revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Entendendo a fórmula da progressão aritmética visualmente: uma experiência didática através de números figurados, geometria e História da Matemática

DOI: https:// doi.org/10.33871/rpem.2025.14.34.9177

Augusto Mendes Duarte[1]

Resumo: Progressão aritmética (PA) é um conteúdo matemático pertinente ao Ensino Médio que é normalmente ensinado e demonstrado algebricamente, resumindo-se à memorização de fórmulas. A única consideração histórica comumente feita acerca deste tema é a anedota de Gauss, que relata sua genialidade infantil - um relato elitista que contrasta com a trajetória do aluno comum. Tendo tais problemáticas em vista, desenvolveu-se um projeto didático que articula História da Matemática, materiais manipulativos e resolução de problemas para ensinar PA de maneira contextualizada. Este relato tem o objetivo de descrever tal abordagem para que a comunidade de educadores matemáticos possa dela usufruir. Dado que sequências foram estudadas profusamente pelos Pitagóricos na antiguidade utilizando-se do recurso visual dos números figurados, tal contexto foi escolhido para situar o estudo da PA. Através de atividades investigativas com fichas coloridas, demonstrou-se em sala de aula como as fórmulas da PA podem ser deduzidas visualmente dos números triangulares - um tipo de número figurado de grande importância histórica. Por fim, utilizando-se deste material manipulativo, demonstrou-se pictoricamente o porquê da fórmula da soma dos termos da PA ser idêntica à fórmula da área do trapézio. Através de uma atividade avaliativa final, os alunos demonstraram ter desenvolvido um raciocínio pictórico e algébrico sobre PAs, conseguindo resolver problemas complexos apropriadamente. A experiência didática mostrou-se um sucesso considerando também a boa percepção dos alunos e as articulações de conteúdos diversos desenvolvidas e executadas com êxito.

Palavras-chave: Progressão Aritmética; História da Matemática; Materiais Manipulativos; Resolução de Problemas.

Visually understanding the arithmetic progression formula: a didactic experience through figurate numbers, geometry, and the History of Mathematics

Abstract: Arithmetic Progression (AP) is a mathematical topic pertinent to High School education that is typically taught and demonstrated algebraically, often reducing the content to formula memorization. The only commonly made historical consideration about this topic is the anecdote of Gauss, recounting his childhood genius - an elitist narrative that contrasts with the trajectory of the average student. With such issues in mind, a didactic project was developed that articulates the History of Mathematics, manipulative materials, and problem-solving to teach AP in a contextualized manner. The goal of this article is to describe this approach so that other Math teachers can also benefit from it. Given that sequences were extensively studied by the Pythagoreans in Antiquity using the visual resource of figurate numbers, such a context was chosen to situate the study of AP. Through investigative activities with colored chips, it was demonstrated in the classroom how the formulas of AP can be visually deduced from triangular numbers - a type of figurate number of great historical importance. Finally, using this manipulative material, it was pictorially demonstrated why the formula for the sum of AP terms is identical to the formula for the area of a trapezoid. Through a final evaluative activity, students demonstrated having developed a pictorial and algebraic understanding of APs, successfully solving complex problems. The didactic experience proved to be a success, considering the students' positive perception and the articulation of diverse contents developed and executed successfully.
Keywords: Arithmetic Progression; History of Math; Manipulative Materials; Problem-solving.

[1] Licenciado em Matemática, Universidade Federal do ABC (UFABC). E-mail: augusto-md@hotmail.com- OCID: https://orcid.org/0000-0003-4952-6073.

1 Introdução

Progressão aritmética é um conteúdo normalmente abordado no Ensino Médio, dando sequência a conteúdos sobre sequências previamente estudados no Ensino Fundamental - Anos Finais, conforme orienta a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018).

> (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (Brasil, p.533, 2018).

É comum, contudo, que tal conteúdo seja apresentado sob a forma de simples fórmulas, sem contexto ou compreensão profunda sobre demais aspectos pertinentes.

Quando é oferecida uma contextualização, ainda, geralmente se faz sob a forma da famosa anedota de Gauss, que exalta sua genialidade o posiciona distante e acima das demais crianças e adultos, refletindo uma visão elitista do saber matemático. Em seguida, o conteúdo é apresentado de maneira abstrata e algébrica, comumente carecendo de visualidade e contexto.

O presente artigo objetiva discutir um projeto didático realizado com turmas do primeiro ano do Ensino Médio. O escopo desta experiência foi articular diferentes abordagens de ensino, visando trazer melhor contextualização e visualidade para um conteúdo tão importante. Avaliou-se os resultados do projeto, considerando sua aplicabilidade e efetividade.

2 Fundamentação Teórica

Na BNCC argumenta que:

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (Brasil, 2018).

Em tais recomendações gerais, destaca-se a importância do uso recorrente de abordagens diversas no ensino da Matemática. As formas de ensino escolhidas para este projeto didático foram: (i) Materiais Manipulativos; (ii) História da Matemática; (iii) Resolução de Problemas. Podemos ainda fundamentar a justificativa para a escolha destas abordagens além da BNCC, já que as mesmas são estudadas há décadas em extensivas pesquisas sobre o ensino.

Desde pesquisas brasileiras como as de Miguel (1997), a História da Matemática é apontada como capaz de desmistificar a disciplina e torná-la mais acessível aos alunos. Ao mesmo tempo, fornece contexto social mais amplo, fundamentando a importância do conhecimento matemático.

Em relação ao conteúdo específico abordado neste estudo, é comum que professores apresentem a anedota de Gauss para introduzir historicamente o conteúdo: diz-se que ele teria, quando criança, recebido a instrução de somar todos os números de 1 a 100, como uma tarefa para tomar-lhe tempo. Contudo, ele teria resolvido em alguns minutos apenas, já que notara que a soma de 1 e 100, 2 e 99 e assim por diante são todos iguais a 101, aplicando a ideia básica por trás da fórmula da progressão aritmética.

Tal história, no entanto, não condiz com as sugestões dos autores acerca das aplicações da História da Matemática em sala-de-aula: a História serviria, conforme Saito (2013) e Miguel (1997), como um artifício capaz de recriar os esforços exaustivos de gerações de Matemáticos, evidenciando seus erros, dificuldades e conflitos. Este tipo de contextualização ajudaria os alunos a se identificarem com o processo, por vezes árduo, do saber matemático, vislumbrando como erros e dificuldades sempre foram lugar comum aos matemáticos de todas as épocas. É exatamente o oposto do que a anedota de Gauss transmite, uma vez que esta sugere a visão elitista de que a matemática somente pode ser feita por gênios - por crianças superdotadas que inventam novas formas de calcular, enfatizando a diferença delas para os nossos alunos, reles mortais.

