revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ARTICULAÇÃO ENTRE SEQUÊNCIAS RECURSIVAS E TEORIA DOS GRUPOS FINITOS: O CASO DA SEQUÊNCIA DE PADOVAN

DOI: https://doi.org/10.33871/rpem.2024.13.31.9228

Renata Teófilo de Sousa[1]
Renata Passos Machado Vieira[2]
Francisco Régis Vieira Alves[3]
Ana Paula Florêncio Aires[4]
Paula Maria Machado Cruz Catarino[5]

Resumo: Este artigo tem como objetivo apresentar uma abordagem para explorar a sequência de Padovan de forma articulada à teoria dos grupos finitos, no contexto do ensino de matemática. Para isso, adota-se como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática, em suas duas primeiras fases – análises preliminares e concepção e análise *a priori* –, de modo combinado à Teoria das Situações Didáticas, para a composição de um modelo de ensino. Utiliza-se como suporte o *software* GeoGebra, em que se relaciona a sequência de Padovan, que é uma sequência infinita, aos grupos finitos a partir da congruência modular, reescrevendo-a como sequência finita. A partir da construção no GeoGebra e sua análise, foram identificados padrões cíclicos na sequência de Padovan módulo m e discute-se como esses padrões podem ser explorados didaticamente, propondo atividades práticas e mediações específicas para o ensino de conceitos de grupos finitos em sala de aula.

Palavras-chave: Sequência de Padovan. Teoria dos Grupos. GeoGebra. Ensino de matemática.

ARTICULATION BETWEEN RECURSIVE SEQUENCES AND FINITE GROUP THEORY: THE CASE OF THE PADOVAN SEQUENCE

Abstract: This article aims to present an approach to explore the Padovan sequence in conjunction with finite group theory in the context of mathematics education. To this end, it was adopted the Didactic Engineering as research methodology, in its first two phases - preliminary analyses and conception and a priori analysis -, combined with the Theory of Didactical Situations, to compose a teaching model. It was used the GeoGebra software as support, where it was related the Padovan sequence, which is an infinite sequence, to finite groups through modular congruence, rewriting it as a finite sequence. Based on the construction

[1] Doutoranda em Ensino (RENOEN), pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Docente da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC), Fortaleza. E-mail: rtsnaty@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5507-2691

[2] Doutoranda em Ensino (RENOEN), pela Universidade Federal do Ceará. Docente da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC), Fortaleza. E-mail: re.passosm@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1966-7097

[3] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará. Docente Permanente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Bolsista de produtividade do CNPq – PQ2. E-mail: fregis@ifce.edu.br – ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3710-1561

[4] Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Salamanca. Investigadora membro do Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF) da Universidade de Aveiro. Docente Auxiliar da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Portugal. E-mail: aaires@utad.pt – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8138-3776

[5] Doutora em Matemática pela Universidade de Essex. Professora Catedrático da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real. Investigadora membro do Centro de Investigação CMAT – UTAD - Polo CMAT da Universidade do Minho e Investigadora membro do Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (CIDTFF) pela Universidade de Aveiro, Portugal. E-mail: pcatarin@utad.pt – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6917-5093

in GeoGebra and its analysis, there were identified cyclical patterns in the Padovan sequence module m and was discussed how these patterns can be explored didactically, proposing practical activities and specific mediations for teaching concepts of finite groups in the classroom.
Keywords: Padovan Sequence; Group Theory. GeoGebra. Mathematics teaching.

Introdução

O estudo de sequências numéricas envolve a análise de listas infinitas de números reais, em que cada termo depende do seu antecessor. Entre essas sequências, destacam-se as sequências lineares recursivas, que são geradas por meio de uma recorrência linear, conhecida como fórmula de recorrência. Essa fórmula permite calcular os termos subsequentes da sequência com base nos termos anteriores, sendo importante definir os termos iniciais e a fórmula de recorrência para toda sequência linear (Vieira *et al*., 2023).

Enquanto a Sequência de Fibonacci é amplamente abordada em disciplinas que envolvem a História da Matemática, outras sequências, como a Sequência de Padovan, são frequentemente não abordadas (Alves; Catarino, 2022). Contudo, argumentamos que o estudo de outras sequências, como o caso da Sequência de Padovan, pode enriquecer o currículo desses cursos, proporcionando aos futuros professores uma visão mais abrangente das sequências numéricas e incentivando a exploração de diferentes padrões e propriedades matemáticas.

Neste artigo discutimos a importância de incluir a sequência de Padovan no ensino de sequências lineares recorrentes em cursos de Licenciatura em Matemática e, neste ensejo, buscamos uma abordagem que associe seu estudo a outros tópicos da matemática, como as estruturas algébricas de grupos, sendo esta proposta algo ainda não discutido na literatura acadêmica.

A sequência de Padovan, assim como a sequência de Fibonacci, é uma sequência numérica recorrente que surge em várias áreas da Matemática e Ciência e tem relação com o número plástico[6] (Spinadel; Buitrago, 2009; Ferreira, 2015; Vieira; Alves, 2019). Neste artigo, exploramos a sequência de Padovan sob a ótica da teoria dos grupos finitos, uma área da Álgebra Abstrata que estuda grupos com um número finito de elementos, e discutimos sua aplicação em um contexto de ensino de matemática.

Os grupos finitos são conjuntos finitos equipados com uma operação binária que satisfaz certas propriedades, como associatividade, identidade e inverso para cada elemento (Garcia;

[6] O número plástico é um sistema de proporções de grande importância na teoria da arquitetura, fundamentado em um número irracional com um valor aproximado 1,32.

Lequain, 2015; Zahirović et al., 2019). Eles são fundamentais em muitas áreas da matemática, incluindo Álgebra, Teoria dos Números e Geometria. Na análise da sequência de Padovan, almejamos explorar como os padrões cíclicos observados estão relacionados às propriedades de grupos finitos.

O GeoGebra oferece uma ferramenta poderosa para visualizar e explorar esses padrões de maneira interativa. Ao usar o GeoGebra, podemos plotar gráficos dos termos da sequência de Padovan módulo m (o que nominaremos ao longo do artigo por $mod\ m$, onde m é um número primo) para diferentes valores de m. Vale ressaltar que o módulo m é o método matemático em que utiliza o resto da divisão entre dois números. Isso nos permite observar como os padrões cíclicos se manifestam e como eles estão relacionados aos conceitos de grupos finitos.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Engenharia Didática (ED) são abordagens teórico-metodológicas originadas dos estudos da Didática da Matemática Francesa (Brousseau, 2008; Artigue, 2014; 2020) e, de modo combinado, oferecem suporte ao ensino e à aprendizagem da Matemática, enfatizando a construção do conhecimento pelos estudantes por meio de situações de ensino cuidadosamente projetadas e contextualizadas.

Nessa perspectiva, adotamos a TSD como teoria de ensino e a ED enquanto metodologia de pesquisa de forma combinada, visando estruturar um modelo direcionado ao ensino da sequência de Padovan associada a grupos finitos na Licenciatura em Matemática. Consideramos que essas abordagens podem oferecer uma estrutura eficaz para promover a compreensão dos conceitos envolvidos.

Neste trabalho, por tratar-se de uma proposta de ensino, adotamos apenas as duas primeiras fases da ED – análises preliminares e concepção e análise *a priori*, apresentadas de modo pormenorizado e desenvolvidas nas seções subsequentes.

