

O cálculo do Máximo Divisor Comum e do Mínimo Múltiplo Comum por meio da decomposição separada dos números e seleção simultânea dos fatores primos

DOI: <https://doi.org/10.33871/rpem.2025.14.33.9176>

Manuel Panzo Muluta¹
Zeca Catuco André Quimuanga²

Resumo: Este artigo tem o objetivo de apontar as contribuições da metodologia de ensino do cálculo do máximo divisor comum (m.d.c) e do mínimo múltiplo comum (m.m.c) por meio de uma abordagem aliada à decomposição dos números de forma separada e a seleção dos fatores primos de maneira simultânea sem a necessidade de transformá-los em potências. Optou-se por esta abordagem de ensino porque ela pode privilegiar as habilidades que os alunos já tinham desenvolvidas relativamente a decomposição não simultânea, embora com algumas lacunas, e introduz um procedimento que simplifica muitos aspectos que dificultam os alunos da 7ª classe do Colégio do Senga na Província do Uíge (Angola). As dificuldades em causa centram-se na transformação dos fatores em potências bem como a confusão na seleção da potência ideal para o cálculo do m.d.c ou m.m.c. A pesquisa caracterizada como pedagógica, foi desenvolvida com 36 alunos que frequentavam a 7ª classe na referida instituição, por meio de 3 aulas de forma participante na intenção de gerar o protagonismo na construção de conhecimentos e desenvolvimento das habilidades dos alunos. As análises feitas apontam que a abordagem utilizada contribuiu consideravelmente para o desenvolvimento das habilidades e minimizou as dificuldades dos alunos. Diante disso, espera-se que a proposta apresentada neste artigo sirva de uma ferramenta viável no processo de ensino-aprendizagem do cálculo do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum aos alunos deste nível de ensino.

Palavras-chave: Educação Matemática. Máximo divisor comum. Mínimo múltiplo comum. Prática Pedagógica

The calculation of the greatest common divisor and the least common multiple through separate decomposition of numbers and simultaneous selection of prime divisors

Abstract: This article aims to highlight the contributions of the teaching methodology for calculating the greatest common divisor (g.c.m.) and the least common multiple (l.m.c.) through an approach that combines the concentration of separate numbers and the selection of prime factors simultaneously without the need to transform them into powers. This teaching approach was chosen because it can privilege the skills that students had already dedicated to a non-simultaneous problem, although with some gaps, and introduce a procedure that simplifies many aspects that hinder students in the 7th grade of the Colégio do Senga in the Province of Uíge (Angola). The difficulties in question focus on transforming the factors into powers as well as the confusion in selecting the ideal power for calculating the g.c.m. or l.m.c. The research, characterized as pedagogical, was developed with 36 students who attended the 7th grade of the aforementioned institution, through 3 classes in a participatory manner with the intention of generating protagonism in the construction of knowledge and development of

¹ Mestrando em Ciências da Educação na especialidade de Ensino da Matemática pelo Instituto Superior de Ciências de Educação do Sumbe (ISCED-Sumbe). Docente de Análise Matemática e Matemática Aplicada a Economia no Instituto Superior Privado Nzenzu Estrela do Uíge (ISPNE-Uíge), Angola. E-mail: manuelpanzo42@gmail.com – ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8578-142X>.

² Doutorando pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará (UFPA). Docente do Departamento de Ensino e Investigação de Ciências Exactas do ISCED-Uíge, Angola. E-mail: zecatuco@gmail.com – ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7304-0738>.

students' skills. The analyses performed indicate that the approach used contributed considerably to the development of skills and minimized the students' difficulties. In view of this, it is expected that the proposal presented in this article will serve as a viable tool in the teaching-learning process of the design of the greatest common divisor and least common multiple for students at this level of education.

Keywords: Mathematical Education. Greatest common divisor. Least common multiple. Pedagogical Practice

1 Introdução

A Educação é um processo ativo, variável e contínuo, pois se desenvolve com o homem através da sua existência. A Matemática ocupa um lugar de destaque por sua presença nos mais variados segmentos do saber e por expressar-se praticamente em todos os setores do domínio social.

Quanto ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, Brito *et al.* (2016) afirmam que este sempre foi considerado desafiador, tanto para quem ensina quanto para quem aprende, pois os alunos com menos afinidade à disciplina têm algum preconceito e, muitas vezes, a consideram uma ciência de difícil compreensão, embora saibam da sua importância elementar nos vários setores da vida social. Esta percepção preconceituosa sobre a Matemática, muitas vezes, é transportada para as escolas e têm criado bloqueios na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Para reverter essa situação, evidenciada por várias observações nas aulas de Matemática, é necessário continuar a implementar estratégias, recursos e alternativas de ensino-aprendizagem diversificados, desde a base, tal como Lima (1988) citado por Vale (2013, p. 13) propõe que:

Por mais antigo, tradicional e repisado que seja o assunto que estamos ensinando, convém sempre procurar novos ângulos para focalizá-lo, outras maneiras de abordá-lo, não somente buscando tornar mais atraentes nossas aulas, mas até mesmo para nos dar um pouco mais de entusiasmo, quebrando a monotonia de repetir todos os anos a mesma história.

Portanto, Taxini *et al.* (2012, p. 95) defendem que:

A utilização de diversas metodologias e modalidade didáticas mostra-se como uma estratégia válida e promissora na tentativa de atender as diferenças individuais dos alunos no que se refere à maneira como eles aprendem e se apropriam dos conteúdos abordados.

Dessa forma, deduzimos que, quando os conhecimentos são ensinados de diferentes maneiras ou com estratégias opcionais para a obtenção de determinada solução, além de não restringir os alunos à uma única via de resolução, pode gerar aos mesmos a possibilidade de escolha e de evitar até mesmo bloqueios na compreensão e operacionalização de determinado

assunto.

No contexto angolano, com o ponto 3 do artigo 2 da Lei nº 17/16 de 07 de Outubro, Lei de Bases do Sistema de Educação e Ensino, fica estabelecido que “o processo de ensino-aprendizagem é a base para a construção de conhecimentos sólidos com vista a formação das jovens gerações capazes de responder às exigências sociais” (Lei-nº17/16, 2016, p. 3996). Mas, este processo no âmbito do Colégio do Senga³ tem sido alvo de insucessos devido as várias insuficiências por parte dos alunos no cálculo do máximo divisor comum (m.d.c) e mínimo múltiplo comum (m.m.c) de dois ou mais números naturais. Entre os principais factores que podem estar na base deste insucesso, de acordo a nossa experiência, incluem: (i) O pouco interesse destes na aprendizagem da Matemática; (ii) O preconceito existente nos alunos de que essa ciência seja de difícil compreensão; (iii) A inexistência de uma metodologia alternativa voltada ao cálculo do m.d.c. e m.m.c que visa despertar o interesse dos alunos; entre outras.

Por isso, tendo como premissa os fundamentos descritos acima bem como dos fatores geram o insucesso escolar, o presente artigo tem o objetivo de apontar as contribuições da metodologia de ensino do cálculo do m.d.c e do m.m.c por meio de uma abordagem aliada à decomposição dos números de forma separada e a seleção dos fatores primos de maneira simultânea sem a necessidade de transformá-los em potências.