O uso da história é de exímia importância para o presente artigo, uma vez que traz o intuito de romper com esta forma comum de apresentar a progressão aritmética, trazendo uma contextualização mais ampla acerca do estudo de sequências. Com este intuito, almeja-se permitir aos alunos vislumbrar diferentes formas de se entender as sequências, compreendendo tacitamente sobre diferentes representações usadas na história.

Outra abordagem respaldada por pesquisas recentes, como as de Brown *et al.* (2014), é a Resolução de Problemas. Conforme sugerido, a exposição do conteúdo em diferentes contextos é benéfica para o aprendizado, motivo pelo qual a contextualização foi incorporada tanto em problemas reais quanto na História da Matemática. Segundo Brown, a verdadeira aprendizagem ocorre quando os alunos são desafiados a recordar e aplicar o conteúdo em contextos diversos, por isso focou-se em transformar o material abstrato da sala de aula em problemas reais com objetos tangíveis.

A apresentação de problemas desempenha um papel crucial no desenvolvimento da confiança e autoestima dos alunos, conforme argumentado por Onuchic e Allevato (2011), pois os desafios enfrentados instigam uma compreensão mais profunda do conteúdo. Brown (2014) destaca que a aquisição de conhecimento deve exigir esforço, pois é o que é trabalhoso para a mente construir e organizar que será lembrado com mais facilidade no futuro. Portanto, a resolução de problemas matemáticos, aliada a outras abordagens mencionadas, supostamente promove um aprendizado mais efetivo.

Ainda conforme Brown et al. (2014), a prática de ensino da Matemática frequentemente contraria os avanços atuais na ciência da aprendizagem. É comum que cada conceito seja fragmentado e apresentado de forma isolada, repetindo-se até que seja "memorizado", momento em que se avança para o próximo tópico. No entanto, a evidência científica atual sugere que uma abordagem mais eficaz seria ensinar conceitos relacionados simultaneamente, pois o contexto e a variedade de estímulos favorecem a retenção da informação - abordagem oposta à tradicional.

Essa perspectiva constitui uma forte justificativa para o ensino contextualizado, no qual o conhecimento é integrado em situações reais de aplicação, aumentando assim sua retenção na mente do estudante. Além disso, a contextualização histórica da Matemática não apenas facilita o aprendizado dessa disciplina, mas também enriquece a compreensão da própria História, alinhado com as diretrizes da BNCC.

A escolha pela utilização de materiais concretos, por sua vez, seguiu as diretrizes propostas por Lorenzato (2006), que defende os benefícios lúdicos e estimulantes desses recursos. Especialmente tratando-se de alunos do Ensino Médio, etapa na qual é costumeiro que tais materiais sejam descartados como possibilidade didática, seu uso teve como intenção resgatar o pensamento concreto em suas capacidades lúdicas. Pode-se assim colher seus benefícios, uma vez que conforme Lorenzato (2006), seu apelo transcende a faixa etária.

O uso de materiais concretos para o estudo ainda é destacada por Roque (2012) e Heath (1921) como uma prática comum ao longo de muitos séculos entre os matemáticos. Desta maneira, a atividade descrita proporcionou também aos estudantes uma imersão na prática antiga da Matemática, permitindo-lhes vivenciar em primeira mão a relação entre o conhecimento formal e suas aplicações práticas.

Podemos ainda comparar tal abordagem com teorias tradicionais sobre aprendizagem. Ausubel (2003), por exemplo, enfatizava a importância da ativação do conhecimento prévio para conectar novos aprendizados. Ele argumentava que a aprendizagem significativa depende da conexão com conhecimentos pré-existentes, uma ideia corroborada pelas pesquisas examinadas por Brown (2014). Nesse contexto, o presente projeto utilizou uma variedade de conhecimentos prévios dos alunos para fundamentar o estudo, incorporando conceitos sobre sequências anteriormente estudados no Ensino Fundamental.

Por fim, ressalta-se alguns trabalhos antecedentes que se propuseram articular a história dos números figurados com a progressão aritmética. Chiconello (2013) já apresenta os últimos como úteis para o estudo de sequências, enquanto Yassunaga e Bortoli (2024) e Alves e Barros (2019) exploram números figurados através do ambiente digital do GeoGebra. Masseno e Pereira (2020), por sua vez, propõe uma atividade para encontrar o padrão dos termos dos números triangulares. Tais abordagens, contudo, mencionam história apenas de maneira breve, ou não a mencionam. Adicionalmente, jamais alcançam a fórmula da PA. Tais antecedentes, portanto, não articulam todas as diferentes abordagens trabalhadas no presente projeto, bem como não conectam números figurados com a progressão aritmética, que é um tópico central do Ensino Médio.

3 Proposta Didática

O projeto constituiu de uma série de atividades implementadas em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, em uma instituição privada em São Paulo. A turma era composta por 22 alunos, com idade média de aproximadamente 16 anos. Essas atividades foram distribuídas ao longo de quatro aulas de 50 min, durante uma semana. O Quadro 1 ilustra esta distribuição.

Quadro 1: Planejamento do projeto didático.

Aula	Objetivo	Metodologia e Recursos
1.Introdução: História da Matemática	Discutir o que os alunos lembram sobre História da Matemática, especificamente dos Pitagóricos, descrevendo sua relevância histórica na Grécia Antiga	Exposição dialogada
2. Números triangulares, quadrados e oblongos	Compreender visualmente números triangulares, quadrados e oblongos, explorando como tais sequências funcionam	Material manipulável: 500 fichas coloridas
3. Visualizando a Fórmula dos Números Triangulares	Deduzir fórmulas para números triangulares usando números figurados	Material manipulável: 500 fichas coloridas
4. Visualizando a Fórmula da PA	Mostrar algebricamente equivalências entre fórmulas até atingir a mais simples, por fim a explicando visualmente	Resolução e investigação em grupo
5. Problemas Avaliativos	Avaliar a compreensão dos estudantes através de problemas de aplicação da PA	Resolução em Grupo

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

O itinerário foi escolhido segundo os conceitos necessários para se deduzir a fórmula da soma da progressão aritmética usando números figurados, tomando cada passo como base para o seguinte. Para alcançar tal objetivo, se faz necessário saber sobre números triangulares; e para entender e deduzir a fórmula destes últimos é indispensável saber sobre números quadrados ou oblongos. A história permeia todos estes conceitos, uma vez que eram estudados profusamente pelos Pitagóricos. Ofereceu-se uma introdução histórica na primeira aula, sendo que nas aulas de Matemática subsequentes intercalou-se conexões históricas aos conteúdos matemáticos, evitando a apresentação da História como um mero adendo ao contextualizá-la a cada situação.

