

O ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória: uma Revisão Sistemática da Literatura

DOI: <https://doi.org/10.33871/rpem.2025.14.33.9038>

Dayvid Evandro da Silva Lós¹
Cristine Martins Gomes de Gusmão²

Resumo: O presente trabalho caracteriza-se como uma revisão sistemática de literatura que tem como objetivo compreender alguns aspectos envolvidos com a baixa aprendizagem dos conceitos combinatórios, bem como que tipo de estratégias podem atenuar essa situação, levando em consideração os fatores que conduzem os estudantes a terem dificuldades para aprender análise combinatória, as estratégias e recursos de ensino que contribuem para sua aprendizagem e o papel do professor em ambos os processos. Para isso, foram identificados 371 textos nas bases de dados Portal Periódico da CAPES, BDTD, principais periódicos de Educação Matemática (Qualis A1 a B2), ERIC, ScienceDirect e anais do ENEM e SIPEM. Após aplicar os critérios de exclusão e inclusão, foram selecionados 53 trabalhos. Os textos indicaram que o ensino de combinatória é pautado pelo modelo fórmula-aplicação, com pouca diversidade de representações simbólicas, o que dificulta a compreensão dos invariantes combinatórios e interpretação dos problemas; a formação do professor de matemática possui lacunas quando se trata de combinatória, uma vez que os textos evidenciaram o baixo repertório metodológico ao ensinar esse conteúdo e o pouco conhecimento específico dessa área; as estratégias e recursos que se destacaram foram: questionamento docente, resolução de problemas, gamificação, história e modelagem matemática, jogos, softwares e material concreto. A partir deste estudo, percebe-se que lacunas de aprendizagem não preenchidas nos espaços formativos interferem na maneira como o professor conduz sua aula, ao passo que se evidencia o papel central do professor na proposição e condução de estratégias que favoreçam a aprendizagem dos conceitos combinatórios.

Palavras-chave: Análise combinatória; Combinatória; Ensino; Aprendizagem.

The teaching and learning of Combinatorial Analysis: a Systematic Literature Review

Abstract: The present study is characterized as a systematic literature review aimed at understanding various aspects related to low learning of combinatorial concepts, as well as the types of strategies that can alleviate this situation, considering the factors that lead students to struggle with learning combinatorial analysis, teaching strategies and resources that contribute to their learning, and the role of the teacher in both processes. To achieve this, 371 texts were identified in the databases of Capes Periodical Portal, BDTD, major Mathematics Education journals (Qualis A1 to B2), ERIC, ScienceDirect, and proceedings of ENEM and SIPEM. After applying exclusion and inclusion criteria, 53 works were selected. The texts indicated that combinatorial teaching is guided by the formula-application model, with little diversity of symbolic representations, which hinders the understanding of combinatorial invariants and problem interpretation; mathematics teacher training has gaps when it comes to combinatorial topics, as the texts evidenced a low methodological repertoire in teaching this content and little specific knowledge in this area; standout strategies and resources included: teacher questioning, problem-solving, gamification, storytelling and mathematical modeling, games, software, and concrete materials. From this study, it is observed that unfilled learning gaps in training spaces interfere with the way the teacher conducts their class, while highlighting the central role of the teacher

¹ Doutorando pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, da Universidade Federal de Pernambuco (PPGEduematec/UFPE). Email: dayvid.faculdade@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8924-1737>.

² Doutora em Ciência da Computação, Centro de Informática Universidade Federal de Pernambuco (CIn-UFPE). Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, da Universidade Federal de Pernambuco (PPGEduematec/UFPE). Email: cristine.gusmao@ufpe.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8831-217X>.

in proposing and implementing strategies that facilitate the learning of combinatorial concepts.

Keywords: Combinatorial analysis. Combinatorics. Teaching. Learning.

1 Introdução

O ensino de matemática é marcado, historicamente, por baixos índices de aprendizagem. São várias as razões que vêm contribuindo para esse estado, dentre as quais Freitas (2001) e D'Ambrosio (1989) elencam alguns aspectos, a saber: discussões isoladas de conteúdos, desfavorecendo a contextualização entre os conceitos matemáticos; um ensino mecânico que privilegia a repetição e o treino, a partir de uma enorme quantidade de exercícios semelhantes; dissociação entre material concreto e abstração, ao acreditar que, com a manipulação de material concreto, o estudante naturalmente desenvolverá o raciocínio abstrato; pouca variação na forma de ensinar independente do conteúdo e público; modelo padronizado de avaliação; e ignorar o tempo de aprendizagem do estudante.