Para o alcance desta meta, começamos por tratar de forma sintética sobre a utilidade do m.d.c e m.m.c e, apresentamos as formas habituais do cálculo do m.d.c e do m.m.c no contexto angolano e não só, de modo que o leitores compreendam essência dos procedimentos de cálculo apresentados nesta pesquisa, que privilegiam as habilidades já desenvolvidas pelos alunos relativamente a decomposição não simultânea e a introdução de um procedimento de seleção dos fatores primos que simplifica muitos aspectos que normalmente dificultavam os alunos e, consigam diferenciá-la dos procedimentos comumente utilizados.

2 Por que estudar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum?

A Matemática é uma das mais importantes áreas do conhecimento, tendo variadas aplicações em nosso cotidiano, porém, a visão de alguns alunos quanto a disciplina de Matemática é completamente diferente, principalmente quando muitas vezes eles questionam o seguinte: *Para que aprender isso e onde vou aplicar na vida prática?* Perguntas como essa

³ O Colégio do Senga é uma instituição pública do I Ciclo do Ensino Secundário, do Município do Uíge, Província do Uíge (Angola) fundada em 2007, criada pelo Decreto-Executivo-Conjunto-Nº 57/07 de 16 de março. Funciona num único período, lecionando a 7ª, 8ª e 9ª Classes.

tornam a missão do professor de Matemática muito desafiante porque, a ausência de respostas sobre estas situações aumenta cada vez mais a distância entre a Matemática e os alunos fortificando o desinteresse dos mesmos e desta forma dificultar ainda mais a capacidade aprender e compreender.

Nesse sentido, Brito *et al.* (2016) aconselham que algumas relações e conteúdos necessitam de uma atenção mais específica, sobretudo naqueles utilizados em todas as áreas do conhecimento e necessário às classes seguintes, tanto no ensino primário quanto no ensino médio.

Concordamos novamente com Brito *et al.* (2016) ao afirmarem que o m.m.c e o m.d.c são dois assuntos importantíssimos para a aprendizagem na Matemática, por serem a base para operacionalização da simplificação, comparação, adição e subtração de frações.

Sabe-se que quando se pretende adicionar ou subtrair frações cujos denominadores são diferentes, por exemplo, é necessário encontrar um denominador comum e o mais recomendável é utilizar o m.m.c de todos os denominadores em causa. Um dos critérios usados para comparar frações, estabelece que se duas frações têm o mesmo denominador, a determinação da maior ou menor fração depende somente do maior ou menor numerador, portanto, seguindo este critério, se tivermos frações com denominadores diferentes necessariamente teríamos que encontrar um múltiplo comum para transformar ou reduzir as frações ao mesmo denominador, para depois efetuar a comparação. Por outro lado, para uma simplificação rápida de uma fração, divide-se o numerador e o denominador desta fração pelo m.d.c destes.

No cotidiano, muitas são as situações-problemas que cuja solução requerem o uso do m.d.c e do m.m.c de dois ou mais números naturais. Portanto, é evidente a importância que estes conteúdos têm dentro do estudo própria da Matemática, sobretudo na aritmética dos números fracionários.

O Governo Angolano sabendo da importância destes conteúdos inseriu o estudo do m.d.c e do m.m.c ao terminar o Ensino Primário, isto é, na 6ª classe⁴ e que deve ser aprofundado ao começar o I Ciclo do Ensino Secundário, concretamente na 7ª classe. De acordo o programa de Matemática da 7ª Classe INIDE/MED (2019, p. 15), os objetivos a serem alcançados no estudo do m.d.c e do m.m.c são os seguintes:

Objetivo geral: Compreender o m.d.c e o m.m.c;

⁴ O sistema educativo angolano é composto pelo Ensino Primário, Ensino Secundário e Ensino Superior. O Ensino Primário e o Ensino Secundário são constituídos por classes, sendo distribuídas seis classes para o ensino Primário (1ª à 6ª classe) e seis classes para o Ensino Secundário Geral (7ª à 12ª classe).

Objetivos específicos:

1. Calcular o m.d.c de dois ou mais números;
2. Calcular o m.m.c. de dois ou mais números;
3. Aplicar o máximo divisor comum a simplificação de frações;
4. Aplicar o m.m.c. na adição de frações.

A compreensão do m.d.c e do m.m.c a que se refere o objetivo geral, na nossa visão, envolve três habilidades: *definir, calcular e aplicar*, embora nos objetivos específicos se expressem apenas duas habilidades referenciadas.

O cumprimento desses objetivos exige a criação de estratégias eficientes de ensino que se adequem com realidade do aluno, sendo este o grande desafio que norteou o desenvolvimento desta pesquisa.

3 Múltiplas formas de ensinar o cálculo do m.d.c e o m.m.c

Durante a prática pedagógica, o professor é chamado a pesquisar e a refletir sobre o contexto da sua turma. Isso é tão importante porque, ao colocar o ensino em ação, o professor pode construir possibilidades metodológicas na sua atuação, fazendo questionamentos da sua prática e das possíveis intervenções e mudanças. É por isso que Cardoso, Araujo e Giroto (2021) consideram que o professor durante a sua prática pedagógica deve ser um pesquisador que tem como objeto de estudo a sala de aula. Os autores acrescentam ainda que,

[...] é necessário que ocorra uma mudança na epistemologia da ação, passando à epistemologia da práxis, que é um movimento de operacionalização simultânea da ação e da reflexão sobre a prática, tornando inseparáveis os aspectos teóricos e práticos para a melhor atuar em sala de aula (Cardoso, Araujo e Giroto, 2021, p. 2596).

Neste aspecto, todos os professores são chamados a refletirem sobre as suas práticas pedagógicas pois, a reflexão proporciona aos professores maior conhecimento de sua realidade, de suas questões do dia a dia, favorecendo ferramentas para ação e resolução de problemas emergentes no contexto escolar e seu envolvimento com a sociedade e, principalmente, tomar consciência da cultura da escola e sua realidade.

É por isso que, tendo em conta as características e realidades sociais de cada escola, há uma constante busca de abordagens alternativas para a prática pedagógica em quase todas as áreas do saber. E desta forma, podemos afirmar também que, a busca de alternativas para o cálculo do m.d.c e do m.m.c não é algo recente. Por exemplo, Silva (2016) na sua abordagem

subordinada ao tema: A Criatividade no Ensino do m.d.c.: Atividades práticas para a sala de aula, considera que infinitos são os caminhos que a Matemática e a criatividade humana oferecem para que um docente possa mostrar e criar uma aula dentro de um ambiente onde o foco principal é a construção de saberes de forma simultaneamente coletiva e individual. Fundamentando-se nesta perspectiva, a autora em sua abordagem apresenta alguns jogos trazendo para as salas de aulas uma maneira criativa de ensinar o máximo divisor comum.

Já Freitas (2017), ao apresentar o seu trabalho versado sobre múltiplos, divisores, múltiplos comuns, divisor comum para inteiros, maior divisor comum (m.d.c) e menor múltiplo comum (m.m.c), suas propriedades elementares, recorre a uma abordagem histórica referente ao m.d.c e m.m.c, tratando dos conceitos mais elementares e essenciais que versam sobre múltiplo, divisor, m.d.c e m.m.c e um tratamento básico e essencial para o cálculo de maneira construtiva o m.d.c e m.m.c inteiros por meio de um algoritmo.