Metodologia: Engenharia Didática

Optamos por empregar como metodologia para este estudo a Engenharia Didática (ED), concentrando-nos nas suas duas primeiras fases: análises preliminares e concepção e análise *a priori*. Nosso objetivo é desenvolver uma proposta de abordagem didática que possa ser utilizada pelo professor como suporte metodológico para tratar da associação entre a sequência de Padovan e grupos finitos em sala de aula.

A escolha da ED se deve ao fato de ser uma metodologia de pesquisa que facilita a emergência de fenômenos didáticos em condições o mais próximas possível do ambiente de uma sala de aula convencional. Esta metodologia foi desenvolvida para a sistematização e organização de estudos que investigam os processos de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos (Artigue, 2014; 2020; Almouloud; Coutinho, 2008; Sousa *et al*., 2022).

A ED possui quatro fases, que são (i) análises preliminares; (ii) concepção e análise *a priori*; (iii) experimentação; e (iv) análise *a posteriori* e validação. Neste trabalho, por tratar-se da junção entre duas pesquisas de doutorado em andamento, que por sua vez consiste em uma proposta de ensino, discute as fases (i) e (ii) da ED, como mencionado anteriormente.

Na primeira fase – análises preliminares – realizamos uma breve revisão dos conceitos envolvidos, como a sequência de Padovan, a teoria dos grupos finitos e o conceito de congruência modular de forma associada. Esta etapa consiste na análise matemática do tema. A partir da revisão da literatura realizada sobre a sequência de Padovan e grupos finitos, identificamos lacunas no ensino que poderiam ser abordadas pela abordagem didática proposta.

Na segunda fase – concepção e análise *a priori* – elaboramos e apresentamos um modelo didático (Brousseau, 2002), norteado pela Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2002; 2008) e amparado nos pressupostos da Engenharia Didática, visando a discussão matemática da articulação da sequência de Padovan e grupos finitos, com ênfase em grupos cíclicos. Contamos com o aporte visual do GeoGebra, no tocante à visualização do comportamento da sequência, no que diz respeito à congruência modular e em sua escrita como grupo cíclico finito. A análise *a priori* envolveu a previsão de possíveis dificuldades e pontos de aprendizado dos alunos ao explorar a sequência de Padovan com o GeoGebra, antecipando os tipos de mediação que o professor precisaria fornecer.

Segundo Brousseau (2002), um modelo didático é uma estrutura conceitual que descreve como o conhecimento matemático é construído e transmitido em uma situação de ensino, considerando os conteúdos matemáticos a serem ensinados, os métodos e estratégias utilizados pelo professor e as interações entre o professor e os alunos, conhecidos como trinômio didático (professor, aluno e saber). Para estruturá-lo, baseamo-nos nas dialéticas da TSD, que são ação, formulação, validação e institucionalização, visando amparar o ensino e propiciar um ambiente de aprendizagem que apoie os estudantes em sua compreensão matemática.

Nas seções seguintes trazemos o desenvolvimento detalhado destas duas fases da ED supracitadas.

Análise preliminar: a sequência de Padovan e sua articulação aos grupos finitos

Os números de Padovan foram descobertos pelo arquiteto italiano Richard Padovan (1935 - ?), originário da cidade de Pádua. Esta sequência guarda semelhanças com outras conhecidas sequências numéricas, como a de Fibonacci, apresentando uma natureza aritmética e composta por números inteiros (Vieira *et al*., 2019). Podemos formalizar essa definição por meio de uma relação recursiva:

Definição 1. A sequência de Padovan pode ser expressa pela equação recursiva:

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$$

onde P_n representa o n-ésimo termo da sequência, em que seus termos iniciais são $P_0 = P_1 = P_2 = 1$. Assim, seguindo a relação, tem-se que os primeiros termos da sequência de Padovan são 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, e assim por diante.

Seu polinômio característico é dado por $x^3 - x - 1 = 0$, com três raízes, sendo duas raízes complexas e conjugadas e uma terceira raiz real, denotada pelo número plástico $\psi \approx 1{,}324\ldots$ (Ferreira, 2015; Vieira *et al*., 2019; Alves; Catarino, 2022).

Já no que diz respeito a Teoria dos Grupos, estes podem ser definidos como um conjunto não-vazio G, que ao ser munido de uma operação *, denomina-se um *grupo* se, e somente se, para cada par de elementos (a, b) de G é possível associar um único $c \in G$, em que $c = a * b$ (Garcia; Lequain, 2015). De modo equivalente, pode-se compreender que existe uma função:

$$\begin{aligned} *: G \times G &\to G \\ (a, b) &\longmapsto a * b \end{aligned}$$

onde o par $(G,*)$ é considerado um grupo, se satisfeitas as seguintes propriedades:

(i) (Associativa) $a * (b * c) = (a * b) * c$, para quaisquer $a, b, c \in G$.

(ii) (Existência de elemento neutro) Existe $e \in G$, tal que $a * e = e * a = a$, para qualquer $a \in G$.

(iii) (Existência de inverso) Para cada $a \in G$, existe $b \in G$, tal que $a * b = b * a = e$.

E, ainda, caso seja identificada e satisfeita a propriedade:

(iv) $a * b = b * a, \forall\, a, b \in G$ (comutativa)

dizemos que o grupo é *abeliano*.

No que tange à especificidade de nosso trabalho, acerca dos grupos finitos, temos as Definições 2, 3 e 4, que versam sobre grupos finitos, subgrupos e grupos cíclicos respectivamente, e foram descritas de acordo com Garcia e Lequain (2015). Ressaltamos que, dada a brevidade do manuscrito, deixamos estas duas referências para consulta de suas provas e demonstrações.

Definição 2. Dado um conjunto G dito finito, tem-se que um grupo $(G,*)$ é um *grupo finito*, em que o seu número de elementos é denominado ordem do grupo $o(G)$ ou $|G|$.

No caso dos grupos finitos, a tábua da operação $*$ é chamada *tábua do grupo*, em que podemos analisar todas as possibilidades e arranjos entre seus elementos. Dentro do campo da Teoria dos Grupos, existem os grupos finitos denominados por *grupos cíclicos*, mas antes de entendermos seu conceito, precisamos mencionar uma definição anterior, que trata sobre subgrupos:

Definição 3. Seja G um grupo e A um subconjunto não vazio de G. Denotamos por $\langle A\rangle$ o subgrupo gerado por A. Quando $A = \{a\}$, escrevemos $\langle a\rangle$. O subgrupo $\langle A\rangle$ pode ser caracterizado como o conjunto de todos os produtos dos elementos de A e seus inversos, de modo que:

$$\langle A\rangle = \{a_1{}^{k_1}, a_2{}^{k_2}, \dots, a_n{}^{k_n};\ a_i \in A, k_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \qquad (2)$$

onde a_i é um elemento de A, k_i é um inteiro e n é um número natural. A partir do conceito de subgrupos trazemos a definição de grupo cíclico:

Definição 4. Dado um grupo G e um elemento a em G, o subgrupo gerado por a denotado por $\langle a\rangle$, é o conjunto de todos os produtos dos elementos de a e seus inversos.

Em outras palavras, $\langle a\rangle$ é o menor subgrupo de G que contém a. Ou seja, um grupo G é dito cíclico quando este é gerado por um único elemento $\langle g\rangle$, chamado gerador do grupo. Nos grupos cíclicos todos os elementos de G são potências de g. Se o grupo G é igual ao subgrupo gerado por a, isto é, $G = \langle a\rangle$, então dizemos que G é cíclico e que a é um *gerador* de G. Isso significa que todos os elementos de G podem ser expressos como potências de a e seus inversos.