Esse cenário envolvendo aprendizagem matemática pode ser observado também a partir dos resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Considerando os resultados do SAEB referentes ao ano de 2021, no 5º ano do ensino fundamental, 57,6 % dos alunos encontram-se até o nível 4 de proficiência (de uma escala de nível 0 ao 10³), com média de proficiência igual a 217 (de 0 a 350 pontos); no 9º ano do ensino fundamental, 62,6% dos alunos encontram-se até o nível 3 (de uma escala de nível 1 ao 9), com média de proficiência igual a 256 (de 200 a 400); e, no 3º ano do ensino médio, 71,6% dos alunos encontram-se até o nível 3 (de uma escala de nível 1 ao 10), com média de proficiência igual a 270 (de 225 a 450 até o nível 9 e maior ou igual a 450 no nível 10) (Brasil, 2022). No que se refere ao ensino médio, por exemplo, pode-se dizer que tais estudantes, provavelmente, têm dificuldade em habilidades presentes, respectivamente, nos níveis 4, 7 e 8 de proficiência, tais como resolver problemas de contagem usando princípio multiplicativo, permutação e arranjo, conceitos esses que são relacionados ao estudo de análise combinatória⁴ (Brasil, 2022).

De modo a compreender os aspectos envolvidos com a baixa aprendizagem dos

³ No SAEB, há uma escala de proficiência única para o 5º e 9º anos do ensino fundamental e 3ª e 4ª séries do ensino médio – Língua Portuguesa e Matemática. Cada escala varia de 0 a 500 pontos, com média de 250. Os níveis em cada escala de proficiência são intervalos utilizados para agrupar tanto os itens (com base em seus parâmetros) como os estudantes (com base em suas proficiências). Nas escalas de proficiência do SAEB, o intervalo que define cada nível é de 25 pontos. Por exemplo, no nível 3 da escala de proficiência de matemática do 5º ano do ensino fundamental, os estudantes provavelmente são capazes de “localizar um ponto ou objeto em uma malha quadriculada ou croqui, a partir de duas coordenadas ou duas ou mais referências”, “determinar o resultado da subtração de números representados na forma decimal, tendo como contexto o sistema monetário”, entre outros (Brasil, 2022).

⁴ Neste texto, as expressões “análise combinatória” e “combinatória” são sinônimas.

conceitos relacionados à análise combinatória, bem como que tipo de estratégias podem atenuar essa situação, foi realizada uma revisão sistemática da literatura com ênfase em três tipos de situações relacionadas: os fatores que levam os estudantes a terem dificuldades para aprender análise combinatória, as estratégias e recursos de ensino que contribuem para aprendizagem de análise combinatória e o papel do professor em ambos os processos.

2 Formação e desenvolvimento de conceitos matemáticos

Para Vergnaud (1986), a Combinatória faz parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas e considera os problemas relacionados a essa área como produtos de medidas. Tais problemas envolvem uma relação ternária, isto é, três variáveis das quais uma quantidade é produto das outras duas. Para este autor, um campo conceitual pode ser definido como “um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão” (Vergnaud, 1986, p. 84). Já os conceitos, Vergnaud os considera como o tripé de três conjuntos: situações em que o conceito pode ser apresentado (a variedade das classes de problemas possíveis); invariantes, que são as diferentes propriedades do conceito relacionadas às diversas situações; e as representações simbólicas que podem ser utilizadas. De modo geral, Vergnaud (1986) destaca que o aluno, ao ter experiências com diversas situações de problemas, mobiliza diversos invariantes e representações simbólicas, favorecendo a apreensão dos conceitos.

Duval (2003), em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica, expande a discussão acerca das representações simbólicas, esmiuçando as maneiras que as relações entre as diversas representações interferem na compreensão dos conceitos matemáticos. Argumenta que o saber matemático se diferencia dos demais ao afirmar que a matemática “existe” por meio de representações que o sujeito realiza, desde a linguagem materna, gráficos, tabelas, a uma fórmula, algumas mais próximas do conhecimento prévio dos estudantes, outras mais distantes. De caráter peculiar, chama atenção para as transformações de representações como fundamental para compreensão matemática, entretanto, esse processo exige atenção, pois “passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto” (Duval, 2003, p. 22). Quando o grau de dificuldade das conversões é alto – é o que ele chama de não congruência – é necessário trabalhar com registros de representação auxiliares de transição. Isso ocorre, por exemplo, na resolução de problemas combinatórios (Montenegro, 2018).