Daniel (2018) propõe a resolução de problemas como a estratégia de ensino a se adotar para desenvolver as habilidades dos alunos no cálculo do m.d.c e do m.m.c por meio da decomposição em fatores primos e representação em forma de potências, seleção dos fatores comum e não comuns sob forma potencial, desenvolvimento e multiplicação das potências.

Caldas, Graça e Marques (2020) defendem que a utilização do jogo “*trilha do mdc e do mmc*”, gera maior envolvimento concluindo que precisamos diversificar as estratégias e metodologias para o trabalho com os conteúdos de matemática levando os alunos interagirem, gostarem e aprenderem a matemática de forma significativa, para que não avancem com tantas dificuldades.

Segundo Talane (2022), pela via da decomposição, os alunos da 6ª Classe apresentam dificuldades no cálculo de mínimo múltiplo comum de dois ou mais números. Por isso, o autor apresenta uma abordagem para o cálculo do mínimo múltiplo comum de dois ou mais números sem o uso da decomposição em fatores primos, que passa pela determinação dos múltiplos de cada número, seleção dos múltiplos comuns e posteriormente escolher o múltiplo comum diferente de zero.

Atualmente, a implementação dessa proposta no Colégio do Senga não tem sido favorável para muitos alunos, pois, além da dificuldade de multiplicação, também não têm habilidades de descobrir até quantos múltiplos tem de se buscar em cada número para se encontrar o mínimo múltiplo comum, embora alguns consigam buscar três a quatro múltiplo de cada número, nalguns casos não acham o mínimo múltiplo comum, logo dificulta-os.

No ponto de vista de Afonso (2023), as dificuldades dos alunos da 7ª classe no cálculo do m.m.c são derivadas pelo elevado número de passos apresentados no Livro oficial de

Matemática de Octávio, Neto e João (2014), da classe e que tem sido fortemente utilizado pelos professores no exercício diário das suas funções. Os passos em causa são: (a) a decomposição de cada número, (b) apresentação na forma de produto de potência, (c) seleção os fatores comuns e não comuns de maior expoente, posteriormente, (d) desenvolvimento das potências selecionadas e (e) multiplicação delas. Diante desta situação, a autora apresenta uma estratégia metodológica, que simplifica alguns passos, cujo procedimento é o cálculo do m.m.c pela via da decomposição simultânea, que é procedimento mais direto e menos trabalhoso. Esta metodologia se aproxima em muitos aspectos com a abordagem que apresentamos, no entanto, ao ser apresentada aos alunos, gerou mais dificuldades naqueles alunos que já apresentavam dificuldades na decomposição não simultânea.

Relativamente as dificuldades do cálculo do m.d.c e m.m.c, Cabanda (2022) identificou que os alunos apresentam: dificuldades em compreender devidamente os conceitos de m.d.c e m.m.c, (ii) dificuldades em compreender os cálculos de múltiplos e divisores comuns de números naturais e (iii) dificuldades em determinar o m.d.c e m.m.c de dois ou mais números naturais. Para minimizar estas dificuldades, o autor usa como estratégia a intersecção dos conjuntos dos múltiplos e divisores de cada número. Essa metodologia também foi explorada por nós, mas também não produziu os êxitos que se esperavam devido a dificuldades dos alunos na multiplicação de números naturais para obtenção dos múltiplos e na determinação de todos os divisores de um número natural.

Analisando as várias dificuldades que os alunos apresentam em cada uma das propostas apresentadas pelos pesquisadores descritos para o cálculo do m.d.c e m.m.c bem como a falta de condições técnicas em muitas escolas do ensino secundário em Angola em geral e na Província do Uíge em particular, como é o caso do Colégio do Senga, por onde se efetuou este estudo, que dificulta a adoção das metodologias do uso de jogos propostas por Silva (2016) e Caldas *et al.* (2020), preferimos adotar a decomposição dos números de forma separada e selecionar os fatores primos de maneira simultânea sem a necessidade de transformar os fatores primos em potências.

Esta estratégia de ensino privilegia as habilidades que os alunos já desenvolviam, embora com algumas lacunas, que é a decomposição não simultânea e introduz um procedimento novo que simplifica muitos aspectos que dificultavam os alunos.

4 Metodologia

Antes de começarmos a discussão sobre as contribuições da proposta de ensino do

cálculo do m.d.c e m.m.c por meio da decomposição dos números de forma separada e seleção os fatores primos de maneira simultânea, que foi adaptada por nós em função às habilidades que alunos possuíam na decomposição separada e às dificuldades dos mesmos na seleção dos fatores corretos para o cálculo do m.d.c e m.m.c, queremos esclarecer como foi considerada a pesquisa no presente artigo.

Inicialmente, reafirma-se que a proposta de ensino do cálculo do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum aliada à decomposição dos números de forma separada e selecionar os fatores primos de maneira simultânea, sem a necessidade de transformar os fatores primos em potências, não tem a missão de contrapor ou anular as perspectivas mais comuns, mas, apresentá-la como uma alternativa fiável para solucionar os casos tendo em conta as habilidades e dificuldades que os alunos apresentavam.

A pesquisa fez uma abordagem predominantemente qualitativa porque, tal como define Gil (2006) citado por Quimuanga, José e Domínguez (2023, p. 9), “a pesquisa qualitativa é aquela que propicia o ambiente natural como fonte direta para a coleta dos dados e o pesquisador como instrumento-chave procurando interpretar os fenómenos”. Por outro lado, a pesquisa também apresenta características de uma abordagem quantitativa, uma vez que foi empregue a quantificação, tanto nas modalidades de coletas de informação quanto no tratamento delas por meio de técnicas estatísticas (Prodanov e Freitas, 2013). Este estudo foi desenvolvido na modalidade de Pesquisa Pedagógica descrita por Cardoso, Araujo e Giroto (2021) como sendo aquela que não só auxilia o ato de ensinar, orientar e avaliar a aprendizagem com a reflexão dos professores, mas, sobretudo, considerar a prática como instrumento de pesquisa e que o professor se torne intrinsecamente pesquisador, que questione suas decisões, que parta de hipóteses ao planejar suas aulas e reflita a realidade do ensino, compreendendo-a e problematizando-a, a partir de “leituras críticas de materiais e documentos” (Gil, 2002, p. 44).

Diante disso, queremos destacar alguns pontos da pesquisa desenvolvida que correspondam aos aspectos descritos acima:

A pesquisa foi desenvolvida em uma turma da 7ª classe do Colégio do Senga, Província do Uíge (Angola), nas aulas de Matemática onde o próprio professor da turma (primeiro autor) era o próprio pesquisador e responsável pela elaboração do material de coleta de dados bem como da aplicação, descrição e análise dos dados, pois, a sua filiação com a escola lhe garantiu o acesso direto ao local de estudo e aos participantes privilegiando a recolha de dados direta a partir da fonte primária ou originária (os alunos) e por se tratar de um conteúdo que faz parte do currículo para este nível de ensino (INIDE/MED, 2019). Os exercícios aplicados foram retirados do Manual do aluno da 7ª classe em uso nas escolas do I ciclo do ensino secundário

em Angola (Octávio, Neto e João, 2014).

