necessário tomar decisões com base na decisão da maioria. No entanto, mesmo nessas circunstâncias, é importante respeitar as opiniões e preocupações daqueles que discordam;

2. Avaliação do processo de trabalho, e não do produto: este princípio, já mencionado, diz respeito à avaliação do aluno, que não se limita exclusivamente a exames somativos (provas), mas engloba todo o processo percorrido durante seu desenvolvimento acadêmico ao longo da disciplina;
3. Medida da duração do trabalho produtivo, e não da competência atingida: é enfatizado que será levado em consideração o comprometimento demonstrado ao longo de todo o trabalho, do processo, e não somente no resultado final;
4. Aumento da competência média da turma, não da competência máxima de alguns: o trabalho em grupo tem como objetivo ampliar o conhecimento geral da turma, buscando estratégias que permitam aos alunos menos familiarizados com determinado conteúdo compreendê-lo de forma efetiva, sem deixá-los para trás;
5. Acompanhamento do raciocínio, e não da correção do resultado: no que se refere aos conteúdos, é essencial que haja um acompanhamento cuidadoso de sua construção lógica, visando promover uma compreensão mais abrangente e profunda, em vez de uma abordagem baseada apenas na memorização mecânica e com atenção somente na correção;
6. Prêmios e sanções à turma e aos grupos, e não aos indivíduos: em relação ao reconhecimento pelo trabalho, deve ser feito de forma a contemplar todo o grupo, e não somente um aluno;
7. Instalação de foro de debate sobre o papel do aparelho escolar: aqui se busca promover a ativação da autoavaliação crítica a fim de discernir se o trabalho em grupo é benéfico e se contribui de forma significativa para o aprendizado,

comparando-o com a realização individual e analisando os resultados obtidos em ambos os cenários.

Diante desses princípios, é essencial recordar que toda essa estrutura é debatida com os alunos em um momento prévio à implementação da AS, a fim de que estejam cientes e concordantes acerca do processo avaliativo. A oficialização ocorre por meio de um contrato de trabalho, no qual a estrutura e todos os tópicos discutidos — desde a forma como ocorrerão as atividades até o método avaliativo — são detalhados e acordados entre as partes envolvidas.

Caso um aluno manifeste total discordância em relação ao contrato de trabalho proposto e opte por realizar as atividades de forma tradicional, o professor não se oporá a essa decisão. Por fim, vale enfatizar que a integração da avaliação do trabalho em sala de aula é uma contribuição importante, pois permite que os alunos sejam avaliados com base em seu esforço em aprender, independentemente das limitações que suas origens sociais ou habilidades iniciais possam vir a oferecer. Além disso, os critérios previamente ajustados fornecem a capacidade necessária para lidar com as diferenças acadêmicas, garantindo que todos os estudantes, inclusive os com mais dificuldades, recebam a atenção necessária durante as aulas.

3 Aspectos Metodológicos do Estudo

Esta investigação optou pela abordagem qualitativa que, de acordo com Denzin e Lincoln (2006), uma pesquisa qualitativa é descrita pela busca por compreender as coisas em seus cenários naturais. O estudo em questão se desenvolveu em uma disciplina denominada Tópicos de Matemática I, de 72 h/a, de 50 minutos cada, sendo ofertadas quatro aulas por semana, durante o segundo semestre de 2022. A disciplina foi ministrada pela segunda autora do texto, teve o primeiro autor como colaborador, e contou com um total de 16 alunos matriculados. Dos inscritos, 14 eram do primeiro semestre do curso, e dois pertenciam ao segundo semestre. Dos 16 alunos matriculados na disciplina, três não compareceram a nenhuma das aulas, apesar de permanecerem matriculados. Portanto, 13 alunos participaram da disciplina e da pesquisa, aderindo à proposta de intervenção AS.

Após a análise das respostas da atividade diagnóstica no primiero dia de aula, a turma foi dividida em quatro grupos, o intuito foi dividir os alunos que tinham níveis de conhecimento semelhantes. Segundo Rivière (1988), o grupo deve ser heterogêneo em tudo, porém homogêneo na execução das tarefas.