3 Combinatória: definições e tipos de problemas

A análise combinatória é uma área da matemática que analisa estruturas e relações discretas, abrangendo, geralmente, um perfil de problemas preocupados em demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições, e contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas (Morgado *et al.*, 2016).

Nos anos iniciais e ensino fundamental, a análise combinatória resume-se em problemas de contagem baseados na realização de agrupamentos possíveis ao se combinar elementos de um conjunto com elementos de outro conjunto por meio de imagem e/ou material manipulativo, e do princípio multiplicativo, a partir de diagramas de árvores e por tabelas (Brasil, 2019). Já no ensino médio, baseia-se a partir da formalização do princípio fundamental da contagem, arranjos, permutações e combinações (Morgado *et al.*, 2016).

Os problemas combinatórios podem ser categorizados em problemas de existência, caracterizados pela verificação da existência de solução a partir das condições propostas; problemas de contagem, que investigam quantas soluções podem existir; problemas de otimização, que identificam a melhor solução para determinado problema; e problemas de enumeração, que objetivam desenvolver um procedimento para listar sistematicamente todas as soluções para um determinado problema (Batanero *et al.*, 1997). Na educação básica são abordados, geralmente, os problemas de contagem e de enumeração.

Pessoa e Borba (2010) estudaram problemas dessa natureza e realizaram uma classificação única levando em consideração as situações e propriedades de cada problema a partir da Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1991). Dessa forma, os tipos de problemas encontrados foram: produto cartesiano, que envolve dois ou mais conjuntos disjuntos que são combinados a partir da escolha de um elemento de cada conjunto independente que formam um novo conjunto de natureza distinta dos conjuntos disjuntos dados; arranjos, que são caracterizados pela escolha de elementos de um conjunto que, quando ordenados, geram possibilidades distintas; combinações, que são caracterizadas pela escolha de elementos de um conjunto que, diferentemente dos arranjos, a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas; e permutações, que se diferenciam dos arranjos por considerar todos os elementos do conjunto (Borba, 2010).

As representações simbólicas trabalhadas nas situações combinatórias podem ser: desenhos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, entre outras. Elas são usadas no processo de solução e na proposição dos problemas (Pessoa; Borba, 2010).

4 Metodologia

Considerando que o objetivo deste estudo é compreender os aspectos envolvidos com a baixa aprendizagem dos conceitos relacionados à análise combinatória, bem como que tipo de estratégias podem atenuar essa situação, foi elaborado um protocolo de revisão sistemática a partir das seguintes questões norteadoras: Como ocorre o processo de ensino e aprendizagem de análise combinatória na educação básica? Há problemas de ensino e aprendizagem de análise combinatória na educação básica? Quais as principais dificuldades dos alunos e dos professores? Que estratégias didático-metodológicas (incluindo recursos) estão sendo utilizadas para melhorar a aprendizagem dos alunos?

Optamos por tal tipo de levantamento pois permite investigar de forma sistemática a produção da área, identificando um grande *corpus* documental delimitado a partir das questões norteadoras. Diferentemente de um levantamento bibliográfico comum, a revisão sistemática da literatura explicita os critérios de sua elaboração por meio de protocolos específicos que, geralmente, apresentam bases de dados que foram consultadas, as estratégias de busca empregadas em cada base, o processo de seleção dos textos, critérios de inclusão e exclusão e o processo de análise, isto é, detalha o percurso que o pesquisador irá realizar para atender à questão de pesquisa (Galvão; Ricarte, 2019). A seguir, são descritas as etapas deste trabalho.

Como nossas questões norteadoras estão relacionadas ao ensino e aprendizagem de análise combinatória, foram utilizados os seguintes termos em português e inglês para localização das publicações: Combinatória AND Ensino AND Aprendizagem; Combinatório AND Ensino AND Aprendizagem; *Combinatorics* AND *Teaching* AND *Learning*; *Combinatorial* AND *Teaching* AND *Learning*.

As bases de dados consultadas foram: Portal de Periódicos da CAPES, Biblioteca Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), principais periódicos de Educação Matemática (Qualis A1 a B2), os anais dos dois grandes eventos nacionais da área (Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM; Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM), *Educational Resources Information Center* (ERIC) e *ScienceDirect*. Optamos por tais bases pois possuem pesquisas com ênfase em educação e temas relacionados. As buscas foram realizadas no período de 18 de novembro 2022 a 16 de dezembro de 2022 e contemplaram trabalhos publicados entre 2017 e 2022.