Os dados foram levantados durante as aulas por meio de questionários (provas) aplicados aos alunos sobre o cálculo do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Esses questionários foram aplicados em duas ocasiões e cada continha quatro (4) questões, onde as duas primeiras estavam relacionadas ao máximo divisor comum e as duas últimas ao mínimo múltiplo comum. Inicialmente, o professor deu a liberdade que cada aluno resolvesse de acordo o método a sua escolha.

A maior preocupação do professor nessas provas era analisar em que aspectos eles apresentariam mais dificuldades e limitações. Identificados os principais aspectos que mais dificuldades e limitações os alunos enfrentavam (como veremos mais abaixo), então o professor, colocou a sua reflexão em ação sobre a alternativa a utilizar para minimizar tais dificuldades.

Deste modo, a metodologia adotada permitiu não apenas a análise detalhada das dificuldades dos alunos, mas também a elaboração e implementação de uma proposta de ensino mais adequada às suas necessidades. A seguir, apresentam-se as principais dificuldades e limitações constatadas e a proposta pedagógica construída com base nelas.

5 Dificuldades e limitações dos alunos

Para identificar as reais dificuldades e limitações dos alunos em relação ao cálculo do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, tal como já descrito anteriormente, elaboramos e aplicamos um questionário aos 36 alunos da 7ª classe do Colégio do Senga, tendo como referência os conteúdos programados para esta classe (INIDE/MED, 2019) e retirados no Manual do aluno, durante o ano letivo 2023/2024.

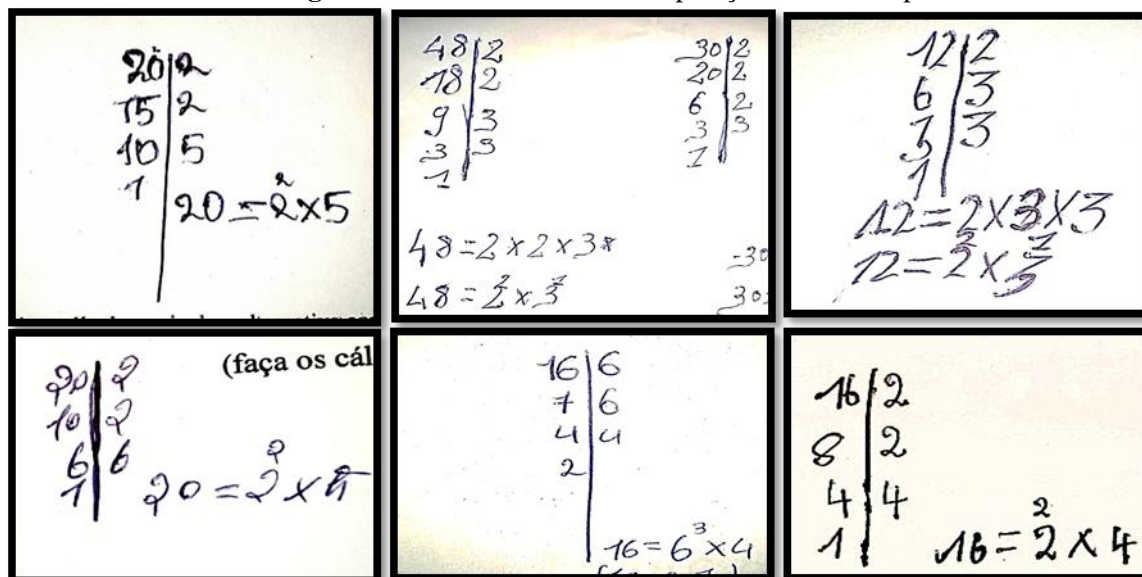
Depois de coletados e analisados os dados sobre o cálculo do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, foram detectadas várias dificuldades que as agrupamos em 4 tipos principais, que são:

5.1 Primeira dificuldade: decomposição em fatores primos

A decomposição de números em fatores primos de acordo com a sequência lógica dos conteúdos no programa de Matemática da 7ª classe é tida como o “caminho ideal” para cálculo do m.d.c e m.m.c. Dos resultados do inquérito inicial aos alunos, constatou-se que 15 dos 36 alunos participantes apresentaram dificuldades na decomposição em fatores primos. Como se

pode observar nas ilustrações abaixo, as dificuldades consistiam na divisão de números naturais, na escolha do divisor (alguns efetuavam a decomposição utilizando números compostos) e no domínio dos critérios de divisibilidade.

Figura 1: Dificuldades na decomposição em fatores primos



Fonte: Fichas de inquérito inicial.

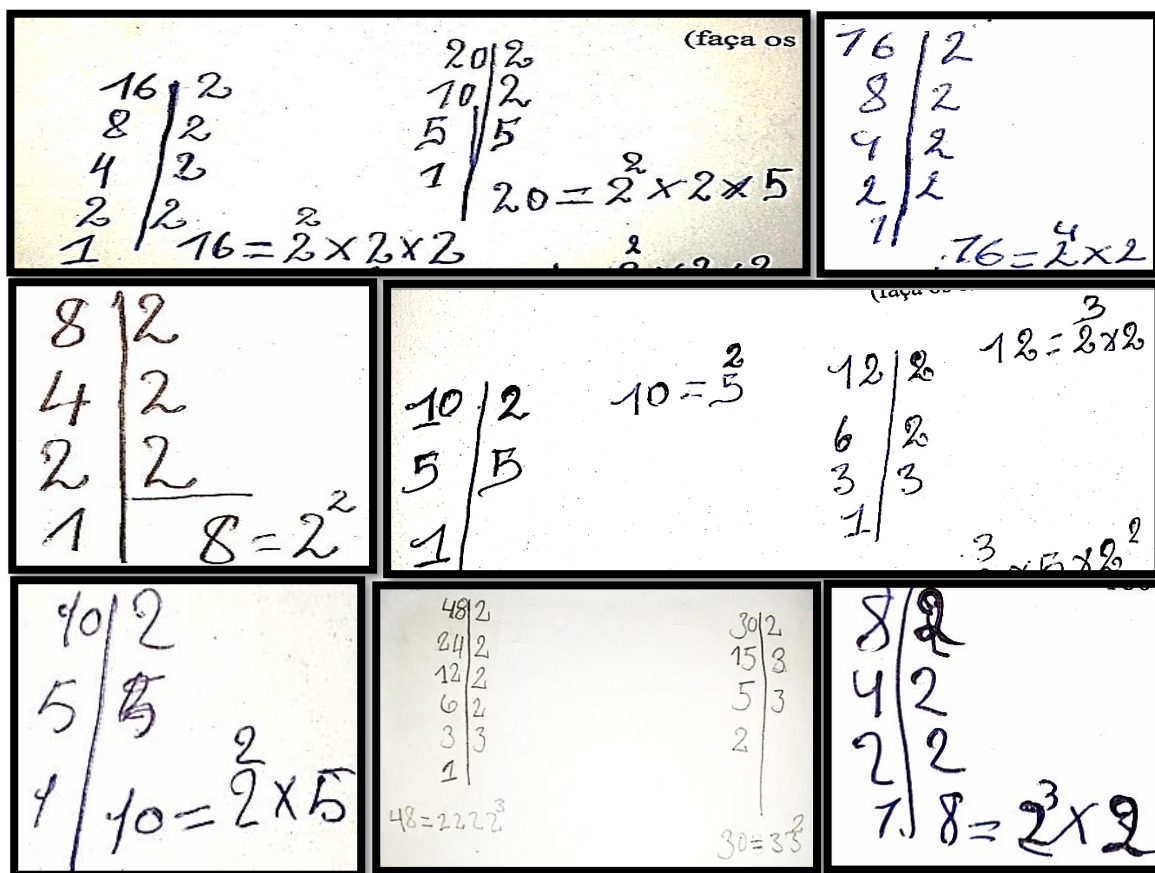
As imagens captadas das fichas de inquérito inicial preenchidas pelos alunos evidenciam as fragilidades nos conhecimentos básicos de divisibilidade, o que comprometeu a realização correta da decomposição em fatores primos, etapa essencial para o cálculo do m.d.c e do m.m.c.