3.1 Introdução: História da Matemática

Utilizou-se *slides* interativos para discutir com os alunos os conteúdos históricos, podendo assim ilustrar o que se estava sendo conversado. Tratando-se dos Pitagóricos, utilizou-se um itinerário histórico baseado em outro artigo deste periódico (Mendes; Yamamoto, 2022), em cujo texto os autores descrevem em detalhes a história desta doutrina, conforme ensinado em uma aula do nono ano sobre Teorema de Pitágoras.

Dado que tal conteúdo se encontra disponível nesta outra publicação, este artigo contará apenas com um breve resumo deste aporte histórico, adicionando conteúdos novos pertinentes a estas aulas de sequências. Sugere-se que o leitor interessado consulte este outro artigo, uma vez que tais detalhes fornecidos aos estudantes são importantes para uma devida contextualização da atividade em sala-de-aula. A seguir, sucintas informações históricas serão aqui oferecidas para auxiliar o leitor a compreender como a Matemática se situa no contexto pitagórico.

De acordo com Roque (2012), existiu uma seita religiosa e filosófica importante na Grécia conhecida como "Os Pitagóricos". Alega-se que tal grupo teria sido criado por um homem chamado Pitágoras, cuja vida é envolta em mistério. Hoje não se pode ter certeza sequer que o mesmo existiu, uma vez que os relatos contemporâneos se referem todos ao grupo, e não ao líder.

Conforme explicado por Mendes e Yamamoto (2022), os estudos pitagóricos abarcavam muito mais do que a matemática pela qual são conhecidos: desenvolveram filosofias, religiões e estilos de vida distintos do comum na época, tendo uma boa dose de independência intelectual.

Procurou-se executar tal contextualização não somente como uma "nota de rodapé" ou "curiosidade", mas sim como uma reflexão séria acerca das funções históricas de tais filósofos. Para tanto, buscou-se manter uma conversa com os alunos em que se exercitassem seus conhecimentos prévios sobre História Antiga.

É notório, por exemplo, como a Grécia Antiga é um tópico importante no Ensino Fundamental - Anos Finais, como enfatizado pela BNCC: “(EF06HI10) Explicar a formação da Grécia Antiga, com ênfase na formação da pólis e nas transformações políticas, sociais e culturais” (Brasil, 2018). Tal habilidade, contudo, é dita como pertencente somente ao Sexto Ano do Ensino Fundamental. Não há qualquer menção à Grécia Antiga após esta etapa, nem no Ensino Fundamental, nem posteriormente. Tal fato torna mais estratégico a revisão e debate deste conteúdo com alunos do Ensino Médio, sendo possível discutir tais conhecimentos à luz de todos os demais saberes históricos adquiridos ao longo dos anos.

Desta forma, conversou-se com os alunos sobre o que eles lembraram da Grécia Antiga e como esta se situava no fluxo da história. Como era a política desta época? Era uma democracia como o Brasil de hoje? Era um país unido ou de governo fragmentado? Qual liberdade que um grupo como o dos Pitagóricos teria para ter ideias diferentes do comum?

Tal discussão teve como alicerce os relatos de Roque (2012), focados em Matemática, bem como os de Lefèvre (2013). Procurou-se enfatizar aos estudantes como os matemáticos eram também cidadãos, muitos dos quais se envolviam em áreas hoje rotuladas de humanidades: eram políticos, filósofos, comerciantes etc. Os Pitagóricos são um ótimo exemplo desta polimatia, e por isto servem como eixo central da conexão entre a Matemática e a sociedade.

Tomando o cuidado de contextualizar historicamente cada conceito, adentrou-se uma representação matemática fundamental para os Pitagóricos: os números figurados. Conforme a Figura 1, tratam-se de pedrinhas colocadas em sequência para representar um número, conceito ou estudar propriedades. Segundo Roque (2012), tal "aritmética de pedrinhas" era o cerne do estudo matemático pitagórico, e não a geometria pela qual é conhecido o famoso Teorema de Pitágoras.

Figura 1: Exemplos de números figurados.

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

O primeiro e segundo número figurado da figura anterior são de importância especial para os pitagóricos, sendo igualmente elementares para as aulas de sequências aqui relatadas. São exemplos da classe de números triangulares e quadrados, respectivamente, assim alcunhados por descreverem tais formas com o posicionamento das pedrinhas. Tais números possuíam importância filosófica, religiosa e cultural para os Pitagóricos, com o número triangular de 10 pedrinhas sendo inclusive usado como símbolo da escola pitagórica. Uma vez adicionadas contextualizações históricas análogas às fornecidas por Mendes e Yamamoto (2022), passou-se à aula seguinte em que os alunos trabalhariam com os números figurados de maneira concreta.

3.2 Números triangulares, quadrados e oblongos

Projetou-se na lousa questões relacionadas aos números triangulares, sendo como orientação. Elas foram investigadas pelos alunos em grupos de quatro ou cinco. A seguinte imagem foi fornecida.

Figura 2: Os primeiros três números figurados.

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

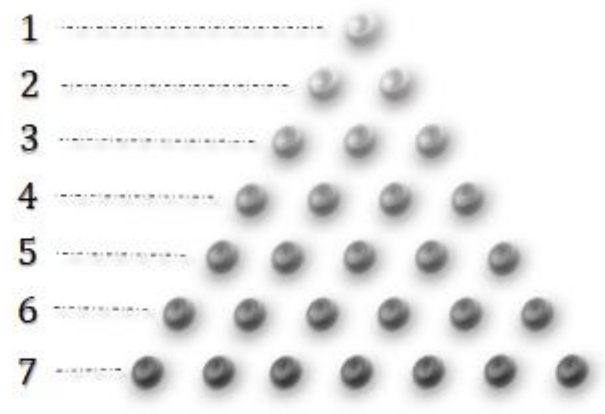
As questões orientaram os alunos na montagem da sequência dos cinco primeiros números triangulares utilizando fichas coloridas. O material físico lhes permitiu alterar livremente as formas construídas, concretizando seus pensamentos de maneira mais eficaz. As fichas foram utilizadas com entusiasmo, uma vez que fazia muitos anos desde que haviam tido uma aula de Matemática com materiais didáticos diferenciados.

Os problemas propostos deveriam ser resolvidos no caderno, acompanhados de um esboço das figuras, sempre que possível. Eram eles:

1. Na sequência construída, quanto aumenta de um triângulo para o outro?
2. Qual, então, é o padrão que rege o aumento entre os números triangulares?
3. Quantas fichas a mais terá o sexto triângulo em relação ao quinto?
4. Quantas a mais terá o 19º número triangular em relação ao 18º?