O levantamento dos textos foi realizado de forma diferente conforme as características de cada base de dados e da quantidade de publicações encontrada. Nas bases de dados Portal

de Periódicos da CAPES, BDTD e *ScienceDirect* foi possível utilizar os termos citados de forma combinada a partir do conector AND, bem como refinar a busca a partir do título, assunto e resumo, o que proporcionou filtrar textos que se adequaram à busca. Devido à pouca quantidade de textos encontrada na base de dados ERIC e nos principais periódicos de Educação Matemática (Qualis A1 a B2), optou-se por utilizar os termos Combinatória, Combinatório, *Combinatorics* e *Combinatorial*. No que se refere aos anais do ENEM e SIPEM, como não era possível utilizar conectores para realização da busca, foi utilizado a função pesquisar no sumário dos anais a partir dos termos Combinatória, Combinatório, *Combinatorics* e *Combinatorial*.

Na etapa de levantamento dos principais periódicos em Educação Matemática (Qualis A1 a B2), foram consultados 25 periódicos que são apresentados no Quadro 1.

Quadro 1: Periódicos consultados

ISSN	Título	Classificação
1980-4415	BOLEMA: BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ONLINE)	A1
1983-3156	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA (ONLINE)	A1
2014-3621	REDIMAT- REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS	A1
2238-0345	REVISTA INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (RIPEM)	A1
1665-2436	REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACION EN MATEMATICA EDUCATIVA	A1
2007-6819	REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA (RELIME)	A1
2178-7727	ACTA SCIENTAE: REVISTA DE ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	A2
2317-5125	AMAZÔNIA - REVISTA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS (ONLINE)	A2
2317-904X	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA	A2
2359-2842	PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ONLINE)	A2
2179-426X	REVISTA DE ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	A2
2176-4603	VIDYA (ONLINE)	A2
2176-1744	ZETETIKÉ	A2
2176-5634	JORNAL INTERNACIONAL DE ESTUDOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	A3
1981-1322	REVEMAT : REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	A3
2238-5800	REVISTA PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	A3
2176-2988	BOLETIM GEPEM (ONLINE)	A4
2358-4750	CAMINHOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA (ON-LINE)	A4
1980-3141	REMATEC. REVISTA DE MATEMÁTICA, ENSINO E CULTURA (UFRN)	A4
2238-2380	REVISTA DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	A4

2525-5444	REVISTA SERGIPANA DE MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	A4
2448-6469	ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMATICA EDUCATIVA	B1
2357-724X	BOLETIM ONLINE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	B1
2177-9309	EM TEIA - REVISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA IBEROAMERICANA	B1
1518-8221	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA-RS	B2

Fonte: os autores.

Após o levantamento inicial dos textos em cada base de dados, foi realizado o primeiro refinamento a partir da leitura dos resumos. Os critérios de exclusão adotados nesse primeiro momento foram: 1) Data (no caso de estar fora do período de 2017 a 2022; 2) Duplicação; 3) Tipo de publicação (no caso de não ser tese, dissertação, artigo ou relato de experiência); 4) Trabalhos não disponíveis gratuitamente para download; 5) Área / Temática (no caso de não ter foco na Educação Matemática).

Após a seleção dos trabalhos, foi realizado o segundo refinamento a partir da leitura dos textos, com ênfase na introdução, metodologia, resultados e conclusões. Nesse momento, os trabalhos que foram excluídos não explicitavam metodologias e/ ou recursos para o ensino de análise combinatória; não apresentavam discussões acerca das dificuldades dos estudantes em aprender análise combinatória; não abordavam discussões sobre o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem em análise combinatória; descreviam uma proposta de ensino, mas não haviam feito nenhum tipo de intervenção; e outros tratavam de tópicos de análise combinatória diferentes dos abordados na educação básica.

Esse processo se deu, de modo geral, a partir dos seguintes passos, conforme Tondeur *et al.* (2011 *apud* Vosgerau; Romanowski, 2014): análise do objetivo do estudo apresentado no artigo, ou seja, se o objetivo focaliza a questão definida para a revisão; avaliação da qualidade do estudo; leitura atenta do estudo para identificar os problemas levantados pelos autores; determinação da relação entre os estudos levantados; identificação de similaridades, diferenças e características únicas entre os estudos; e elaboração de sínteses e explicações.

5 Análise e discussão dos resultados

No Quadro 2, é apresentado com detalhes o levantamento dos textos realizado de acordo com cada base de dados.