5.2 Segunda dificuldade: escrever os fatores sob forma de potências

Além da decomposição em fatores primos, a fatoração e a exponenciação dos fatores primos utilizados durante a decomposição, constitui outra grande dificuldade nos alunos da 7ª classe. Por exemplo, dos 36 alunos inquiridos nesta pesquisa, 21 alunos efetuaram a decomposição em fatores primos corretamente. Destes, 14 alunos falharam na transformação dos números decompostos em seus respectivos produtos de fatores primos escrito na forma potencial. Pelo que se pode colher através das fichas de inquéritos, as dificuldades residiam essencialmente na transformação de produtos em potências como se pode ver na Figura 2.



Figura 2: Dificuldades na fatoração e exponenciação dos números decompostos



Fonte: Fichas de inquérito inicial.

Conforme as ilustrações da Figura 2, houve dificuldades significativas na representação dos fatores primos na forma de potências, evidenciando limitações na compreensão da relação entre a multiplicação repetida e potenciação – aspectos relevantes para o cálculo do m.d.c e do m.m.c, especialmente na etapa de seleção dos fatores a serem multiplicados.

5.3 Terceira dificuldade: escrever os fatores sob forma de potências

O cálculo do m.m.c. e m.d.c por via da decomposição exige uma rigorosa seleção dos fatores primos que após multiplicação resultam no m.d.c ou m.m.c. No entanto, muitos alunos confundem-se quando chegam nesta etapa. Alguns selecionam os fatores primos corretos, mas falham na seleção do expoente selecionando o expoente maior quando deveriam selecionar o menor e vice-versa; outros nem conseguem discernir um fator comum de um não comum, entre outras. No caso particular dos alunos em destaque nesta investigação, conforme se pode ver na figura 3, além das dificuldades referidas, também estes confundiam na seleção dos fatores primos para o m.d.c e para m.m.c. Muitas vezes no cálculo de um selecionavam os fatores para



outro.

Figura 3: Dificuldades dos alunos na seleção dos fatores

(faça os cálculos aqui)

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 2} \\ 4 \overline{) 2} \\ 2 \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 2} \\ 8 = 2^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 2} \\ 5 \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 2} \\ 10 = 2 \times 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 2} \\ 6 \overline{) 2} \\ 3 \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 2} \\ 12 = 2 \times 3 \end{array}$$

$$\text{m.m.c. } (8, 10 \text{ e } 12) = 2^2 \times 5 \times 2$$

$$8 \times 2 = 16$$

$$= 16 \times 5 = 80$$

$$\text{m.m.c. } 8, 10 \text{ e } 12 = 160$$

$$\begin{array}{r} 48 \overline{) 2} \\ 24 \overline{) 2} \\ 12 \overline{) 2} \\ 6 \overline{) 2} \\ 3 \overline{) 2} \\ 2 \overline{) 2} \\ 48 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 48 = 2^4 \times 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 2} \\ 15 \overline{) 2} \\ 5 \overline{) 2} \\ 2 \overline{) 2} \\ 30 = 2 \times 3 \times 5 \\ 30 = 2 \times 3 \times 5 \end{array}$$

$$\text{M.d.c. } (48 \text{ e } 30) = 2 \times 3$$

$$\begin{array}{r} 48 \overline{) 2} \\ 24 \overline{) 2} \\ 12 \overline{) 2} \\ 6 \overline{) 2} \\ 3 \overline{) 2} \\ 2 \overline{) 2} \\ 48 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 48 = 2^4 \times 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 2} \\ 15 \overline{) 2} \\ 5 \overline{) 2} \\ 2 \overline{) 2} \\ 30 = 2 \times 3 \times 5 \\ 30 = 2 \times 3 \times 5 \end{array}$$

$$\text{M.d.c. de } (48 \text{ e } 30) = 2^4 \times 3 = 24$$

Fonte: Fichas de inquérito inicial.

As ilustrações da Figura 3 revelam a confusão dos alunos na escolha dos fatores e respectivos expoentes para determinar o m.d.c e o m.m.c indicando insuficiências na compreensão das diferenças conceituais e operatórias entre esses dois cálculos, o que compromete a progressão dos alunos no domínio dos conteúdos ligados a esses números.

5.4 Quarta dificuldade: aplicar corretamente a definição de potência sobre os fatores selecionados

A aplicação da definição de potência de expoente natural é a última etapa do cálculo do m.d.c e m.m.c pela via em referência. Muitos alunos quando chegam nesta etapa claudicam o seu cálculo por não aplicarem corretamente a definição de potência. Pelo que se constatou, alguns multiplicavam os expoentes pelas bases, outros desenvolviam corretamente as potências, mas ao invés de multiplicarem os fatores, somavam-nos; e outros ainda multiplicavam alguns fatores e ignoram outros.

Depois de analisar as dificuldades e limitações dos alunos, adotamos e aplicamos a metodologia que visou a trabalhar com a decomposição de forma separada dos números e selecionar os fatores primos de maneira simultânea privilegiando as habilidades que os alunos já tinham introduz um procedimento novo que simplifica muitos aspectos que dificultavam os alunos, como veremos no item a seguir.

6 Desenvolvimento das atividades

As atividades foram realizadas de forma mista por meio de discussões e desenvolvimento de ideias, para a clarificação e materialização da estratégia de ensino e alguns momentos de pendor expositivo para o ensino-aprendizagem de alguns conceitos matemáticos.

Face às diversas dificuldades apresentadas pelos alunos, procuramos desenvolver uma estratégia de ensino-aprendizagem onde o cálculo do m.d.c e m.m.c poderia ser feito sem passar pela potenciação. Para a seleção dos fatores a serem multiplicados os alunos não precisam identificar os fatores primos de menor ou maior expoente, pois, tal como já descrito anteriormente, existe muita confusão em relação isto. Portanto, a seleção dos fatores segundo a proposta apresentada é feita diretamente dos dispositivos de decomposição. Outra novidade é que os alunos no cálculo do m.m.c e m.d.c não precisam aplicar a definição de potência. Eis a seguir os procedimentos de cálculo de ambos propostos nesta pesquisa:

6.1 Proposta 1: Sequência de passos para cálculo do máximo divisor comum

1º Passo: Decompor os números dados em fatores primos e marcar ou destacar os fatores primos comuns;

2º Passo: Selecionar os fatores destacados e multiplicá-los

3º Passo: Concluir.