A noção de grupo foi um instrumento da mais alta importância para a organização e o estudo de muitas partes da matemática. Em nível mais elementar, um exemplo é a teoria das simetrias, como colocado na obra clássica *Symmetry*, em que o autor explora profundamente o conceito de simetria e sua importância em diversos contextos matemáticos e físicos (Weyl, 1983). Diversas aplicações da Teoria dos Grupos retratam simetrias geométricas, onde a cada figura associa-se um grupo. Outro ponto relevante é que muitos problemas matemáticos que envolvem objetos simétricos são mais simples de se resolver a partir de um número finito de operações algébricas (soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes).

Outro conceito a ser abordado nesta análise preliminar diz respeito à congruência modular, parte do estudo de aritmética dos restos em Teoria dos Números. A congruência modular é uma relação de equivalência entre inteiros, onde dois números são considerados congruentes se possuem o mesmo resto quando divididos por um número inteiro positivo chamado de módulo (Hefez, 2014). Formalmente, trazemos a definição 5:

Definição 5. Dados dois inteiros a e b e um inteiro positivo m, dizemos que a é congruente a b módulo m e escrevemos $a \equiv b(mod\ m)$ se m divide $a - b$ (Hefez, 2014).

A congruência modular tem relação com grupos finitos e grupos cíclicos, principalmente quando lidamos com grupos de inteiros módulo m. No contexto dos inteiros módulo m, um grupo cíclico é formado pelos restos das potências de um número inteiro coprimo com m. Por exemplo, se m é primo, então todos os inteiros entre 1 e $m - 1$ são coprimos com m, e assim formam um grupo cíclico quando considerados com a operação de multiplicação módulo m.

De outra forma, consideremos G como um grupo cíclico finito gerado por a. Cada elemento em G pode ser representado como uma potência de a. Quando trabalhamos com inteiros módulo m, as potências de um inteiro coprimo com m percorrem todas as classes de congruência módulo m. Portanto, há uma correspondência direta entre os elementos de um grupo cíclico e as classes de congruência módulo m.

No que diz respeito à articulação entre a sequência de Padovan e a teoria dos grupos finitos, via congruência modular, esta pode ser analisada a partir de ciclos, propriedades de simetria e outras características estruturais. No entanto, não encontramos trabalhos na literatura que forneçam este aporte teórico, o que nos motivou a desenvolvê-lo para discussão no âmbito da sala de aula da licenciatura em matemática.

Assim, nossa ideia parte da identificação de padrões na sequência de Padovan usando conceitos da teoria dos grupos finitos, visando explorar propriedades como simetria, as operações de grupo e estruturas cíclicas. No caso, é possível investigar se existem padrões cíclicos na sequência de Padovan, ou seja, se existem subsequências que se repetem periodicamente, que podem revelar informações sobre a estrutura interna da sequência. Ao aplicar teoremas da teoria dos grupos finitos que descrevem propriedades de grupos cíclicos, pode-se entender melhor os padrões cíclicos na sequência de Padovan.

Teorema 1. Seja $P_i^{(m)}$a sequência de Padovan $mod\ m$. Então, $\{P_n^{(m)}\}$ é a forma simplesmente periódica da sequência de Padovan (Tas; Karaduman, 2014).

De modo abreviado, o *Teorema 1* afirma que se considerarmos a sequência de Padovan e ao calcularmos módulo m, onde m é um número inteiro positivo, então a sequência resultante será periódica. Isso significa que após um certo ponto, os números na sequência irão se repetir, segundo um padrão regular denominado de período. Para um maior aprofundamento, recomenda-se a leitura da obra de Tas e Karaduman (2014), em que este resultado foi demonstrado detalhadamente pelos autores.

Na sequência de Padovan, pode-se observar um padrão cíclico quando analisamos os restos da divisão dos termos por um número primo. Podemos demonstrar isto usando o módulo m de um número primo, como mostra o Teorema 1. Por exemplo, considere a sequência de Padovan $(mod\ 3)$:

(a) Os primeiros termos da sequência de Padovan são: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, ...

(b) Ao calcular esses termos módulo 3, temos (Quadro 1):

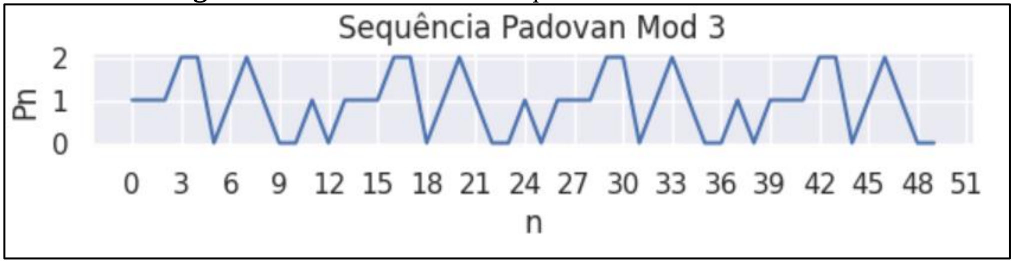
Quadro 1: Amostra dos 30 primeiros termos da Sequência de Padovan $mod\ m$

$P_0^{(3)} = 1$	$P_{11}^{(3)} = P_9^{(3)} + P_8^{(3)} = 1$	$P_{22}^{(3)} = P_{20}^{(3)} + P_{19}^{(3)} = 0$
$P_1^{(3)} = 1$	$P_{12}^{(3)} = P_{10}^{(3)} + P_9^{(3)} = 0$	$P_{23}^{(3)} = P_{21}^{(3)} + P_{20}^{(3)} = 0$
$P_2^{(3)} = 1$	$P_{13}^{(3)} = P_{11}^{(3)} + P_{10}^{(3)} = 1$	$P_{24}^{(3)} = P_{22}^{(3)} + P_{21}^{(3)} = 1$
$P_3^{(3)} = P_1^{(3)} + P_0^{(3)} = 2$	$P_{14}^{(3)} = P_{12}^{(3)} + P_{11}^{(3)} = 1$	$P_{25}^{(3)} = P_{23}^{(3)} + P_{22}^{(3)} = 0$
$P_4^{(3)} = P_2^{(3)} + P_1^{(3)} = 2$	$P_{15}^{(3)} = P_{13}^{(3)} + P_{12}^{(3)} = 1$	$P_{26}^{(3)} = P_{24}^{(3)} + P_{23}^{(3)} = 1$
$P_5^{(3)} = P_3^{(3)} + P_2^{(3)} = 0$	$P_{16}^{(3)} = P_{14}^{(3)} + P_{13}^{(3)} = 2$	$P_{27}^{(3)} = P_{25}^{(3)} + P_{24}^{(3)} = 1$
$P_6^{(3)} = P_4^{(3)} + P_3^{(3)} = 1$	$P_{17}^{(3)} = P_{15}^{(3)} + P_{14}^{(3)} = 2$	$P_{28}^{(3)} = P_{26}^{(3)} + P_{25}^{(3)} = 1$
$P_7^{(3)} = P_5^{(3)} + P_4^{(3)} = 2$	$P_{18}^{(3)} = P_{16}^{(3)} + P_{15}^{(3)} = 0$	$P_{29}^{(3)} = P_{27}^{(3)} + P_{26}^{(3)} = 2$
$P_8^{(3)} = P_6^{(3)} + P_5^{(3)} = 1$	$P_{19}^{(3)} = P_{17}^{(3)} + P_{16}^{(3)} = 1$	$P_{30}^{(3)} = P_{28}^{(3)} + P_{27}^{(3)} = 2$
$P_9^{(3)} = P_7^{(3)} + P_6^{(3)} = 0$	$P_{20}^{(3)} = P_{18}^{(3)} + P_{17}^{(3)} = 2$	$\vdots$
$P_{10}^{(3)} = P_8^{(3)} + P_7^{(3)} = 0$	$P_{21}^{(3)} = P_{19}^{(3)} + P_{18}^{(3)} = 1$	$P_n^{(3)} = P_{n-2}^{(3)} + P_{n-3}^{(3)}$

Fonte: Elaborada pelos autores.