No segundo dia de aula, foi apresentado o contrato de trabalho da disciplina, um dos estudantes se voluntariou a ler em voz alta e depois foi discutido e foram tiradas as dúvidas dos alunos. Nessa aula, foram discutidas as atividades que seriam realizadas durante a disciplina. Nesse ponto, foi colocado aos alunos que lhes seriam entregues fichas de trabalho correspondentes aos conteúdos que iriam trabalhar. Sobre isso, Cabral (2015, p. 230) explicita que “[...] costuma-se adotar um livro que enquanto texto é ‘desmanchado’ e transformado em fichas de trabalho”. Assim, o material utilizado para elaborar as fichas de trabalhos eram livros de matemática que contemplava os conceitos da ementa da disciplina e que estavam disponíveis na biblioteca da universidade para melhor acesso dos estudantes.

Ainda nesse segundo dia de aula, foi exposto que haveria momentos de discussão entre os grupos, resolução de tarefas e, posteriormente, o compartilhamento dos conhecimentos adquiridos por todos os alunos por meio de apresentações no quadro. Na sequência, foi comentada a forma de avaliação utilizada inicialmente na disciplina — também exposta no contrato de trabalho — que consistiu em dividir as notas em nota de grupo e nota individual, sendo que cada atividade gerava uma nota.

A nota final foi a média das notas, sendo, Nota 1 (N1) e Nota 2 (N2), de modo que a Nota 1 era composta pela nota do grupo + nota individual (nota da prova 1), e a Nota 2 era composta pela nota do grupo + nota individual (nota da prova 2); Nota Final = (N1+N2)/2. No final, a turma foi novamente informada de que o contrato de trabalho se destinava, entre outras coisas, principalmente para conscientizar os alunos sobre o funcionamento do processo de avaliação ao longo da disciplina.

Todos os estudantes participantes estavam cientes e de acordo com o contrato e que as imagens poderiam gerar dados para uma pesquisa. Durante a disciplina, muitos aspectos interessantes surgiram, no entanto, neste relato nos limitamos apenas a um momento da disciplina para discussão, que denominamos de o caso “partes de partes”. Para isso, apresentamos na sequência trechos da transcrição desse momento que ocorreu nas duas últimas aulas do segundo dia, e o conteúdo era operações com o conjunto dos números racionais.

Ressalta-se que para manter a integridade dos participantes, foram dados os seguintes nomes fictícios aos acadêmicos: Camila, Luan, Vagner, Ana, André, Vanessa, Pedro, Vitoria, Vivi, Fernando, Fátima, Luiz e Brenda.

4 O Caso Partes de Partes

Buscando evitar o modo tradicional e mecânico pelo qual os alunos geralmente resolvem as operações com frações e na tentativa de superar os erros cometidos na atividade diagnóstica, como, por exemplo, somar os numeradores com numeradores e denominadores com denominadores nas operações de adição entre frações com denominadores diferentes, a terceira aula da segunda semana da disciplina foi iniciada com uma discussão sobre as operações com frações a partir de uma ficha de trabalho, composta de atividades envolvendo diferentes representações e operações com números racionais. Nas atividades relacionadas às operações com frações, a intenção era fazer com que os alunos representassem geometricamente as operações e pudessem compreender a razão de se calcular o mínimo múltiplo comum e outras propriedades que envolvem as operações com frações. Após alguns minutos de resolução de uma ficha de trabalho em grupos, Camila foi convidada pela professora para representar no quadro o entendimento de seu grupo sobre a multiplicação de frações.

Camila começa com o exemplo $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$, explicando essa operação de maneira mecânica, multiplicando numerador por numerador e denominador por denominador. Nesse momento, começou a tentativa da professora em fazer com que a aluna representasse geometricamente essa operação, para que todos compreendessem o porquê do resultado ser $\frac{1}{4}$.

A representação geométrica de uma fração que utilizamos neste estudo é baseada em Brasil (1998, p. 104), quando afirma que "[...] a compreensão da multiplicação com frações pode ser pensada como partes de partes do total (neste caso a multiplicação não se apóia na idéia de adição reiterada)".