Somente um grupo não conseguiu resolver as questões dentro dos 15 min fornecidos. Discutiu-se então em plenária os resultados obtidos - alunos de cada grupo explicaram seu raciocínio com as próprias palavras, complementando um ao outro. O docente, a seguir, resumiu na lousa a conclusão obtida. "Para obter o segundo número triangular, quanto adiciono em relação ao primeiro? E para obter o terceiro? E o quarto?". Os alunos responderam em uníssono. Criou-se um diagrama como o representado na figura a seguir.

Figura 3: Montagem sucessiva de um número triangular, com adição de cada linha abaixo.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Deduziu-se que a sequência adiciona, a cada termo, o número natural seguinte. A seguir, conversou-se com a sala sobre outras funções e interpretações de tais números, como as citadas por Mendes e Yamamoto (2022): Aristóteles interpretava, por exemplo, o anteriormente referido quarto número triangular como representação das três dimensões. Tais figuras, portanto, carregavam representações metafísicas além do estritamente matemático.

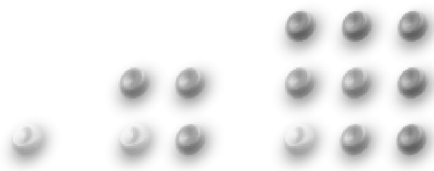
Procurou-se contextualizar, inclusive, com os números figurados que podem ser vistos no dia-a-dia. "Frutas na feira", "janelas em um prédio" e "barras de chocolate" foram exemplos fornecidos pelos alunos. Conectando com outras disciplinas, discutimos brevemente como os números figurados se fazem presentes em um modelo de molécula que se encontrava na sala.

Figura 4: Laranjas organizadas em uma feira, exemplificando números figurados.

Fonte: Disponível gratuitamente em https://pt.vecteezy.com/foto/1990287-laranja-fruta-pilha.

Munidos novamente das fichas, o passo a seguir foi estudar a sequência dos números quadrados a partir de problemas análogos. Conforme ilustrado na Figura 5, ofereceu-se aos alunos os primeiros três termos da sequência dos números quadrados, a seguir norteando sua investigação com questões problema.

Figura 5: Três primeiros termos da sequência dos números quadrados.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

1. Quanto aumenta de um quadrado para o outro?
2. Qual, então, é o padrão que rege o aumento entre os números quadrados? Como se chama o conjunto dos números composto pela diferença entre quadrados consecutivos?
3. Quantas fichas a mais terá o sétimo quadrado em relação ao sexto?
4. Quantas a mais terá o 28º número quadrado em relação ao 27º?

Uma vez que já tinham resolvido para os triângulos, os grupos não tiveram dificuldade em resolver a maioria das questões para números quadrados. Notar e nomear o conjunto descoberto na questão 2 (os números ímpares), no entanto, exigiu um pouco mais de criatividade, já que não é tão imediato como no caso dos triângulos. Um dos grupos precisou de uma dica já que não conseguiam verbalizar o que tinham percebido.

Figura 6: Números quadrados construídos por alunos.

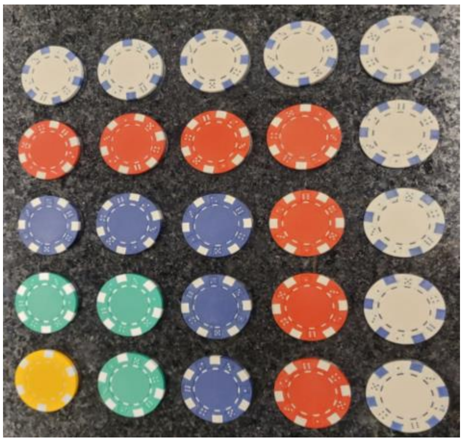
Fonte: fotografado pelo autor (2024).

Mais uma vez conectando de imediato com a História, apresentou-se uma breve explicação da importância desta sequência: foi a partir dela que se derivou o famoso Teorema de Pitágoras!

Conforme esclarecido por Mendes e Yamamoto (2022), cada termo da sequência visual de números ímpares (a figura em L que resta da subtração de quadrados consecutivos) era chamada pelos Pitagóricos de gnômon. No caso do Teorema de Pitágoras, dois quadrados figurados somados resultam num terceiro. Assim sendo, o quadrado de número menor precisa tornar-se um ou mais gnômons que se encaixem no segundo, formando o terceiro elemento da trinca pitagórica.

Ainda seguindo Mendes e Yamamoto (2022), conversou-se com os estudantes sobre a origem da palavra gnômon e seu uso na astronomia. A seguir, notamos sobre a forma pela qual os gnômons consecutivos - que são números ímpares - formam juntos um número quadrado quando unidos desde o primeiro. É uma forma visual de explicar, por exemplo, o porquê de $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, como ilustrado pela figura a seguir.

Figura 7: Gnômons de lado 1 a 5 unidos formando o número quadrado de 25 fichas.



Fonte: fotografado pelo autor (2024).

Generalizou-se com os alunos até alcançar a identidade:

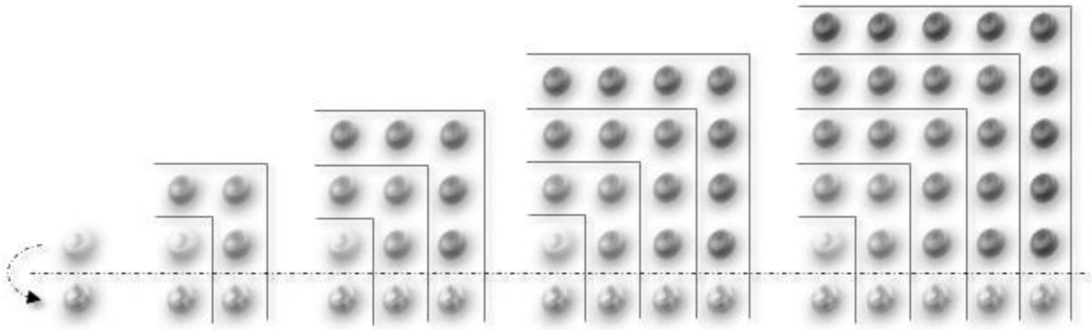
$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 \quad = n^2$$

Tal fórmula expressa que se adicionarmos os n primeiros números ímpares, obtemos como resultado n^2. O motivo disso ficou evidente aos alunos através da atividade realizada com as fichas, somente depois pensando-se na transposição para linguagem algébrica.

Para encerrar a aula, uma última questão foi fornecida: se a soma dos primeiros n números ímpares é n^2, então quanto seria a soma dos primeiros n números pares? Os alunos foram orientados a usar um raciocínio visual similar para resolver a questão. Como dica, pediu-se aos alunos que simplesmente alterassem um pouco a figura montada referente aos ímpares (Figura 7).