Quadro 2: Resultado do levantamento dos textos

Bases de dados	Total de textos levantados		Refinamento inicial		Refinamento final	
Portal de Periódicos da CAPES	106		43		18	
BDTD	Dissertações	Teses	Dissertações	Teses	Dissertações	Teses
	41	7	27	2	18	1
Periódicos (A1 a B2)	95		38		11	
Anais do ENEM e SIPEM	21		18		2	
ERIC	22		3		1	
<i>ScienceDirect</i>	79		7		2	
Total	371		138		53	

Fonte: os autores.

No total, foram levantados inicialmente 371 trabalhos que, após a utilização dos critérios de exclusão e inclusão, resultaram em 53 trabalhos selecionados. No Quadro 3, os trabalhos foram organizados em áreas temáticas de acordo com o objetivo de cada pesquisa, a saber: propostas de ensino e/ou sequências didáticas, recursos para o ensino, formação de professores, estratégias de resolução de problemas e documentos curriculares e livros didáticos em que a análise combinatória está presente.

Quadro 3: Distribuição dos trabalhos por área temática

Área temática	Textos	Total
Propostas de ensino e/ou sequências didáticas	(Ambrozi, 2017) (Antonides; Battista, 2022) (Assis; Pessoa, 2018) (Bastos, 2019) (Bastos; Lopes; Victor, 2020) (Batista, 2020) (Brito; Almeida, 2022) (Coelho; Dias, 2022) (Jacoby, 2019) (Lara, 2017) (Lockwood; Reed, 2020) (Nunes; Vidal, 2017) (Oliveira, 2017) (Oliveira, 2018) (Pereira, 2021) (Rostirola; Siple, 2020) (Santos, 2019) (Silva; Guerra, 2017) (Silveira; Andrade, 2020) (Silveira; Andrade, 2022a) (Silveira; Andrade, 2022b) (Soto; Siy; Harel, 2022) (Tolio; Bisognin, 2017)	24



	(Vidal, 2019)	
Recursos para o ensino	(Aguilar, 2019) (Araújo; Santos, 2019) (Borba, 2017) (Carneiro, 2019) (Couto, 2019) (Gadelha; Borba; Montenegro, 2020) (Gadelha; Borba; Montenegro, 2021) (Georgiev; Andreev, 2021) (Montenegro; Borba; Bittar, 2020) (Santos, 2018) (Silva, 2019) (Tavares; Bogutchi, 2019)	12
Formação de professores	(Ferreira; Almeida, 2022) (Martins, 2018) (Martins; Borba, 2022) (Semanišinová, 2021) (Silva <i>et al.</i> , 2019) (Teixeira, 2020)	6
Estratégias de resolução de problemas	(Estevam <i>et al.</i> , 2019) (Lima; Borba, 2018) (Lockwood; Chenne, 2021) (Lopes; Alves, 2019) (Montenegro, 2018) (Salavatinejad; Alamolhodaei; Radmehr, 2021) (Souza; Castro; Barreto, 2020)	7
Documentos curriculares e livros didáticos em que a análise combinatória está presente	(Lima; Borba, 2019) (Lima, 2019) (Martins; Borba, 2021) (Teza, 2018)	4

Fonte: os autores.

De acordo com o Quadro 3, podemos observar uma concentração maior de trabalhos nas áreas propostas de ensino e/ou sequências didáticas e recursos para o ensino. Esse fato vem acontecendo também em outras revisões realizadas (Campos; Iglioni, 2021). A partir do processo de aproximações e distanciamentos por agrupamentos semelhantes realizado durante a leitura dos textos, foram estabelecidas as categorias a seguir que de alguma maneira respondem aos questionamentos desta pesquisa.

6 Obstáculos para aprendizagem de combinatória

São várias as situações relatadas pelos pesquisadores que dificultam a aprendizagem de análise combinatória na educação básica. Georgiev e Andreev (2021), Jacoby (2019), Silveira e Andrade (2020) e Teza (2018) destacam que a maneira de ensinar esse conteúdo vem contribuindo para uma aprendizagem baseada em fórmula-aplicação. Dessa forma, os estudantes são condicionados a “adivinhar” a fórmula que será utilizada naquela situação

combinatória a partir de parâmetros “treinados” pelos professores. Devido a isso, não há um enfoque na compreensão dos problemas combinatórios e, de certo modo, habitua o aluno a se preocupar em identificar os números do enunciado, substituir na fórmula e encontrar um número, desconsiderando a real interpretação do problema. Outros autores vão além e mencionam que, ao realizarem uma nova abordagem do conteúdo – com ênfase em reflexão e interpretação –, alguns estudantes questionavam ao docente se esse tipo de problema fazia parte da disciplina matemática (Batista, 2020; Martins, 2018; Pereira, 2021; Santos, 2019; Tolio; Bisognin, 2017). Ainda assim, muitos alunos consideram difícil aplicar a fórmula e entender os seus parâmetros⁵ (Coelho; Dias, 2022; Oliveira, 2017).