> *Professora:* Nos casos anteriores, foi utilizado desenhos para representar a operação; nesse caso, como é que eu represento geometricamente isso?
> *Camila:* Sim!

Em seguida, ciente de que o resultado da operação é $\frac{1}{4}$, Camila escreveu a representação geométrica de $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$ e, logo após, indicando com o sinal de igualdade, representou geometricamente a fração ¼, mas não mostrou como é a representação da multiplicação dessas frações. A professora, então, continuou a fazer perguntas.

> *Professora:* Você consegue explicar a multiplicação dessa forma que você represou aí?
> *Camila:* Não!
> *Professora:* O que você representou aí?
> *Camila:* O resultado.
> *Professora:* E o que foi pedido?
> *Camila:* A representação da multiplicação.

A partir disso, Camila tenta utilizar outra estratégia para conseguir convencer a professora. Então, ela escreve frações equivalentes, multiplicando $\frac{1}{3}$ por 4 e $\frac{3}{4}$ por 3, ficando $\frac{4}{12} \times \frac{9}{12}$. Assim, ela desenha um retângulo com 12 repartições verticais, porém, quando vai explicar o que acontece com os numeradores, ela novamente resolve de forma mecânica, multiplicando o 4 pelo 9, sem fazer a representação geométrica, mostrando que ela não tinha entendido ainda o conceito de multiplicação entre frações.

Nesse momento da resolução, toda turma — e não somente o seu grupo — já estava tentando ajudar Camila. Havia, ao mesmo tempo, um claro interesse da turma em também entender como era feita a representação. Então, a professora pergunta para a turma:

> *Professora:* Vocês acham que ajudou tudo isso que ela fez?
> *Alguém na turma:* Apesar de ficar com o mesmo denominador as frações, acho que não.
> *Professora:* Então, agora tenta desenhar a forma que você falou, $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$. Qual figura você precisa desenhar primeiro?
> *Camila:* $\frac{3}{4}$, porque eu quero saber quanto é $\frac{1}{3}$ disso.

Após isso, a professora tenta direcionar mais uma vez os alunos, para tentar fazer com que eles cheguem à resposta. Ela pergunta novamente se a soma de parcelas iguais da multiplicação ajuda a representar essa multiplicação geometricamente e, em consenso, a turma responde que não. A professora continua:

> *Professora:* Na soma de parcelas iguais na multiplicação, quando eu tenho 2×3, como fica?
> *Camila:* $3 + 3$.
> *Professora:* Então é duas vezes de três, e se eu for usar essa linguagem para a multiplicação de fração, como fica?
> *Camila:* É o $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ de vezes, então é $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$.
> *Professora:* Isso, conseguem representar agora?

Até esse momento, a tentativa da Camila de representar essas multiplicações envolvia a representação das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$ separadamente. No entanto, após o diálogo acima transcrito, Camila percebeu o que é a nomenclatura $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$, e a melhor estratégia era utilizar um único desenho para representar essa multiplicação.

A professora continua fazendo o seguinte questionamento:

> *Professora:* Então como eu multiplico agora? Se eu quero $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$, como você já falou, qual fração eu tenho que representar primeiro?
> *Camila:* De $\frac{3}{4}$, porque eu quero $\frac{1}{3}$ dele.
> *Professora:* Então desenha aí.

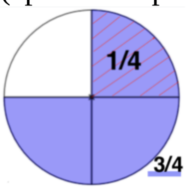
Após a aluna desenhar o ¾, a professora pergunta:

> *Professora:* Certo. Então, para saber quanto é $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$, o que você precisa fazer com o $\frac{3}{4}$? Você tem que dividir em quantas partes?
> *Luan:* Dividir toda a pizza por 3.

Camila: Todas essas partes aqui por 3?
Luan: É.
Professora: É um $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$
Luan: $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.
Vagner: Eu chutaria $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$.
Professora: Mas é $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$?
Vagner: Ah, tá certo!
Camila: $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ dá $\frac{1}{3}$?
Professora: Dá $\frac{1}{3}$?
Camila: Não.
Luan: Dá 1?
Ana: Dá 1?