Após alguns grupos chegarem à resposta, pediu-se que tentassem generalizar algebricamente assim como fizemos com a soma dos ímpares. Discutimos, então, a representação visual obtida (Figura 8) e seu significado histórico.

Figura 8: Sequência dos primeiros números oblongos obtida a partir dos números quadrados.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Sabemos que os gnômons são números ímpares. Portanto, se adicionarmos uma ficha extra a um dos braços do gnômon, obteremos números pares. Basta agora somar estes "gnômons pares", e obteremos a soma dos primeiros n números pares. Ao observar as construções nota-se que formam retângulos, sendo que um lado é maior do que o outro por uma unidade.

Assim, a soma dos dois primeiros números pares é dada por $2 \times 3 = 6$, dos três primeiros, $3 \times 4 = 12$ e assim por diante. A soma dos cinco primeiros números pares será, então:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 5 \times 6 = 30$$

De forma geral, concluímos que a soma dos n primeiros números pares é:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n \times (n + 1)$$

Pois tal operação é feita multiplicando o lado do número quadrado por um lado com uma ficha a mais.

Segundo Heath (1921), este tipo de número era chamado de "número oblongo". Números retangulares quaisquer eram chamados de "alongados", mas quando são formados por uma sequência de números pares, ficando com um lado uma unidade maior que o outro, são especialmente chamados de "oblongos".

O antagonismo entre quadrado e oblongo, atado à ideia de par e ímpar, figuram dentro da famosa tabela de opostos pitagórica conforme descrita por Roque (2012). Para a doutrina, a dualidade era um fator de suma importância, representada primariamente pelo contraste entre o par e o ímpar, decorrente da cosmogonia do Um. A tabela de opostos se dá como se segue:

Figura 9: Tabela pitagórica de opostos.

Um	Inúmeros
Ímpar	Par
Quadrado	Oblongo
Limitado	Ilimitado
Reto	Curvo
Luz	Escuridão
Macho	Fêmea
Bom	Mau

Fonte: Roque (2012).

Em concordância com o detalhado na primeira aula sobre o cosmos pitagórico, tal seita acreditava que o Um seria a origem de todo o Universo, um ser bissexuado a partir do qual se originou tudo que existe. O Um não é um número, pois a palavra "número" implicaria pluralidade. Portanto, o Um é definido como oposto do plural - conceito em evidente contraste com as concepções atuais de número conhecidas pelos alunos. O ímpar e o par tratam de outro aspecto desta dicotomia, sendo o primeiro prontamente relacionado à unidade e o par à abundância.

Conforme estudado, números quadrados são formados por uma sequência de ímpares, e os oblongos por uma sequência de pares. Logo, "quadrado" fica do lado do "ímpar" e "oblongo" do lado do "par". "Limitado", "luz", "reto" e "bom" se referem a coisas previsíveis pelo intelecto humano. Os números quadrados, por exemplo, possuem sempre a mesma forma. Enquanto isso, "ilimitado" parece condizer com a denominação de "oblongo", que são formas cada qual com uma razão distinta entre os lados $(1{:}2\,;\ 2{:}3\,;\ 3{:}4\,;\ 4{:}5\ \cdots)$. "Escuridão", "curvo" e "mau" se referem similarmente a conceitos indefinidos ou de difícil compreensão. A presença da mulher do lado "negativo" da tabela condiz com o poder de influência da mulher na sociedade grega antiga, que era ínfimo e geralmente distante de produções intelectuais. Tudo aquilo que é ditado pela razão, conforme a seita pitagórica, seria superior ao indefinido ou relativo.

3.3 Visualizando a Fórmula dos Números Triangulares

A pergunta norteadora desta aula era simples, porém significativa: como podemos saber rapidamente quantas fichas tem um número triangular se sabemos o seu lado? Por exemplo, como saber quantas fichas tem o triângulo de lado 107? Os alunos já sabiam que no caso do quadrado era só multiplicar um lado pelo outro, mas este caso não é tão direto. Construir um triângulo de lado 107 também está fora de questão.

O primeiro problema da aula era bem direto: requisitava que os alunos pensassem em uma maneira de realizar esta contagem rápida. Não era esperado que conseguissem de imediato, portanto dicas foram oferecidas a cada cinco minutos. Foram elas: (i) Quando não sabemos como resolver um problema, pode ser uma boa ideia reduzi-lo a um outro problema que saibamos resolver. Lembre-se do estudado na aula anterior; (ii) É difícil contar um triângulo diretamente pois não temos diretamente uma fórmula prática para a contagem. Mas se observarmos o número quadrado ou o oblongo, podemos calcular o número de pedrinhas multiplicando seus lados. É possível usá-los para contar o triângulo? (iii) Tente juntar triângulos para formar retângulos ou quadrados, realizando a contagem a partir disso.

A partir da segunda dica, alguns grupos conseguiram de fato encontrar o método, enquanto um deles necessitou da dica final. A figura a seguir ilustra o raciocínio necessário:

Figura 10: Número quadrado (esquerda) e número oblongo (direita) divididos em dois triângulos.

Fonte: fotografado pelo autor (2024).

Todo número quadrado pode ser dividido em dois números triangulares consecutivos. Além disso, todo número oblongo consiste de dois números triangulares iguais. Esta informação guia o caminho para encontrar a soma das fichas que compõem um número triangular qualquer.

A conclusão que se deve chegar é que, para achar o número de objetos em um número triangular, basta encontrar a metade do número oblongo correspondente. Em vista disso, se queremos o número de objetos do oitavo número triangular, basta fazer 8×9, encontrando o número oblongo. Em seguida, divida-o por dois, obtendo 36. A resposta para o 107, deste modo, será $107 \times 108\ \div 2 = 5\,778$.

É importante relacionarmos isto com a formação dos números triangulares. Se o número triangular de lado n é formado por $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$ e esta soma é igual a $n(n+1)/2$, temos imediatamente que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para fixar rapidamente a aplicação do que havia sido descoberto, ofereceu-se alguns exercícios e problemas aos estudantes:

1. Quantas fichas terá o triângulo de lado: (a) 109? (b) 5003? (c) 80020?
2. Os números triangulares são 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91… Podemos notar que a soma de dois números triangulares consecutivos é sempre um número quadrado. Explique o motivo disto acontecer.
3. É verdade que a soma de oito vezes um número triangular mais uma unidade é sempre um número quadrado? Explique.