Exemplos ilustrativos

1. Cálculo do máximo divisor comum de 72 e 60.

1º Passo: Decompor os números dados em fatores primos e marcar ou destacar os fatores primos comuns.

Figura 4: Decomposição dos números 72 e 60 em fatores primos e respectivas marcações



Fonte: Autores (2023)

2º Passo: Selecionar os fatores destacados e multiplicá-los

Os fatores marcados são 2, 2 e 3. Multiplicando-os, tem-se:

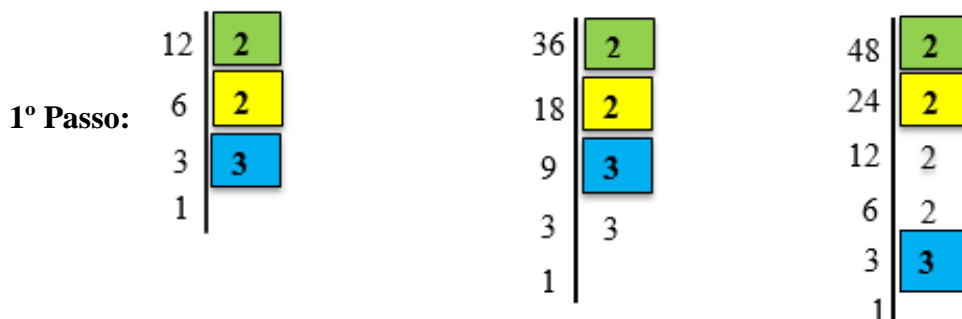
$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

3º Passo: Concluir

$$\text{O m. d. c (72, 60)} = 12$$

2. Cálculo do m.d.c de 12, 36 e 48.

Figura 5: Decomposição do 12, 36 e 48 em fatores primos e respectivas marcações



Fonte: Autores (2023)

2º Passo:

Os fatores marcados são 2, 2 e 3. Multiplicando-os, tem-se:

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

3º Passo:

$$\text{Assim, o m. d. c (12, 36, 48)} = 12$$

Em síntese, a decomposição separada dos números e seleção simultânea dos fatores primos (sem transformá-los em potências) configura-se em uma estratégia eficaz para o cálculo do m.d.c, destacando-se pela sua clareza e simplicidade. Esse método elimina algumas etapas

que complicavam o cálculo dos alunos e reduz possíveis erros, especialmente com números maiores. A aplicação nos exemplos ilustrativos evidencia a sua praticidade, tornando-o uma ferramenta pedagógica valiosa no ensino do m.d.c.

6.2 Proposta 2: Sequência de passos para cálculo do mínimo múltiplo comum

Nesta pesquisa, para o cálculo do m.m.c, propomos os seguintes passos:

1º Passo: Decompor os números dados em fatores primos e marcar ou destacar os fatores primos comuns;

2º Passo: Selecionar os fatores primos comuns (destacados) e os não-comuns dos números dados e multiplicá-los;

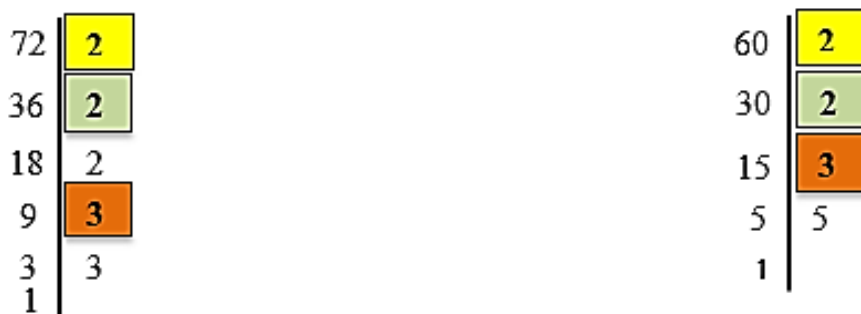
3º Passo: Concluir.

Exemplos ilustrativos 2

1. Determinação do mínimo múltiplo comum de 72 e 60.

1º Passo: Decompor os números dados em fatores primos e marcar ou destacar os fatores primos comuns;

Figura 6: Decomposição dos números 72 e 60 em fatores primos e respectivas marcações



Fonte: Autores (2023)

2º Passo: Selecionar os fatores primos comuns (destacados) e os não-comuns dos números dados e multiplicá-los.

Os fatores destacados (comuns) são 2, 2 e 3. Os fatores não-destacados (não-comuns) são 2, 3 e 5. Multiplicando-os, tem-se:

$$2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 = 360$$

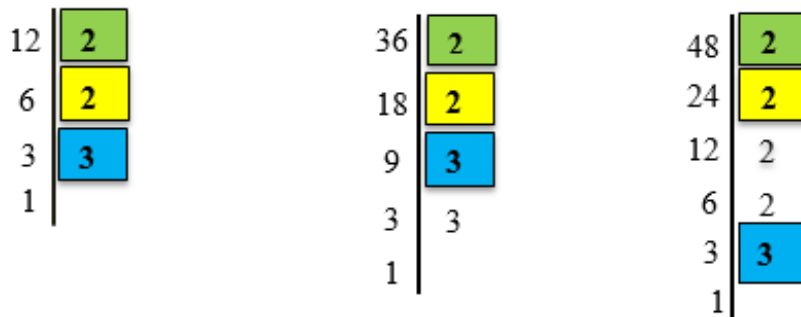
3º Passo: Concluir.

$$\text{O m. m. c (72, 60) = 360}$$

2. Cálculo do m.m.c de 12, 36 e 48.

Figura 7: Decomposição 72 e 60 em fatores primos e respectivas marcações

1º Passo:



Fonte: Autores (2023).

2º Passo:

Os fatores comuns são 2, 2 e 3. Os fatores não-comuns são 3, 2, e 2. Multiplicando-os, tem-se:

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 144$$

3º Passo:

$$\text{Logo, o m.m.c (12, 36, 48)} = 144$$

De igual modo, a decomposição separada dos números e a seleção simultânea dos fatores primos comuns e não comuns, mostra ser uma estratégia simples e eficiente para o cálculo do m.m.c, pois a clareza do procedimento e a eliminação de algumas etapas, tais como a transformação dos fatores primos em potências e selecionar entre os fatores comuns a potência de maior expoente além dos fatores primos não comuns, que anteriormente confundiam os alunos, tornam-no válido e eficaz, como demonstram os exemplos apresentados.

Após duas aulas introdutórias onde foram abordadas as questões teóricas e práticas sobre números primos, critérios de divisibilidade, decomposição em fatores primos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, aplicou-se as propostas de resolução expostas nos parágrafos anteriores. Na resolução do primeiro exercício de cálculo do m.d.c e do m.m.c contou com a participação direta e cooperativa do pesquisador para que possibilitasse o enquadramento dos alunos na dinâmica dos procedimentos de resolução.