Podemos observar que após os três primeiros termos (1, 1, 1), a sequência começa a repetir-se: 1, 2, 2, 0. Isso constitui um padrão cíclico que se repete a cada quatro termos. Esse padrão cíclico ocorre porque os números de Padovan são gerados pela soma dos três termos anteriores, portanto, ao calcular módulo 3, cada novo termo é determinado apenas pelos três termos anteriores, formando um ciclo (ver Figura 1). Esse padrão cíclico pode ser observado para outros números primos também, resultando em diferentes ciclos de comprimento na sequência de Padovan quando consideramos diferentes módulos, o que sugere a presença de um padrão definido que está intrinsecamente ligado às propriedades do grupo finito subjacente:

Figura 1: Padrão cíclico da sequência de Padovan mod 3



Fonte: Elaborada pelos autores.

A Figura 1 ilustra o comportamento cíclico da sequência de Padovan módulo 3. Em sala de aula, essa figura pode ser utilizada para demonstrar a aplicação de conceitos de congruência modular, incentivando os alunos a explorar outros módulos e observar padrões similares. Destaca-se que o padrão não é contínuo, uma vez que a sequência por si só não é de natureza discreta. A linha (em azul) representada Figura 1 conecta cada ponto, no intuito de facilitar a percepção do padrão.

O GeoGebra é uma ferramenta que permite visualizar e explorar esses padrões de maneira interativa. Ao usar o GeoGebra, podemos plotar gráficos dos termos da sequência de Padovan módulo m para diferentes valores de m (sendo este m um número primo). Isso nos permite observar como os padrões cíclicos se manifestam e como eles estão relacionados aos conceitos de grupos finitos.

Diversos autores defendem o uso do GeoGebra no que diz respeito à visualização (Bairral; Barreira, 2017; Alves, 2019; Mathias *et al*., 2019). Bairral e Barreira (2017, p. 52) afirmam que "a visualização e a representação são evidenciadas como uma das potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica, como o GeoGebra".

No caso deste trabalho, a visualização no GeoGebra pode proporcionar melhor compreensão acerca dos padrões na sequência de Padovan, bem como ser uma ferramenta valiosa para o desenvolvimento do tema. Os estudantes podem explorar os padrões de forma interativa, experimentando diferentes valores de m e observando como eles afetam o comportamento da sequência. Deste modo, espera-se que esta abordagem reforce a compreensão de conceitos de grupos finitos, além de promover uma apreciação mais profunda de sequências numéricas recorrentes como um todo.

Concepção e análise *a priori*: uma proposta para o ensino

Artigue (2014) explica que uma análise *a priori* procura especificar as possibilidades selecionadas no processo experimental, os valores das variáveis didáticas produzidas a partir dessa seleção e o significado dos comportamentos esperados, considerando esses valores. Em complementaridade, Almouloud e Coutinho (2008) enfatizam que nesta etapa devem ser consideradas a caracterização da situação didática desenvolvida, a análise do que pode estar em jogo para o estudante, a previsão de campos de comportamentos possíveis, bem como a demonstração de como a análise permite controlar seus significados, assegurando que tais comportamentos ocorram em consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem.

Nesse sentido, buscamos nesta análise *a priori* estruturar uma situação didática almejando que os estudantes da licenciatura em matemática compreendam a relação entre a sequência de Padovan e grupos finitos, utilizando o GeoGebra para visualização e exploração de padrões cíclicos. Para isso, utilizamos a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2002; 2008), como forma de modelar uma situação de ensino com base nas dialéticas da TSD – ação, formulação, validação e institucionalização.

Na perspectiva de Brousseau (2008), o triângulo didático – professor, aluno e saber - é composto pelos pilares da relação didática de forma dinâmica em que a ação do professor inclui um marcante componente de regulação do processo de aquisição do aluno. O próprio aluno aprende regulando sua relação com seu ambiente. Assim, de acordo com o autor são consideradas as interações *professeur-élève*, *professeur-savoir* e *élève-savoir*, além do meio (*milieu*) como ambiente onde o aluno atua de modo autônomo. Desta forma, o conhecimento resultante da adaptação do aluno se manifesta a partir de novas respostas, sendo estas evidências de sua aprendizagem.

Para esta proposta didática, o professor pode iniciar a sessão de ensino solicitando aos estudantes que compartilhem o que sabem sobre sequências numéricas e grupos finitos, o que no caso seria a mobilização de conhecimentos prévios (Brousseau, 2002). A partir disso, o docente pode comentar sobre as sequências recorrentes, como a de Fibonacci, e outras sequências relacionadas a ela, como a sequência de Padovan, bem como comentar o conceito da estrutura algébrica de grupo. Neste momento, o professor deve instigar os estudantes a investigar propriedades e fazer conexões com conhecimentos anteriores e/ou outros tópicos da matemática, como o caso dos grupos finitos.

Após apresentar a sequência de Padovan, o docente deve explicar que os estudantes irão explorar padrões nessa sequência utilizando o GeoGebra. Desta forma, sugere-se como questionamento norteador ou situação fundamental[7] (Brousseau, 2002):

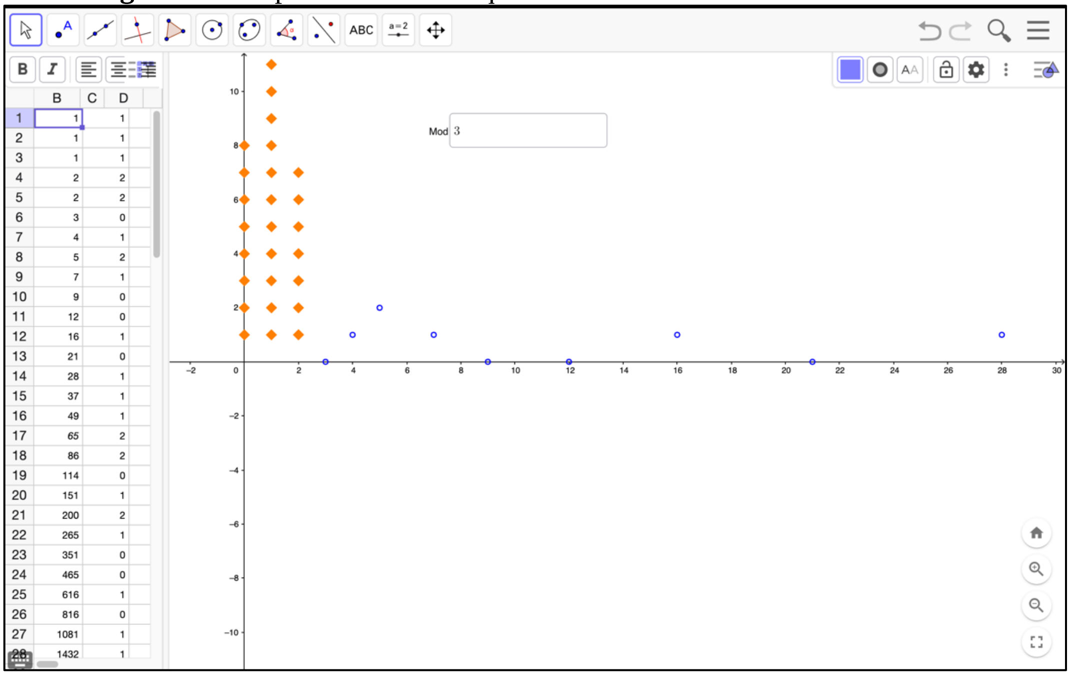
---

[7] A situação fundamental descreve o contexto no qual ocorre a aprendizagem matemática, sendo caracterizada por