As últimas duas questões requeriam novamente um raciocínio visual, para a resolução das quais as fichas se mostraram bem úteis. Tais propriedades haviam sido mencionadas pelos pitagóricos desde a antiguidade, conforme Roque (2012) e Heath, e sua compreensão requer simplesmente o reposicionamento espacial de triângulos, assim como foi feito desde o início desta aula. Após relembrar os grupos deste método, a maioria conseguiu resolver os problemas sem grandes dificuldades, requerendo apenas uma boa dose de esforço, conforme planejado.

3.4 Visualizando a Fórmula da PA

Nesta penúltima aula demos os últimos passos em direção à fórmula geral da PA. Munidos novamente das fichas, os alunos receberam os seguintes problemas:

> Sabemos como contar sequências iniciadas em 1, modelando-as como números triangulares. Mas como fazer se não iniciam em 1?

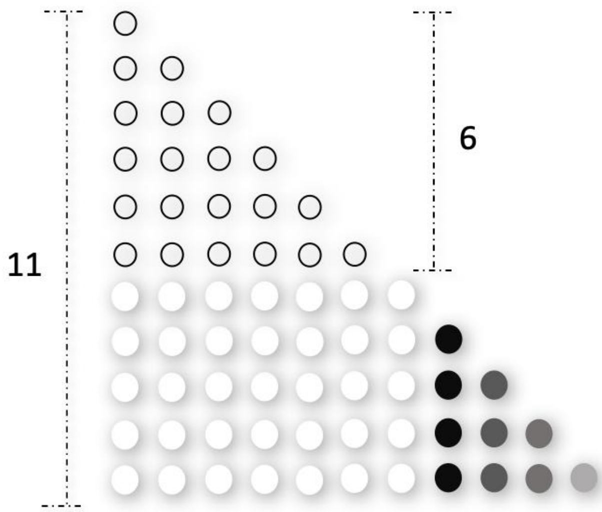
1. Represente como parte de um número triangular:
   (a) 3+4+5+6+7+8 (b) 11+12+13+14+15
2. Refletindo sobre as construções figuradas anteriores, descreva uma forma de se calcular rapidamente a soma uma sequência qualquer de números consecutivos. Escreva uma fórmula para o cálculo.

Dica: uma possibilidade é pensar na sequência como parte de um triângulo figurado.

3. Mostre que sua fórmula funciona para os casos apresentados em (a).
4. Calcule $101 + 102 + 103 + 104 + \cdots + 205 + 206$.

Como na Figura 11, uma das soluções possíveis é separar a figura em um retângulo (em branco) e um triângulo (degradê), calculando ambos separadamente. Outra, que será analisada neste artigo, seria pensar na forma como uma subtração de dois triângulos figurados (na Figura 10, subtrai-se o triângulo de lado 6 do de lado 11). Os alunos conseguiram chegar nestas respostas com êxito.

Figura 11: Soma da sequência de 7 até 11 em representação figurada - Abordagem I.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Seja o lado do triângulo menor l e o do maior L. Uma expressão para tal subtração seria:

$$\frac{L \times (L+1)}{2} - \frac{l \times (l+1)}{2}$$

Simplificando:

$$\frac{L^2 - l^2 + L - l}{2} = \frac{(L+l)(L-l) + (L-l)}{2} = \frac{(L-l)(L+l+1)}{2}$$

Considerando o termo inicial como a_1, o final como a_n e o número de termos como n, podemos escrever as equivalências:

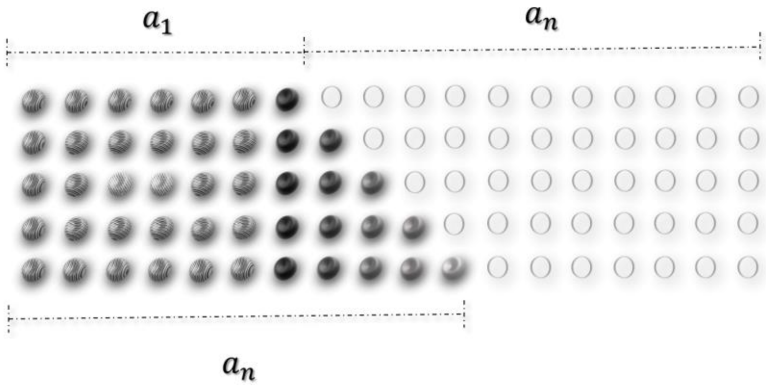
$$a_1 = l + 1 \qquad\qquad a_n = L$$

$$n = L - l \qquad\qquad \frac{(L-l)(L+l+1)}{2} = \frac{(a_1 + a_n)}{2}n$$

Assim alcançamos com os alunos a fórmula mais difundida para a soma dos termos de uma PA. Contudo, fica o questionamento: será que não existe um jeito mais simples de se chegar nessa fórmula? Não deve ser possível visualizá-la figuradamente?

Para finalizar esta discussão, olhamos novamente para a forma das fichas: elas na verdade compõem um trapézio figurado. Conforme dita a fórmula da PA, se adicionássemos a_1 e a_n como uma linha horizontal e a multiplicarmos n vezes, obteremos uma duplicação do trapézio que se encaixa perfeitamente na figura original, formando um retângulo (Figura 12). Ou seja, para calcular o número de bolinhas da figura original, basta dividir esse retângulo em dois, assim como se faz na fórmula. Desta maneira, está justificada a representação algébrica.

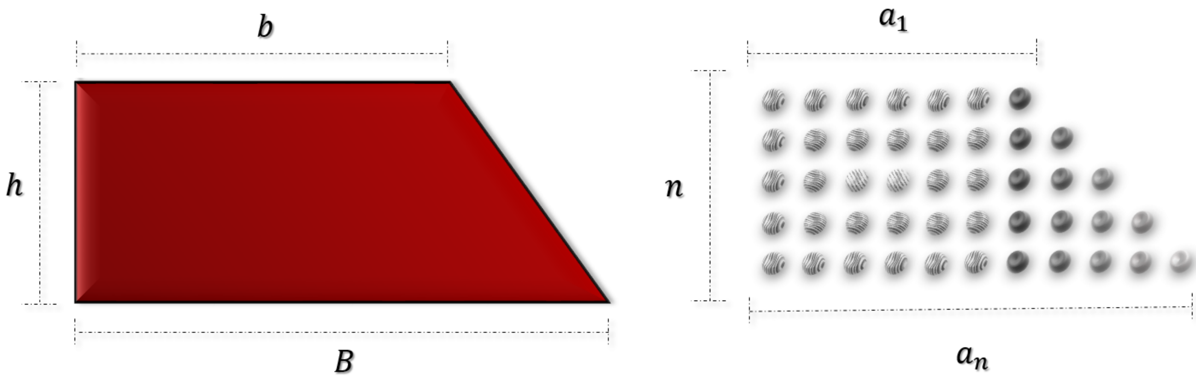
Figura 12: Soma da sequência de 7 até 11 em representação figurada - Abordagem II.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Para encerrar, olhamos para a fórmula novamente. Sua aparência certamente remetia a uma fórmula muito conhecida dos alunos! Um dos alunos se lembrou: é a fórmula da área do trapézio. Afinal, de fato, nesta atividade se está calculando o número de bolinhas em um trapézio figurado, a aí está a origem de tal semelhança.