Como, em regra, há pouca discussão sobre os conceitos e definições relacionados à combinatória (Georgiev; Andreev, 2021), os estudantes não conseguem identificar os invariantes relacionados a uma determinada situação combinatória. Entre os invariantes relacionados às situações combinatórias, destaca-se como principal dificuldade dos alunos, o entendimento do invariante de ordem (Ambrozi, 2017; Borba, 2017; Coelho; Dias, 2022; Couto, 2019; Jacoby, 2019; Lima; Borba, 2018; Montenegro, 2018; Oliveira, 2017; Pereira, 2021; Rostirola; Siple, 2020). Essa não compreensão pode ser percebida quando o estudante repete os mesmos agrupamentos trocando apenas a ordem dos elementos, o que é mais comum no ensino fundamental (Borba, 2017; Lima; Borba, 2018; Montenegro, 2018; Rostirola; Siple, 2020) ou quando o estudante é acostumado a trabalhar com situações padronizadas, nas quais ele sabe de antemão qual tipo de agrupamento e, posteriormente, migra para situações combinatórias quaisquer (Carneiro, 2019; Jacoby, 2019).

As dificuldades destacadas em relação ao invariante de escolha e ao problema de não esgotamento de possibilidades são apresentadas em sua maioria na educação infantil e ensino fundamental (Borba, 2017; Lima; Borba, 2018; Pereira, 2021; Rostirola; Siple, 2020; Silva, 2019). Diante disso, o pouco repertório de representações simbólicas é identificado como um dos fatores que contribuem para a referida problemática (Carneiro, 2019; Coelho; Dias, 2022; Lima; Borba, 2018; Souza; Castro; Barreto, 2020), uma vez que é dada ênfase às representações de linguagem natural e fórmula, e pouca representação de enumeração sistemática é utilizada. A junção desses fatores contribui para que os alunos não consigam interpretar os problemas

⁵ Por exemplo, os problemas do tipo arranjo são caracterizados pela escolha de elementos de um conjunto que, quando ordenados, geram possibilidades distintas. Como invariantes deste tipo de problema, temos: (1) Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais; (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Fórmula: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

combinatórios corretamente (Carneiro, 2019; Coelho; Dias, 2022; Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Jacoby, 2019; Lima; Borba, 2018; Lopes; Alves, 2019; Martins; Borba, 2022; Oliveira, 2017; Rostirola; Siple, 2020). Vários estudantes não conseguem entender o que o problema solicita, converter o problema de linguagem natural para um outro tipo de representação para auxiliar na compreensão, mesmo sabendo realizar cálculos numéricos. Dessa forma, o cálculo relacional⁶ é pouco presente quando se fala em ensino e aprendizagem de análise combinatória (Pereira, 2021; Souza; Castro; Barreto, 2020).

Várias pesquisas vêm apontando os problemas do tipo de combinação como o que os alunos têm maior dificuldade (Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Lima; Borba, 2019; Montenegro, 2018). Entretanto, de um modo geral, há problemas de aprendizagem nos diversos tipos de problemas combinatórios (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação), principalmente, quando as situações-problema exigem várias etapas para sua solução (Coelho; Dias, 2022; Rostirola; Siple, 2020). Assim, apesar da análise combinatória possuir como pré-requisitos as operações fundamentais, é considerada por muitos estudantes o assunto mais difícil para aprender na educação básica (Lopes; Alves, 2019; Oliveira, 2018; Souza; Castro; Barreto., 2020). A situação se agrava com o fato de poucos conhecimentos prévios de combinatória serem identificados nos estudantes, o que é um indicativo de que o assunto não é abordado nos anos anteriores (Carneiro, 2019; Montenegro, 2018). Além disso, a imagem que os estudantes possuem sobre o ensino de matemática ao considerá-la uma disciplina difícil, com altas taxas de reprovação e pouco relacionamento com o cotidiano influenciam para esse quadro (Santos, 2018).