Os outros exercícios foram resolvidos pelos alunos primeiramente em grupos e depois de forma individualizada das quais pudemos extrair alguns registros fotográficos.

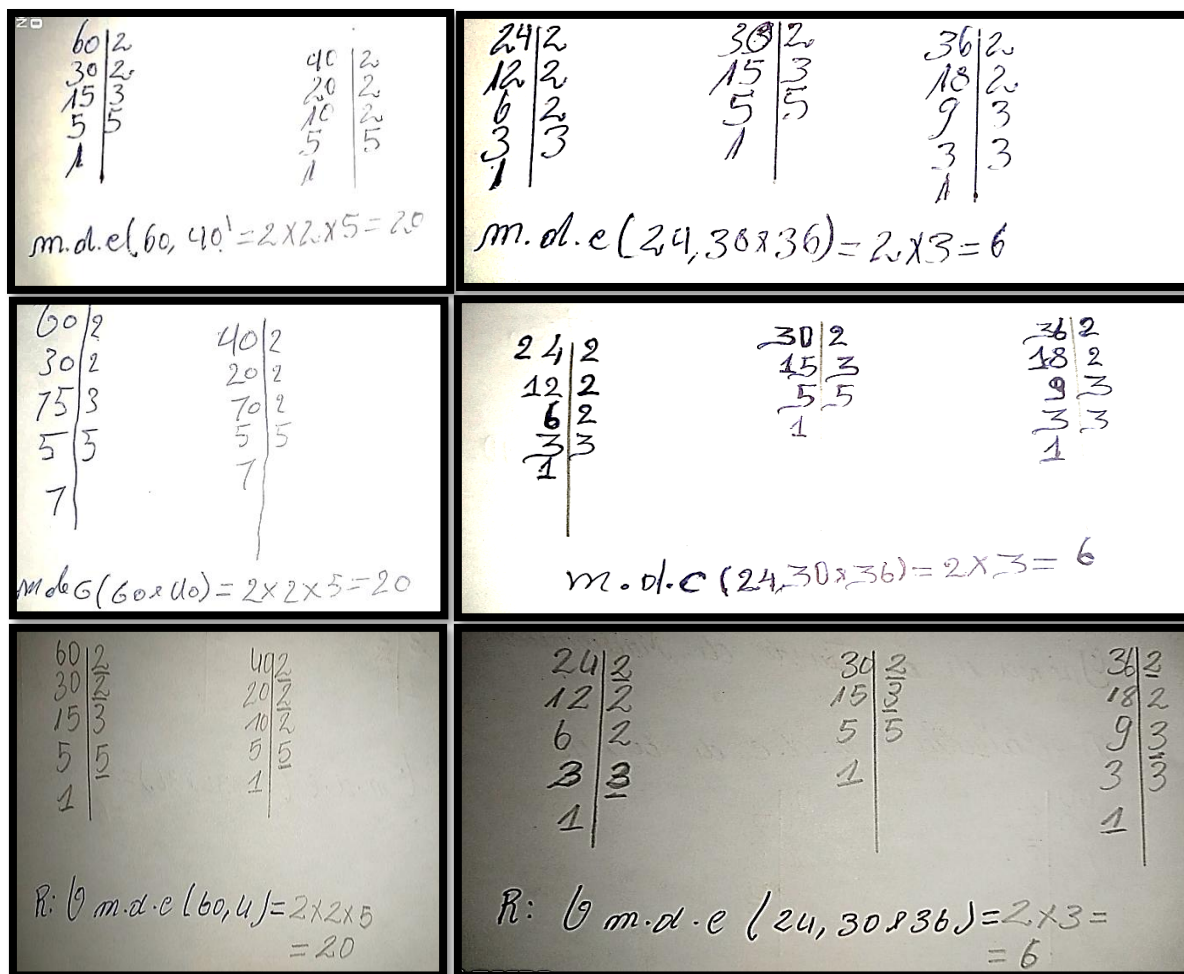
Figura 8: Alunos a trabalhando de forma individualizada



Fonte: Autores (2023).

A seguir, apresentamos algumas ilustrações do trabalho feito individualmente pelos alunos:

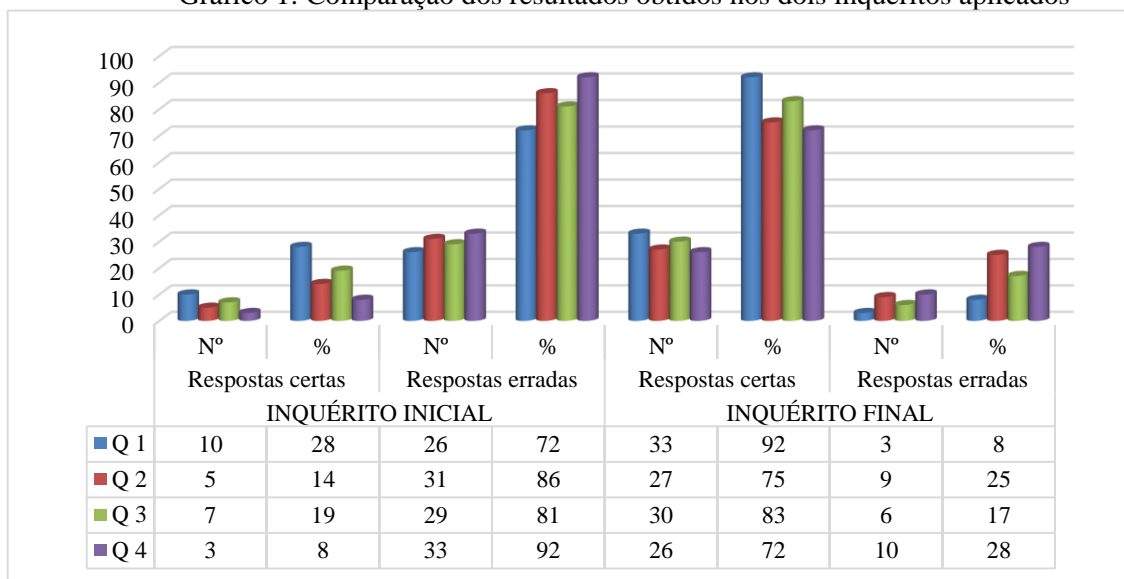
Figura 9: Cálculos de m.d.c. efetuados pelos alunos



Fonte: Fichas de inquérito final.

De forma global, a análise comparativa (quantitativa) dos resultados obtidos nos dois inquéritos evidenciou que os alunos apresentaram mais dificuldades no princípio do que no fim. Relativamente em cada um dos casos, os resultados mostram que eles tinham mais dificuldades no cálculo do m.m.c, porque nas duas últimas questões do inquérito inicial houve no total 62 soluções erradas, enquanto que no inquérito final foram 16 soluções erradas. Relativamente ao cálculo do m.d.c, notou-se também mais dificuldades no inquérito inicial, com um total de 57 soluções erradas, do que no inquérito final, onde se registou apenas 12 soluções erradas, como mostra o Gráfico 1.

Gráfico 1: Comparação dos resultados obtidos nos dois inquéritos aplicados



Fonte: Autores (2023), através das fichas dos inquéritos inicial e final.