Depois disso, a aluna começa a entender:

Camila: Então dá 1, porque eu dividi esse aqui por 3.
Professora: É porque, coincidentemente, o $\frac{3}{4}$ já está dividido em 3 partes, então você vai pegar $\frac{1}{3}$ disso.
Camila: Então dá quanto? 1?
Professora: 1 o quê?
Camila: Uma parte de 4, então $\frac{1}{4}$.
Luan: Então, chegou no resultado ali.
Turma: Ah!
Camila: A gente gastou tanto a mente nisso?
Professora: Então representa aí na figura, com uma outra cor, a parte da fração que representa $\frac{1}{4}$.
Camila: Explodiu a cabeça agora, que ódio. Quanto é $\frac{1}{3}$ disso? Aqui, é 1. É isso aqui (apontando para a representação geométrica que desenhou no quadro).



Vagner: Gente! (cara de espanto)
Luan: Agora que eu entendi!
[Como em um rompante, todos aplaudiram].

Nesse caso, evidenciamos o que Cabral e Baldino (2010) denominam de hipnose inversa. Esta, na Educação Matemática, baseia-se em uma projeção do sujeito sobre o plano matemático, em que o ato de “ver” transcende a mera significação do erro. Conforme mencionado por Lacan em seu Seminário 11 (Lacan, 1988), é essencial que o sujeito, ao cometer um erro, vá além da significação convencional e compreenda a qual significante irredutível, traumático, ele está como sujeito assujeitado. Nesse contexto, a hipnose inversa atua como um meio para que o sujeito explore essa relação entre o erro matemático e a significação mais profunda.

O processo de condução do aluno na hipnose inversa é semelhante a conduzi-lo ao longo de uma faixa de Möbius. Essa faixa, como a própria psicanálise lacaniana, é complexa, e muitas vezes não intuitiva. O aluno, no início, pode acreditar que sua resposta está correta e ainda não "viu" o erro. No entanto, o professor, atuando como guia, tem a possibilidade de enxergar além da superfície. A faixa de Möbius torna-se transparente para o educador, permitindo-lhe identificar os pontos em que o aluno necessita de orientação.

O processo de "ver" e "conduzir" na hipnose inversa é semelhante a um corte interpretativo. Assim como em uma análise lacaniana, o aluno é acompanhado passo a passo, à medida que o educador o conduz ao longo desse corte interpretativo (Baldino; Cabral, 2010). O objetivo é levar o aluno para o "outro lado" da significação, onde ele possa compreender o erro de uma maneira mais profunda.

A aluna Camila estava tendo dificuldade em entender o processo da representação da multiplicação de fração. Por meio do processo da hipnose inversa, Camila começou criando um próprio exemplo de duas frações para serem multiplicadas $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$ e, a partir disso, em vez de fornecer uma explicação direta, a professora começou a fazer uma série de perguntas. Ela perguntou à Camila como ela imaginava que a multiplicação de frações poderia ser representada visualmente e a incentivou a desenhar uma representação. Segundo Brasil (1998, p. 104), "[...] a compreensão da multiplicação com frações pode ser pensada como partes de partes do total. Assim $\frac{2}{5}$ x $\frac{3}{4}$ pode ser interpretado como procurar $\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{4}$ de um todo, e a partir de várias experiências como essas, os alunos poderão construir um procedimento para multiplicar frações".

No início, Camila apresentou dificuldade em visualizar a representação, no entanto, a professora continuou a fazer perguntas abertas e não a direcionou para a resposta correta. Em vez disso, ela queria que a aluna explorasse suas próprias concepções iniciais sobre o assunto.

Conforme o processo avançava, Camila começou a envolver-se mais ativamente, junto com toda a turma. Ela começou a representar geometricamente as frações envolvidas no problema e a tentar combinar essas figuras. A professora continuou fazendo perguntas que a incentivavam a pensar sobre como as áreas das figuras se relacionavam umas com as outras.

À medida que a conversa prosseguia, foi possível identificar pelas expressões que Camila começou a visualizar mais claramente como a multiplicação de frações estava relacionada à ideia de áreas. Ela começou a perceber que o produto das frações era representado pela área resultante da interseção das figuras desenhadas. No entanto, a professora não confirmava se a representação que ela dava estava certa, e sim perguntava para Camila se ela achava que estava certa, e ela dizia que não.