Não só os estudantes apresentam dificuldades relacionadas à temática de análise combinatória. Apesar de poucas pesquisas evidenciarem a situação docente e a análise combinatória, conforme Quadro 3, algumas investigações se debruçaram nessa temática. Autores como Assis e Pessoa (2018) e Nunes e Vidal (2017) salientam que os professores possuem um baixo repertório metodológico quando se trata de ensinar análise combinatória. Na educação infantil e ensino fundamental, essa situação faz com que os professores não consigam criar condições facilitadoras que promovam a aprendizagem. Já no ensino médio, o que se vê é um ensino baseado puramente por meio de fórmulas e algoritmos. Tal perspectiva contribui para que docentes estimulem uma aprendizagem baseada em exercícios padronizados que promovem a aplicação de fórmulas conforme os dados do problema, reduzindo,

⁶ O cálculo relacional envolve operações de pensamento necessárias para compreender os relacionamentos envolvidos nas operações que podem solucionar um problema (Pessoa, 2002).

consideravelmente, as oportunidades de refletir sobre o problema. Dessa forma, é comum ver soluções de problemas baseadas em algoritmos e fórmulas terem um valor superior a outras formas de solução (Ferreira; Almeida, 2022; Teixeira, 2020).

Além do fator metodológico, vários professores possuem pouco conhecimento específico de análise combinatória (Martins, 2018; Martins; Borba, 2022; Silva *et al.*, 2019). Muitos não tiveram acesso ao estudo de análise combinatória em sua formação (Assis; Pessoa, 2018; Bastos, 2019; Martins, 2018) e outros, mesmo com formação, não conseguiram aprender os conceitos de modo satisfatório (Coelho; Dias, 2022; Martins, 2018; Semanišínová, 2021). A ausência ou má formação em relação à aprendizagem de análise combinatória, bem como o baixo repertório metodológico geram insegurança no docente e faz com que muitos não abordem o conteúdo em sala de aula ou, os que tentam abordá-lo, não conseguem promover uma aprendizagem satisfatória (Martins, 2018).

As principais fragilidades dos professores referentes ao saber específico de análise combinatória estão relacionadas ao conhecimento de definições, propriedades e seus fundamentos, bem como à capacidade de interpretar uma expressão combinatória de diferentes maneiras e de ver e aplicar a mesma expressão combinatória em diferentes contextos (Semanišínová, 2021; Silva *et al.*, 2019). No aspecto metodológico, Martins (2018) destaca a má interpretação da metodologia de resolução de problemas, ao perceber professores aplicando exercícios de fixação e afirmarem que aplicam a referida metodologia. Como forma de sanar tais lacunas em seu processo formativo, os professores alegam que há poucos recursos e materiais relacionados à análise combinatória, realizando críticas ao material didático disponível ao professor (Assis; Pessoa, 2018). Priorizam a preparação das aulas a partir dos livros didáticos e consultas à internet, ignorando, por exemplo, uma formação continuada (Martins, 2018). Em relação aos livros didáticos, há críticas no que se refere à baixa quantidade de situações combinatórias e representações simbólicas apresentadas, bem como em relação à falta de uniformização da quantidade de situações problemas para cada conceito nas etapas do ensino fundamental (Martins; Borba, 2021). Assim, os aspectos discutidos até então fazem com que os professores considerem o conteúdo de análise combinatória como o mais difícil para ensinar e para aprender (Oliveira, 2018; Martins, 2018).

7 Estratégias e recursos de ensino em análise combinatória

Considerando a problemática envolvida com o ensino e aprendizagem de análise combinatória abordada anteriormente, várias pesquisas vêm sendo desenvolvidas com a

intenção de propor situações de ensino que possam contribuir para que tanto o ensino como a aprendizagem desse conteúdo sejam facilitados. Tais situações perpassam os diversos tipos de metodologia empregados pelos pesquisadores. Uma característica marcante em vários trabalhos é a ação docente de questionar os estudantes seja no processo de resolução de problemas ou mediando algum experimento a partir de algum recurso pedagógico (Antonides; Battista, 2022; Gadelha; Borba; Montenegro, 2020; Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Jacoby, 2019); Lockwood; De Chenne, 2021; Nunes; Vidal, 2017; Pereira, 2021; Rostirola; Siple, 2020; Santos, 2019; Silveira; Andrade, 2020; Soto; Siy; Harel, 2022; Tavares; Bogutchi, 2019; Tolio; Bisognin, 2017). Esses questionamentos devem ser realizados com intuito de criar processos, *insights* e estratégias próprias que estimulem a criatividade e autonomia dos alunos (Santos, 2019), para que favoreçam a reflexão sobre o que se está fazendo, de modo que seja criado um ambiente de diálogo e cooperação entre os estudantes e o professor (Antonides; Battista, 2022; Rostirola; Siple, 2020; Santos, 2019; Silveira; Andrade, 2020; Tavares; Bogutchi, 2019). Dessa forma, quando os estudantes realizarem perguntas sobre o conteúdo, é importante que os docentes evitem fornecer as respostas e utilizem as dúvidas para realizar novas perguntas (questões investigativas) que mantenham o caráter investigativo do problema e influenciem o modo de pensar do estudante em relação ao problema (melhor caminho a seguir), contribuindo para uma crença em seus potenciais (Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Jacoby, 2019; Silveira; Andrade, 2020; Tavares; Bogutchi, 2019; Tolio; Bisognin, 2017).