Com essa comparação feita entre os resultados dos dois inquéritos realizados aos alunos da 7ª classe do Colégio do Senga, pode-se deduzir que os objetivos almejados neste trabalho foram atingidos, pelo fato de haver melhorias nos resultados obtidos no inquérito final, embora existam ainda alguns que precisam ser recuperados, uma vez que não se alcançou 100% de positivities nas questões aplicadas.

7 Considerações finais

Por meio deste artigo, é possível apontar contribuições da metodologia de ensino do cálculo do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum por meio da metodologia aliada à decomposição separada dos números e seleção dos fatores primos de maneira simultânea (sem transformá-los em potências), para desenvolvimento das habilidades dos alunos da 7ª Classe no Colégio do Senga, uma das escolas do I ciclo do ensino secundário da Província do Uíge (Angola).

A metodologia de resolução de exercícios implementada, permitiu aos alunos calcularem o m.d.c e m.m.c sem aplicar a potenciação tanto na seleção dos fatores primos como no cálculo do produto deles, privilegiando as habilidades que os alunos já tinham desenvolvidas relativamente a decomposição não simultânea e introduzir o procedimento novo que reduz o número de passos, situação que gerava uma certa confusão nos alunos e comprometia os seus resultados.

As atividades realizadas em sala de aula que permitiram a participação ativa dos alunos e os procedimentos elaborados propiciaram um ambiente de aprendizagem favorável para os alunos desenvolverem os seus conhecimentos e habilidades. Portanto, a elaboração duma estratégia de ensino baseando-se nas habilidades e fragilidades dos alunos permitiu o progresso dos alunos que apresentavam maior índice de dificuldades. Embora não se tenha minimizado a 100% todas as dificuldades, deduz que a pesquisa desenvolvida é válida, eficaz e adequada para os alunos deste nível de ensino.

Neste sentido, espera-se que a proposta apresentada neste artigo sirva de uma ferramenta alternativa e viável no processo de ensino-aprendizagem do cálculo do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum e que contribua significativamente na minimização das dificuldades dos alunos deste nível de ensino.

Referências

AFONSO, I. **Estratégia metodológica para o ensino do cálculo do mínimo múltiplo comum na 7ª classe**. 2023. 68 f. Trabalho de Fim de Curso (Licenciatura em Ensino de Matemática) - Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge, Uíge: [s.n.], 2023.

BRITO, E. R. G. D. et al. MMC e MDC: Como ensinar? um desafio para o professor. In: **Congresso Nacional de Educação - CONEDU, 3.**, João Pessoa. Anais [...]. João Pessoa: Realize Editora, 2016. Disponível em: <<https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/21417>>.

CABANDA, D. S. **Algoritmo para o cálculo de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de números naturais na 6ª classe na Escola Primária do Kilamba Kiayi do Município do Uíge**. 2022. 65 f. Trabalho de Fim de Curso (Licenciatura em Ensino de Matemática) - Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge, Uíge: [s.n.], 2022.

CALDAS, F. D. S.; GRAÇA, V. V. D.; MARQUES, V. R. Múltiplos e divisores: Uma experiência com o uso do jogo de tilhas. Orientadora: Valéria Risuenho Marques. **Revista Exitus**, Belém, PA, 10, 2020. 01-28. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=553171468106>>. Acesso em: 09 Fevereiro 2024.

CARDOSO, P. P. C.; ARAUJO, L. A.; GIROTO, C. R. M. Pesquisa pedagógica e formação continuada de professores no ambiente escolar: Uma relação necessária. **RIAEE – Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, Araraquara, v. 16, n. 4, p. 2593-2608, out./dez. 2021. 2593-2608. Disponível em: <<https://periodicos.fclar.unesp.br/iberoamericana/article/view/15822>>. Acesso em: 02 Abril 2024.

DANIEL, A. S. **Conjunto de problemas que envolvem mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de dois ou mais números na 7ª classe**. 2018. 68 f. Trabalho de Fim de Curso (Licenciatura em Ensino de Matemática) - Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge, Uíge: [s.n.], 2018.

FREITAS, A. N. **Uma abordagem do mdc e mmc dos inteiros**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Amapá, Macapá: [s.n.], 2017. Disponível em: <<https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/tcc-2017-Adriana-Natividade-Freitas-e-Gisele-Natividade-Freitas.pdf>>. Acesso em: 17 abr. 2023

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª. ed. São Paulo: Atlas, 2002. Disponível em: <<https://docplayer.com.br/4893888-Antonio-carlos-gil-como-elaborar-projetos-de-ui-sa.html>>. Acesso em: 25 abr. 2023.

INIDE/MED. **Programas de Matemática 7ª, 8ª e 9ª Classes**. 1ª. ed. Luanda: Editora Moderna, 2019.

LEI-Nº17/16. **Lei de Bases do Sistema de Educação e Ensino de Angola. Diário da República I Série nº 170 de 07 de Outubro**. Assembleia Nacional de Angola. Luanda. 2016.

OCTÁVIO, M. J.; NETO, P. M.; JOÃO, W. **Matemática 7ª Classe - Manual do Aluno**. Luanda: Editora das Letras, 2014.

PRODANOV, E. C.; FREITAS, C. C. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa Científica e do Trabalho Acadêmico**. 2ª. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Disponível em: <<https://www.feevale.br/Comum/midias/0163c988-1f5d-496f-b118-a6e009a7a2f9/E-book%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf>>. Acesso em: 25 dez. 2023.

QUIMUANGA, Z. C. A.; JOSÉ, S.; DOMÍNGUEZ, R. C. O ensino da Estatística baseado na resolução de problemas: Uma estratégia didática de trabalho com os alunos de uma Escola Primária em Angola. **Revista Baiana de Educação Matemática**, v. 04, n. 01, 07 Agosto 2023. 1-27. Disponível em: <<https://revistas.uneb.br/index.php/baeducmatematica/article/view/16781>>. Acesso em: 02 abr. 2024.

SILVA, T. M. **A Criatividade no Ensino do M.D.C.: Atividades práticas para a sala de aula**. 47 f. Monografia (Especialização em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó: [s.n.], 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/43797/2/ACriatividadedeEnsino_Silva_2016.pdf>. Acesso em 18 abr. 2023.

TALANE, A. P. **Algoritmo para o cálculo do mínimo múltiplo comum de dois ou mais números sem o uso da decomposição em factores primos na 6ª classe**. 2022. 70 f. Trabalho de Fim de Curso (Licenciatura em Ensino de Matemática) - Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge, Uíge: [s.n.], 2022.

TAXINI, C. L. et al. Proposta de uma sequência didática para o ensino do tema "Estações do Ano" no Ensino Fundamental. **Revista Ensaio**, Belo Horizonte, v. 14, n. 1, p. 81-97, 2012. Disponível em <<https://www.scielo.br/j/eped/a/ctby8MWfNjht8RQX3MqJD7c/abstract/?lang=pt>>. Acesso em: 2 fev. 2024.

VALE, A. F. A. D. **As Diferentes Estratégias de Resolução de Equação do Segundo Grau**. 2013. 76 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró. 2013. Disponível em: <<https://ufersa.edu.br/wp->

<content/uploads/sites/58/2016/02/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Alberton-Fagno.pdf>>. Acesso 25 abr. 2023.