Durante o processo, Camila foi conduzida ao longo do corte interpretativo da hipnose inversa (Cabral; Baldino, 2010). A professora a acompanhou, passo a passo, à medida que ela explorava o conceito de representação geométrica da multiplicação de frações. A professora não apenas a guiou na direção certa, mas também a fez questionar suas próprias suposições e aprofundar sua compreensão.

No final da aula, Camila alcançou um entendimento sobre o assunto pelo fato de ela ter explicado com suas próprias palavras a representação geométrica da multiplicação de frações. Esse procedimento havia permitido que ela superasse suas dificuldades iniciais, não por meio da correção direta por parte da professora, mas ao ser guiada por esta na exploração autônoma do conceito de multiplicação de frações.

5 Algumas Considerações

Para atingir o objetivo principal de discutir as contribuições da AS para a aprendizagem de números racionais, na forma de frações, na formação de futuros professores de matemática, utilizamos o caso partes de partes, em que a organização da AS possibilitou contribuiu para a compreensão dos estudantes sobre a multiplicação de frações. Nesse sentido, a AS foi desenvolvida sob a suposição de que a compreensão implica aprendizado. No entanto, ao longo do caminho, e ancorados em Baldino e Cabral (2005), descobrimos que isso não é necessariamente verdadeiro, pois, como professores, só podemos garantir a compreensão, e que o aprendizado é um resultado de sua atitude em relação à disciplina, à universidade e à vida em geral.

Ao propor discussões em grupo a partir de fichas de trabalhos elaboradas pelos professores, os participantes tiveram a oportunidade de compartilhar seus conhecimentos e suas dúvidas antes de consultar os docentes e, assim, tentar garantir que todos do grupo tenham as mesmas compreensões e dúvidas. A opção que os professores tinham de poder escolher quem explicaria a atividade no quadro fez com que os membros do grupo tivessem a oportunidade de rever se realmente haviam compreendido, incluindo o membro que estava explicando. Foi o que ocorreu com Camila, que se mostrou confiante com a resposta e, ao explicar o resultado da multiplicação de frações, a partir dos questionamentos da professora, ela entendeu o resultado a partir da multiplicação com frações pensada como partes de partes.

Diante disso, destacamos que, por meio dos princípios básicos que orientam essa abordagem pedagógica proposta por Cabral (1992), a AS pode ser um forte mecanismo para atuar dentro do sistema de avaliação proposto pelo Ensino Tradicional Vigente (ETV), buscando deixar mais justa a forma de avaliar os alunos, levando em consideração o trabalho desenvolvido pelos estudantes.

Por fim, identificamos que a proposta de intervenção AS na formação de professores de matemática é pouco discutida na comunidade da Educação Matemática, o que se tornou um desafio ainda maior para este estudo. No entanto, entendemos que as discussões promocionais aqui trazidas podem servir como ponto de partida para diálogos mais abrangentes.

Diante destes achados, entendemos como necessária a reflexão sobre o atual sistema tradicional vigente, e sobre os paradigmas nos atuais métodos de avaliação desenvolvidos aos estudantes das licenciaturas em Matemática, com vistas a propiciar uma aprendizagem mais efetiva e repleta de significantes, além de ampliar o espectro de visão sobre as influências do ensino de matemática em diferentes cenários.

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES), pelo financiamento da pesquisa.

Referências

BALDINO, R. R. Assimilação solidária. **Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática–GPA**, UNESP, Rio Claro, 1995.

BALDINO, R. R. Students strategies in solidarity assimilation groups. *In:* V. Zack, J. Mousley, & C. Breen (Eds), **Developing Practice:** Teacher’s inquiry and educational change, pp. 123–134. Geelong: Deakin University. 1997.

BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. Lacan e o sistema de crédito escolar. Em A. Olivier & K. Newstead (Eds.), **Anais da 22ª Conferência do Grupo Internacional para a Psicologia da Educação Matemática,** v. 2, pp. 56–63. África do Sul: Stellenbosch. 1998.

BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. Lacan’s four discourses and mathematics education. *In:* O. Zaslavsky (Ed.), **Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**,Vol. 2, pp. 57–64. Haifa: Technion. 1999.

BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. Inclusion and diversity from Hegel-Lacan point of view: Do we desire our desire for change? **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 4, n. 1, p. 19–43, 2006.

BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. I Love Maths Anxiety, 2008. *In:* **The Psychology of Mathematics Education**. Editora Brill, p. 61-92. 2008.

BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. The productivity of students' schoolwork: An exercise in Marxist rigour. **The Journal for Critical Educational Policy Studies,** v. 11, n. 4, p. 70–84, 2013.

BALDINO, R. R.; CARRERA, A. C. Action research: Commitment to change, personal identity and memory. *In:* O. Zaslavsky (Ed.), **Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** vol. 2, pp. 65–72. Haifa: Technion, 1999.

Bukowitz, N. de S. L. Uma abordagem geométrica à compreensão dos números racionais**. Educação Matemática em Revista**, v. 24, p. 07-15. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CABRAL, T. C. B. **Vicissitudes da aprendizagem em um curso de cálculo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 1992.

CABRAL, T. C. B. **Contribuições da Psicanálise à Educação Matemática**: a lógica da intervenção nos processos de aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós Graduação em Educação, Universidade de São Paulo (USP), São Paulo/SP, 1998.

CABRAL, T. C. B. Metodologias alternativas e suas vicissitudes: ensino de matemática para engenharias. **Revista Perspectivas da Educação em Matemática,** Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), v. 8, n. 17, 2015.

CABRAL, T. C. B.; BALDINO, R. R. Educação matemática conversando com psicanálise. **Zetetiké**, v. 18, p. 621–652, 2010.

CABRAL, T. C. B.; BALDINO, R. R. The credit system and the summative assessment splitting moment. **Educational Studies in Mathematics**, v. 100, p. 275–288, 2019.

CABRAL, T. C. B.; PAIS, A.; BALDINO, R. R. Mathematics education's solidarity assimilation methodology. *In:* U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen; M. Veldhuis (Eds.), **Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME, 2019 [pdf].

CAROLINO, C. M., & PIETROPAOLO, R. C. (2019). Atividades com números racionais, representados na forma decima fracionária. **Educação Matemática Em Revista**, 8(9/10), 62-68.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **O planejamento da pesquisa qualitativa**: teorias e abordagens, 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006.

FIORENTINI, D. A Formação Matemática e Didático-Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática. **Revista de Educação**, Campinas, n. 8 p. 107-115-jun. 2005 [on-line, pdf].

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

NUNES, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A**. Na vida dez, na escola zero.** 16a.ed. São Paulo: Cortez, 2015.

MIOLA, A. F. S; PEREIRA, P. S. O desenvolvimento profissional de um grupo de professores de Matemática no estudo de números decimais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 2, p. 63-90, 2013.

MIOLA, A. F. S; LIMA, T. E. A. Conhecimentos necessários para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental. **Educação Matemática Debate**, v. 4, p. 1-16. 2020.

MIOLA, A. F. de S. **Uma análise de reflexões e de conhecimentos construídos e mobilizados por um grupo de professores no ensino de números decimais para o sexto ano do ensino fundamental**. 2011. 148 f. Campo Grande: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011. Disponível em: <https://sistemas.ufms.br/sigpos/portal/trabalhos/download/1825/cursoId:91>. Acesso em: 10 fev. 2024.

LINS, R. C. A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, n. 8, p. 117-123-jun. 2005.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3a.ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2010. Coleção Formação de professores.

de Campos, C. A. M. ., Magina, S. ., & Merlini, V. . (2024). FRAPET: uma proposta ao ensino de fração a partir de material manipulativo reutilizável. **Educação Matemática Em Revista**, 29(83), 1-12.

PINTO, A. S. S. *et al.* Inovação didática – projeto de reflexão e aplicação de metodologias ativas de aprendizagem no ensino superior: uma experiência com "peer instruction". **Revista de Pesquisa Científica Janus –** Fatea, Lorena/SP, ano 6, v. 9, n. 15, p. 75-87, jan./jul. 2012.