Situação fundamental: Analise e investigue como os elementos da sequência de Padovan podem estar relacionados aos elementos de um grupo finito, com base nas suas observações e manipulação da construção dada no GeoGebra.

A construção no GeoGebra está ilustrada na Figura 2:

Figura 2: Comportamento da Sequência de Padovan *mod m* no GeoGebra



Fonte: Elaboração dos autores.

Conforme as dialéticas da TSD, na *situação de ação*, os estudantes de posse da situação didática e de seus conhecimentos prévios, agem sobre o problema a partir de uma tomada de posição (Brousseau, 2008). Espera-se que neste momento, os estudantes utilizem o ambiente lápis e papel para rascunhar alguns cálculos e evidenciar propriedades na sequência de Padovan. Algumas variáveis didáticas, no que diz respeito à própria estrutura da ED (Artigue, 2014) podem surgir nesta fase, e são colocadas aqui como um possível comportamento previsto *a priori*. Por exemplo, percepções sobre:

(a) *Recorrência*: A sequência de Padovan é definida recursivamente, o que significa que cada termo da sequência é obtido através de uma combinação dos termos anteriores;

três elementos principais: o objeto do conhecimento, a instrumentação matemática e a consignificação, sendo o contexto no qual ocorre a interação entre esses elementos. Os alunos têm a oportunidade de explorar, investigar e construir significados em torno do objeto de conhecimento por meio da instrumentação matemática disponível, enquanto o professor cria e orienta a situação de aprendizagem, visando promover o desenvolvimento conceitual.

(b) *Padrão de Crescimento*: Os termos da sequência de Padovan crescem rapidamente, mas de uma maneira mais moderada do que a sequência de Fibonacci.

(c) *Relação com a Sequência de Fibonacci*: A sequência de Padovan pode ser vista como similar à sequência de Fibonacci, diferenciando-se por seus termos iniciais. Enquanto a sequência de Fibonacci é definida pela soma dos dois termos anteriores, a sequência de Padovan é definida pela soma dos três termos anteriores.

(d) *Padrões Visuais*: Ao plotar os termos da sequência de Padovan em um gráfico, podem surgir padrões visuais interessantes, como formações geométricas ou estruturas similares a espirais. No caso da construção dada, é possível perceber o comportamento dentro da aritmética dos restos, via congruência modular.

(e) *Propriedades Numéricas*: Os estudantes podem descobrir propriedades numéricas dos termos da sequência, como divisibilidade, padrões de paridade, entre outros.

Na *situação de formulação* da TSD, os estudantes traçam suas conjecturas, de forma oral ou escrita, mas ainda sem se preocupar com a formalidade matemática e o rigor na linguagem (Brousseau, 2008). Nesta fase, espera-se que o docente facilite a discussão em grupo (seja da sala de aula inteira ou pequenos grupos), e que os estudantes possam compartilhar suas observações e hipóteses sobre os padrões na sequência de Padovan. Eles devem ser desafiados a descobrir como esses padrões estão relacionados aos conceitos de grupos finitos, bem como a explicar suas descobertas e a justificar suas hipóteses.

Uma possível formulação nesta etapa é a observação de simetrias, das operações de grupo e da presença de estruturas cíclicas na sequência de Padovan, sendo estas formulações realizadas de forma manuscrita ou via *software* GeoGebra:

(a) *Observação de simetrias*: É possível notar que a sequência de Padovan apresenta uma simetria em relação ao seu ponto médio, o que significa que, se considerarmos a sequência até certo ponto, os termos à esquerda do ponto médio são refletidos pelos termos à direita. Deste modo, pode-se explorar operações de simetria de grupos, como reflexões e rotações, aplicadas à sequência de Padovan para revelar padrões ou propriedades.

(b) *Identificação de padrões relacionados à operação de grupo*: outra possibilidade é tentar encontrar operações de grupo que preservem certas propriedades da sequência de Padovan. Por exemplo, a adição modular e a congruência modular, como dada na construção, podem ser operações de grupo relevantes para explorar padrões na sequência. Assim, ao investigar a propriedade do fechamento, deve-se analisar se a aplicação de certas operações de grupo à sequência de Padovan mantém a sequência dentro do conjunto dos números de

Padovan, ou seja, se ela permanece na mesma classe de equivalência.

(c) *Estruturas cíclicas*: Uma alternativa que pode ser percebida pelos estudantes são os ciclos na sequência. É possível investigar se existem padrões cíclicos na sequência de Padovan, ou seja, se existem subsequências que se repetem periodicamente e, em caso afirmativo, verificar seu período associando-o ao comprimento de ciclos em grupos cíclicos.

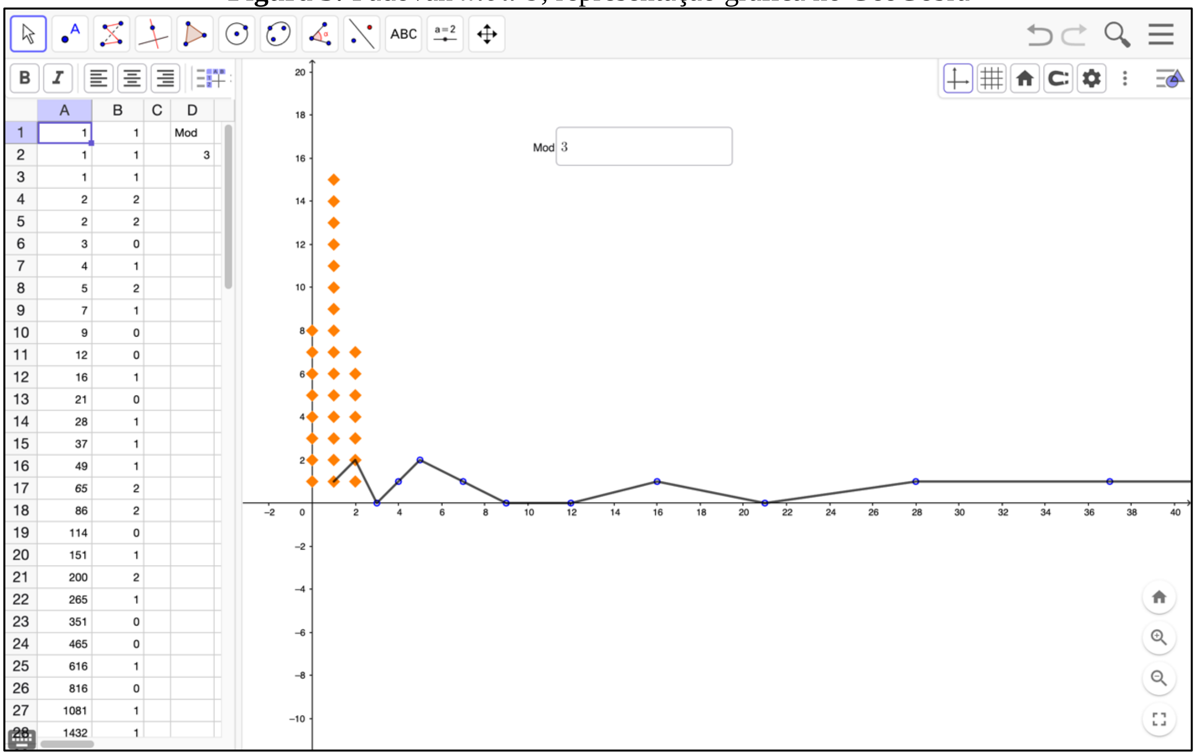
Ao explorar a construção em forma de *applet* no GeoGebra especificamente, os estudantes vão se deparar com a congruência modular, ou seja, a sequência de Padovan $mod\ m$, para diferentes valores de m, e investigar como os padrões mudam conforme o m varia. Eles podem manipular os parâmetros e espera-se que percebam a relação existente os pontos azuis e laranjas como sendo:

Pontos azuis: formados a partir dos pares ordenados (m_1, m_2), em que m_1 representa os P_n números da sequência de Padovan, e são associados a um número m_2, que corresponde ao resto do respectivo termo $mod\ m$, ou seja, $m_1 \equiv m_2\ (mod\ m)$.

Pontos laranja: formados a partir dos pares ordenados (x, y), em que x representa quais os restos possíveis via congruência modular e y representa a quantidade de restos possíveis para cada valor de m.

De forma visual no GeoGebra, tem-se (Figura 3):

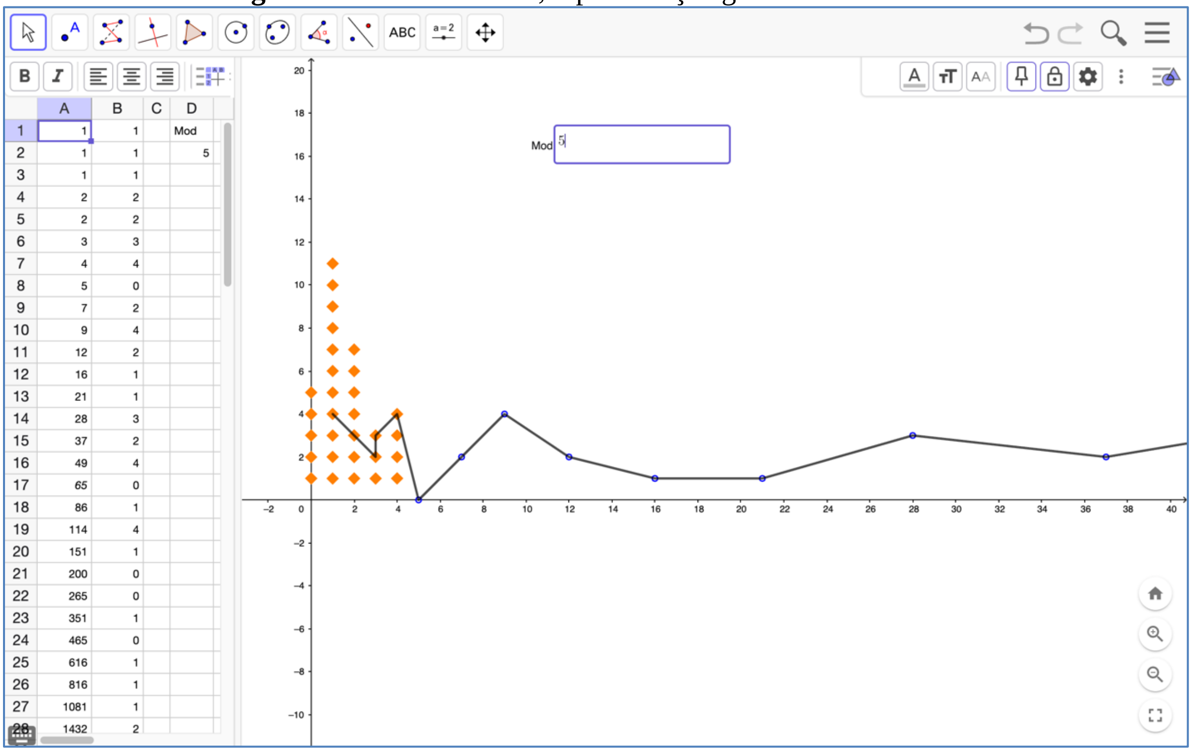
Figura 3: Padovan mod 3, representação gráfica no GeoGebra



Fonte: Elaboração dos autores.

Note que na Figura 3 (à esquerda) temos os 30 primeiros termos da sequência de Padovan e seus respectivos restos mod 3, construídos na planilha do *software*. Na janela de visualização (à direita) temos em azul os seus respectivos restos e em laranja a quantidade de cada resto. Na congruência mod 3, os possíveis restos são 0, 1 ou 2. Neste caso, temos 8 termos da sequência com resto 0, 15 termos com resto 1 e 7 termos com resto 2. Utilizamos a ferramenta caminho poligonal para observar o comportamento da sequência a partir desta congruência modular. Um outro exemplo (Figura 4):

Figura 4: Padovan mod 5, representação gráfica no GeoGebra



Fonte: Elaboração dos autores.

Note que na Figura 4, similar ao exemplo anterior, temos os 30 primeiros termos da sequência de Padovan e seus respectivos restos mod 5. No caso da congruência mod 5, os possíveis restos são 0, 1, 2, 3 ou 4. Neste caso, temos 5 termos da sequência com resto 0, 11 termos com resto 1, 7 termos com resto 2, 3 termos com resto 3 e 4 termos com resto 4. O caminho poligonal traçado mostra a alteração no comportamento da sequência a partir da congruência modular mod 5.

Com base nas discussões e nas possíveis observações acerca da construção, espera-se que os estudantes, durante a *situação de validação* consigam demonstrar que a sequência de Padovan $mod\ m$ forma um grupo finito e, mais especificamente, um grupo cíclico. Deste modo, faz-se necessário que eles verifiquem as propriedades para que isso seja verdadeiro. Um possível modelo de validação é apresentado nos parágrafos que se seguem.

Para demonstrar que a sequência de Padovan $mod\ m$ forma um grupo finito, é preciso verificar se ela possui as seguintes propriedades:

a) *Fechamento*: Para todo a, b pertencentes à sequência de Padovan $mod\ m$, tem-se que $a + b$ também pertence à sequência.

Prova: Sejam a, b dois elementos da sequência de Padovan $mod\ m$, ou seja, $a \equiv P_n (mod\ m)$ e $b \equiv P_m (mod\ m)$ para alguns inteiros n e m. Pela definição da sequência de Padovan, temos que $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ e $P_m = P_{m-2} + P_{m-3}$. Isso implica que, ao somarmos a e b obtemos $a + b \equiv P_n + P_m\ (mod\ m)$.