Figura 13: Comparação entre o trapézio e a PA.



Fonte: elaborado pelo autor (2024).

$$\frac{(b+B)}{2}h = \frac{(a_1+a_n)}{2}n$$

Por fim, uma pergunta válida dentro do estudo das sequências é: e se a razão for diferente de 1? Por que a fórmula ainda funciona? Por exemplo, para $3+6+9+12+15$, teríamos figuradamente:

Figura 14: Soma de uma sequência de razão 3.

Fonte: elaborado pelo autor (2024).

Conforme o mesmo procedimento figurado, na fórmula, apenas estaríamos duplicando esta figura e encaixando-a nela mesma. Por isso, a fórmula ainda calcula o número de bolinhas com sucesso.

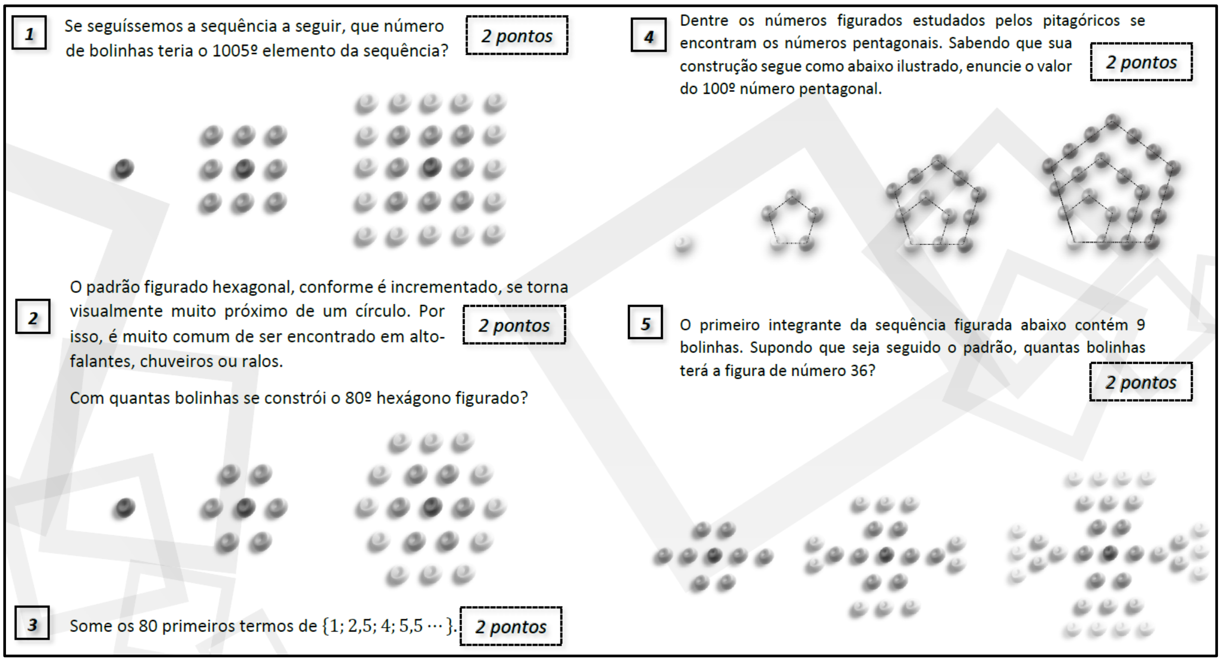
Ressaltou-se como, historicamente, não haviam fórmulas algébricas na época dos pitagóricos: todo o estudo em torno das sequências era feito usando os próprios números figurados, sendo as propriedades visualmente evidentes. Conforme Roque (2012), a álgebra foi invenção dos árabes inúmeros séculos depois. O uso articulado de diversas representações é algo que somos capazes de fazer hoje graças aos esforços conjuntos de diversos povos através de muitos milênios.

3.5 Problemas Avaliativos

Encerrou-se a aula anterior alcançando e visualizando a fórmula da PA. Nesta aula final, mais problemas de aplicação deste conhecimento foram trabalhados, com o objetivo de ilustrar aplicações e o funcionamento das progressões aritméticas e avaliar o aprendizado.

Os alunos foram divididos em grupos e trabalharam conjuntamente sobre o seguinte conjunto de problemas, entregue a eles em papel:

Figura 15: Conjunto de problemas avaliativos.



Fonte: elaborado pelo autor (2024)

O professor passeou constantemente pela sala para verificar o progresso dos alunos na atividade. Os estudantes faziam todo tipo de rabisco sobre as figuras, dividindo-as em figuras mais simples para que pudessem ser contadas nos moldes do realizado anteriormente. Suas discussões se centravam nas conjecturas sobre como dividir apropriadamente as figuras para a contagem.

Por vezes, alguns alunos se perdiam nas contagens: no problema 2, por exemplo, os números triangulares que compõem o hexágono só aparecem a partir do segundo termo. Desta maneira, o terceiro termo terá seis números triangulares de lado 2, o quarto terá números triangulares de lado 3 e assim por diante - nota-se a necessidade de subtrair um do termo para se obter o lado do triângulo, o que pode ser um tanto confuso na hora de realizar os cálculos. No entanto, este tipo de dificuldade é comum neste conteúdo matemático, uma vez que para se calcular um termo qualquer da PA é necessário fazer a razão vezes o número de termos menos um, o que gera confusões recorrentes para muitos estudantes.

No entanto, muitas das respostas eram de notável criatividade, uma vez que cada problema figurado possui inúmeras formas de resolução. Abaixo se encontra um registro de algumas das respostas obtidas.

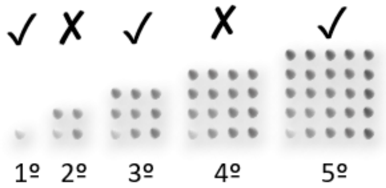
revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Figura 16: Registro de algumas respostas obtidas.

Respostas

1) Pela sequência dos números quadrados:

É a sequência dos números quadrados de lado ímpar. Isto é, se tomarmos a sequência completa dos números quadrados, devemos retirar os quadrados de lados pares.