Considerando a adição módulo m, que é uma operação binária bem definida sobre $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, essa operação preserva a congruência módulo m. Portanto, $a + b$ é congruente a algum termo da sequência de Padovan $mod\ m$.

Como $P_n + P_m$ também é uma soma de termos da sequência de Padovan, segue-se que a soma $a + b$ pertence ao conjunto dos elementos da sequência de Padovan $mod\ m$. Portanto, a sequência de Padovan $mod\ m$ é fechada sob a operação de adição. ■

b) *Identidade*: Existe um elemento neutro na sequência, que quando somado a qualquer outro elemento resulta no próprio elemento.

Para a sequência de Padovan $mod\ m$, o elemento neutro da soma é 0, uma vez que $0 + a \equiv a\ mod\ m$, para todo $a \in P_n$.

c) *Inverso*: Para todo elemento a na sequência, existe um elemento b na sequência tal que $a + b$ é congruente a $0\ mod\ m$.

Prova: Para cada elemento a na sequência de Padovan $mod\ m$, existe um inverso b tal que $a + b \equiv 0\ mod\ m$. Isso é garantido pela finitude da sequência de Padovan $mod\ m$, garantindo que todos os elementos tenham inversos.

d) *Associatividade*: A operação de adição na sequência é associativa.

Se a, b, c são elementos da sequência de Padovan $mod\ m$, então $(a + b) + c \equiv a + (b + c) mod\ m$. Portanto, a operação de adição na sequência de Padovan $mod\ m$ é associativa.

Além disso, para demonstrar que a sequência de Padovan $mod\ m$ é um grupo cíclico, precisamos mostrar que existe um elemento gerador g tal que, quando elevado a qualquer potência, produz todos os elementos do grupo.

Prova: Ao escolhermos um elemento g na sequência de Padovan $mod\ m$, este deve ser coprimo a m. Ou seja, $gcd(g, n) = 1$. Elevamos g a diferentes potências k e verificamos se todos os resultados são diferentes $mod\ m$. Se g^k produzir todos os elementos distintos da sequência de Padovan $mod\ m$, então g é um gerador. Se g é um gerador, então os elementos da sequência de Padovan $mod\ m$ podem ser obtidos elevando g a diferentes potências. Ou seja, para cada k, existe um n tal que $g^n \equiv k\ mod\ m$, onde k é um elemento da sequência de Padovan $mod\ m$.

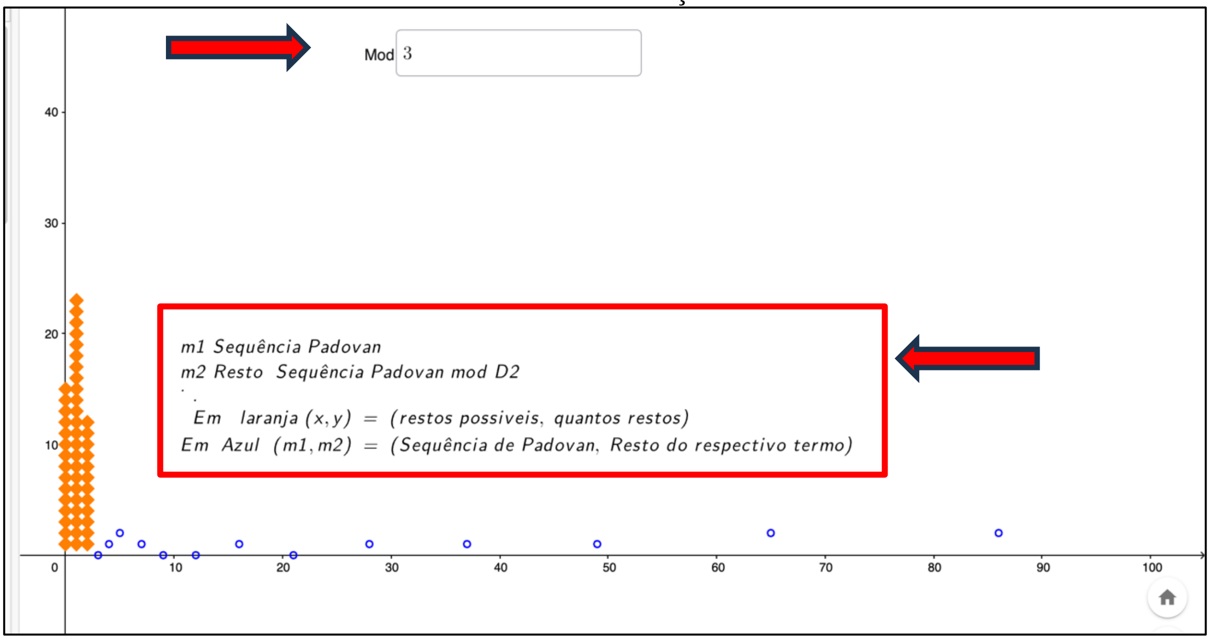
Portanto, concluímos que a sequência de Padovan $mod\ m$ é, de fato, um grupo finito e um grupo cíclico. ■

Na *situação de institucionalização*, após analisar tudo o que foi exposto e dialogado pelos estudantes, o professor deve retomar o controle da situação didática e organizar os conhecimentos apresentados, no intuito de validar o modelo descrito (Brousseau, 2002), descartando ou corrigindo as interpretações incoerentes e/ou inadequadas.

Nesta fase, é possível que o docente, além de discutir e demonstrar o Teorema 1, retome conceitos de teoria dos grupos, teoria dos números e de sequências numéricas recorrentes. É possível verificar outras possibilidades com o *software* GeoGebra e analisar o comportamento da sequência de Padovan $mod\ m$, instigando os estudantes a verificar se o mesmo ocorre com outras sequências de natureza similar.

Ilustramos outras possibilidades que podem ser exploradas e mencionadas pelo docente, como explicar o funcionamento de cada elemento gráfico apresentado (Figura 5):

Figura 5: Possibilidades de elementos a serem destacados pelo docente na situação de institucionalização

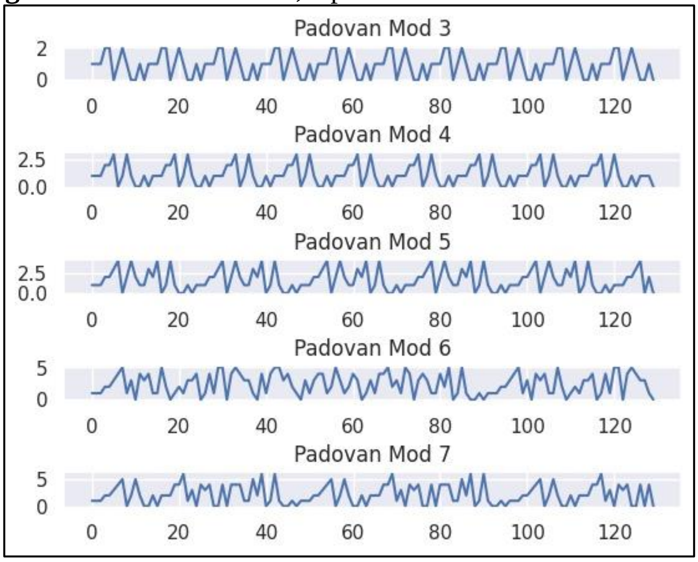


Fonte: Elaboração dos autores.

Com uso do *Google Colab* e fazendo uso da lei de formação da sequência de Padovan

$mod\ m$, é possível perceber o período de repetição no gráfico da sequência para valores de m igual a 3 até 7 (Figura 6). A transformada de Fourier foi utilizada para decompor a sequência de Padovan em componentes frequenciais, mostrando padrões cíclicos que não são imediatamente visíveis na sequência original:

Figura 6: Padovan mod m, a partir da transformada de Fourier



Fonte: Elaboração dos autores.

É possível destacar alguns achados significativos, como ciclos, padrões de repetição e evidências de um grupo cíclico dentro da sequência de Padovan $mod\ m$ e discutir as possíveis aplicações e implicações dos padrões identificados. Assim, esta situação didática oferece uma nova perspectiva sobre a sequência de Padovan e sua relação com os grupos finitos, ampliando o entendimento sobre a estrutura e o comportamento dessa sequência, bem como sobre os grupos finitos em geral.

Além disso, os resultados têm implicações significativas para o ensino de matemática, relacionando-se com disciplinas da licenciatura, como Estruturas Algébricas, História da Matemática e Teoria dos Números. Isso destaca a relevância prática da pesquisa para a formação de futuros professores de matemática e o desenvolvimento de estratégias de ensino inovadoras e eficazes, em um modelo de abordagem integrada.

Ademais, esses resultados sugerem que a sequência de Padovan pode ser uma ferramenta eficaz para introduzir conceitos avançados de teoria dos grupos em cursos de Licenciatura em Matemática, especialmente quando combinada com ferramentas visuais como o GeoGebra, que facilita a compreensão dos padrões subjacentes.

Por fim, apontamos a viabilidade e benefício de uma abordagem baseada na TSD e na

ED ao mobilizar a compreensão dos alunos a partir da associação de diferentes conceitos e tópicos matemáticos, no intuito de promover o aprendizado significativo, por serem teorias que preconizam o protagonismo do estudante no desenvolvimento de hipóteses e apreensão do conhecimento.

Considerações finais

Esta pesquisa representa uma contribuição original para a literatura de Educação Matemática, uma vez que os resultados obtidos ao associar a sequência de Padovan com grupos finitos, especialmente quando considerada módulo m, não foram previamente explorados ou publicados, o que demonstra a relevância e o potencial impacto desta pesquisa no avanço do conhecimento matemático.

Esta pesquisa demonstra como a sequência de Padovan, quando analisada sob a ótica da teoria dos grupos finitos e com o suporte do GeoGebra, pode enriquecer o ensino de matemática, oferecendo novas perspectivas para o ensino de estruturas algébricas em cursos de Licenciatura. A aplicação didática proposta fornece um modelo para professores, que pode ser expandido para outras sequências numéricas.

Esta proposta de ensino buscou explorar a articulação entre sequências recursivas e teoria dos grupos finitos, com foco na sequência de Padovan a partir da congruência modular. Desta forma, os pontos chave deste trabalho incluem a identificação de padrões cíclicos na sequência de Padovan $mod\ m$, demonstrando sua natureza intrinsecamente relacionada com os grupos finitos. Esses achados têm implicações significativas para o ensino, fornecendo uma abordagem integrada e significativa para o ensino de conceitos complexos, como o campo da Álgebra Abstrata.

Observamos que o padrão cíclico pode ser observado em outros números primos, como evidenciado pelas imagens que ilustram os casos $m = 3$ e $m = 5$. Isso resulta em diferentes ciclos de comprimento na sequência de Padovan, quando consideramos diferentes módulos, ampliando a compreensão sobre a estrutura dessa sequência e sua relação com os grupos finitos.

Além disso, destacamos a possibilidade de replicação deste estudo para outras sequências recursivas, bem como a importância do GeoGebra e dos insights que o software pode fornecer por meio da visualização dinâmica dos padrões identificados. Essa ferramenta pode ser utilizada para enriquecer a experiência de aprendizagem dos estudantes, bem como promover a compreensão dos conceitos abordados.

Sugerimos que este trabalho seja direcionado a professores de matemática do ensino universitário, bem como a pesquisadores interessados em explorar novas abordagens metodológicas para o ensino da matemática. Reconhecemos, no entanto, algumas limitações deste estudo, como a necessidade de uma maior investigação sobre os padrões observados e sua generalização para outras sequências recursivas. Propomos, portanto, estudos futuros que explorem essas questões em maior profundidade, visando contribuir ainda mais para o avanço do conhecimento nesta área.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação Brasil & Ceará de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP). Este estudo foi parcialmente financiado por Fundos Portugueses através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), dentro dos projetos UIDB/00013/2020, UIDP/00013/2020 e UIDB/00194/2020.

Referências

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62.

ALVES, F. R. V. Visualizing the Olympic Didactic Situation (ODS): teaching mathematics with support of the GeoGebra software. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n. 2, p. 97-116, 2019.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. (2022). A Sequência de Padovan ou de Cordonnier. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 22, n. 45, p. 21–43, 2022. https://doi.org/10.47976/RBHM2022v22n4521-43

ARTIGUE, M. Perspectives on design research: the case of didactical engineering. In: BIKNERAHSBAHS, A.; KNIPPING, C.; PRESMEG, N. **Approaches to qualitative research in mathematics education**, Springer, 2014. (p. 467–496).

ARTIGUE, M. Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques : Où en sommes-nous? **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 3, p. 25-64, 2020. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i3p025-064

BAIRRAL, M. A.; BARREIRA, J. C. F. Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São**

Paulo, v. 6, n. 2, p. 46–64, 2017.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**: Didactique des mathématiques 1970-1990. Kluwer Academic Publishers, 2002.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

FERREIRA, R. C. **Números Mórficos**. 94 f. Dissertação, (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/8040?locale=pt_BR

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

MATHIAS, C. V.; SILVA, H. A.; LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 8, n. 2, p. 62-77, 2019. http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2019.v8i2p062-077

SOUSA, R. T.; ALVES, F. R. V.; SOUZA, M. J. A. Aspectos da parábola e da catenária: um estudo à luz da Geometria dinâmica. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 17, p. 1-22, 2022. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2022.e88156

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. A Sequência de Padovan e o número plástico: uma análise prévia e a priori. Research, Society and Development, v. 8, n. 8, p. 1-20, 2019. https://doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Uma Exploração da Sequência de Padovan num curso de Licenciatura em Matemática. **Indagatio Didactica**, v. 11, n. 4, p. 261-279, 2019. https://doi.org/10.34624/id.v11i4.10641.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; BEZERRA, A. A.; CATARINO. Estudando a sequência de Padovan no Laboratório de Ensino de Matemática: relato de experiência. **Revista Docência do Ensino Superior**, v. 13, p. e041558, 2023. https://doi.org/10.35699/2237-5864.2023.41558

SPINADEL, V.; BUITRAGO, A. R. Towards Van Der Laan's plastic number in the plane. **Journal for Geometry and Graphics**, v. 13, n. 2, p. 163-175, 2009. https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg13/j13h2spin.pdf.

TAS, S.; KARADUMAN, E. The Padovan sequences in finite groups. **Chiang Mai Journal of Science**, v. 41, p. 456-462, 2014.

WEYL, H. **Symmetry.** New Jersey: Princeton University Press, 1983.

ZAHIROVIĆ, S.; BOŠNJAK, I.; MADARÁSZ, R. A study of enhanced power graphs of finite groups. **Journal of Algebra and its Applications**, v. 19, n. 4, 2019. https://doi.org/10.1142/S0219498820500620