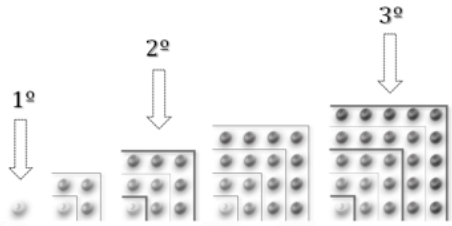


Para chegar aos outros ímpares, pulamos de 2 e 2 a partir do 1º. Portanto, para chegar ao 1005º quadrado de lado ímpar, fazemos $1 + 1004 \times 2$. Ou seja, damos 1004 passos de 2 adiante na sequência de quadrados. O ímpar alcançado é 2009.

A resposta é, portanto, $2009^2 = 4\ 036\ 081$.

Pela formação de quadrados a partir de ímpares:

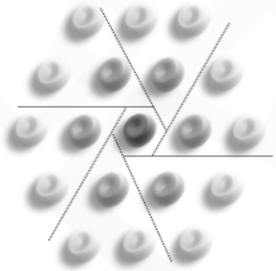
Se realocássemos o ponto inicial no canto inferior esquerdo veríamos que são adicionados dois ímpares a cada incremento na sequência. Como resultado, o 1005º termo recebeu a adição de 1004×2 números ímpares ao ponto preto inicial. Logo, será o quadrado de lado 2009, com 2009^2 bolinhas.



2) Os números hexagonais centrados crescem conforme os seis números triangulares que os compõe. O de número 80 terá 6 números triangulares de lado 79 acoplados ao ponto central.

O total de elementos de um número triangular de lado n pode ser calculado como $\frac{n(n+1)}{2}$, logo o total da 80ª figura é: $\frac{79 \times 80}{2} \times 6 + 1$.

O resultado é 18961.



3) O 80º termo é $1 + 79 \times 1{,}5 = 119{,}5$, o que faz a soma dos primeiros 80 termos ser $\frac{(1+119{,}5)80}{2} = 4820$.

Fonte: elaborado pelo autor (2024)

A maioria dos grupos recebeu uma pontuação acima de 8 nesta atividade, com um grupo acertando todas as questões e outro ficando com somente 5 pontos. Julgou-se que os alunos foram capazes de desenvolver um bom raciocínio pictórico e um conhecimento efetivo sobre progressões aritméticas.

4 Conclusão

Os alunos demonstraram bastante entusiasmo em trabalhar com materiais manipulativos, já que é o tipo de oportunidade que praticamente não existe na Matemática do Ensino Médio. Além disso, foram capazes de resolver os problemas oferecidos dentro do limite de tempo esperado, o que mostra que a progressão da dificuldade dos problemas estava adequada.

A história da Matemática, por sua vez, interessou muitos dos alunos que se identificam melhor com a área de humanidades. A conversa sobre as sociedades antigas se estendeu em diversos momentos, uma vez que alguns estudantes completavam o raciocínio e as memórias de outros, por fim alcançando um consenso. Ao final da aula, uma aluna expressou como não sabia que a Matemática tinha este tipo de inserção profunda na sociedade, relatando como a discussão tinha sido profícua.

Percebeu-se durante a atividade matemática, no entanto, certa ansiedade por parte dos alunos em relação a obter uma "fórmula que resolvesse tudo". Muitos destes alunos estavam acostumados a uma matemática de memorização e aplicação de fórmulas, sendo que este tipo de investigação interativa foi uma grande novidade. Para mitigar isto, uma devolutiva recebida foi a de deixar claro para os alunos onde se pretendia chegar desde o início, compreendendo com qual objetivo estávamos realizando cada processo.

A conexão entre diferentes áreas da própria Matemática foi outro objetivo alcançado satisfatoriamente. Os alunos disseram não se lembrar de outro momento recente em que estudaram Matemática complexa visualmente: nos anos anteriores a prática matemática se resumia a fórmulas algébricas. Alguns alunos expressaram comentários positivos em relação a esta prática, uma vez que agora "podiam enxergar as fórmulas". Considerando que a abordagem do mesmo conceito sob a roupagem de diferentes representações matemáticas é recomendada pela BNCC (2018), conclui-se que se obteve sucesso também neste quesito.

Por fim, este artigo teve também como escopo apresentar a demais docentes do Ensino Médio uma possibilidade de abordagem de progressão aritmética mais integrada historicamente, se abstendo de anedotas elitistas como a da infância de Gauss. A relação entre a progressão aritmética e a fórmula do trapézio é outra conexão entre diferentes áreas da Matemática que não é muito difundida, sendo que esta representação figurada almejava tornar palpável tal correlação. O autor espera que a presente experiência possa incentivar outros docentes a também articular diferentes abordagens de ensino para tornar sua sala-de-aula mais rica em conexões, permitindo aos estudantes vislumbrar a importância da Matemática na sociedade e a diversidade das formas de se pensar matematicamente.

Referências

ALVES, F.R.V.; BARROS, F.E. Plane and Space Figurate Numbers: Visualization with the GeoGebra's Help. **Acta Didactica Napocensia**, v.12, n.1, p. 57-74, 2019.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos:** Uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC. 2018. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 05 mar.2024.

BROWN, P. C.; ROEDIGER, H. L.; MCDANIEL M. A., **Make it Stick**. Londres: The Belknap Press of Harvard University Press, 2014.

CHICONELLO, L. A. **Números figurados e as sequências recursivas:** uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados. São Carlos, SP. 2013.

HEATH, T. **History of Greek Mathematics**. Oxford: Dover Publications, 1921.

LEFÈVRE, F. **História do Mundo Grego Antigo**. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2013.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Orgs.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006.

MASSENO, T. C. S.; PEREIRA, A. C. C. O Ensino de Sequências Numéricas por meio dos Números Triangulares utilizando a História da Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 19, p. 103–115, 2020.

MENDES, A. Duarte; YAMAMOTO, F. S. Osiro. Trincas Pitagóricas e Números Figurados: Um Enfoque Histórico para o Ensino do Teorema de Pitágoras. **Revista Paranaense De Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, Brasil, v.11, n.24, p.505-526, jan.-abr. 2022.

MIGUEL, A. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: Argumentos Reforçadores e Questionadores. **Zetetiké**, v. 5, n. 8, 1997.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, v. 25, n. 41, 2011.

ROQUE, T. **História da Matemática**. 3ª Reimpressão. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

SAITO, F. Interface entre História da Matemática e Ensino: uma Atividade Desenvolvida com Base num Documento do Século XVI. **Ciência & Educação**, v. 19, n.1, p. 89-111, 2013.

YASSUNAGA, E. J. I., & BORTOLI, A. de. GeoGebra-Ferramenta para Explorar Atividades Históricas sobre Números Figurados desde sua Representação Geométrica. **TANGRAM - Revista De Educação Matemática**, v.7, n.4, p. 92–111, 2024.