Alguns pesquisadores ressaltam que os questionamentos não devem ficar restritos às dúvidas dos estudantes. Desse modo, é interessante que os professores façam questionamentos a partir do momento em que o estudante cometa algum erro, com intuito de refutar ou validar alguma estratégia ou como mecanismo para manter os estudantes concentrados durante o período de ensino (Jacoby, 2019; Soto; Siy; Harel, 2022). Além disso, foi destacado como os questionamentos / problematizações podem contribuir para compreender invariantes, organizar e sintetizar as ideias e, por conseguinte, delimitar as estratégias de resolução para os diferentes tipos de problemas combinatórios (Gadelha; Borba; Montenegro, 2020; Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Rostirola; Siple, 2020; Santos, 2019; Tolio; Bisognin, 2017). Entretanto, Santos (2019) assinala a necessidade dessas problematizações serem planejadas com intuito de ter consciência das possíveis interpretações dos problemas e estratégias de solução, de modo que permita, por exemplo, que o professor realize diferentes reformulações dos problemas para que os estudantes compreendam os conceitos combinatórios envolvidos.

Para que as ações de questionar / problematizar façam sentido, o ambiente proporcionado pelos professores precisa valorizar a criatividade e a autonomia dos estudantes,

no sentido de que esses possam expor suas dificuldades, incompreensões e formas de pensar (Santos, 2019; Silveira; Andrade, 2020; Silveira; Andrade, 2022a). Por outro lado, os docentes precisam mostrar-se abertos a essas situações, saber ouvir sem intimidação e, ainda mais, consigam interpretar as diversas manifestações e, com isso, potencializar a aprendizagem dos estudantes (Coelho; Dias, 2022; Silveira; Andrade, 2020). É essa relação professor-aluno que irá proporcionar ao docente identificar os melhores momentos de problematizar situações em prol de potencializar a compreensão de algum conceito (Santos, 2019; Teixeira, 2020). Essa postura docente deve perpassar, inclusive, a liberdade do estudante de selecionar e testar diversas estratégias de solução, o que faz desenvolver gradualmente as habilidades referentes a esse processo (Nunes; Vidal, 2017; Rostirola; Siple, 2020; Teixeira, 2020).

O trabalho em grupo, nessa perspectiva, foi bastante discutido pelos pesquisadores como potencializador da compreensão dos conceitos combinatórios mediante as intervenções dos docentes (Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Jacoby, 2019; Nunes; Vidal, 2017; Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2022a; Silveira; Andrade, 2022b; Tavares; Bogutchi, 2019). O diálogo entre os integrantes do mesmo grupo e dos grupos distintos, seja durante a resolução dos problemas mediada pelos questionamentos dos professores ou no momento de expor as soluções encontradas para os demais grupos, possibilitou a evolução na capacidade de socialização, a superação de dificuldades, a compreensão dos invariantes relacionados a várias situações combinatórias e, inclusive, a compreensão de novos conceitos (Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Jacoby, 2019; Nunes; Vidal, 2017; Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2022a; Silveira; Andrade, 2022b; Tavares; Bogutchi, 2019).

Aliada à habilidade de dialogar com o estudante, a escolha dos problemas iniciais para abordar análise combinatória é tida como relevante pelos pesquisadores (Antonides; Battista, 2022; Bastos; Lopes, 2020; Nunes; Vidal, 2017; Santos, 2019; Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2020). Os problemas iniciais precisam ser bem planejados, uma vez que é a partir deles que o professor irá incentivar os estudantes a explorarem outros problemas com características diferentes de acordo com os invariantes combinatórios que se deseja evidenciar (Santos, 2019; Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2020). São esses problemas iniciais e a exploração de problemas derivados destes que irão proporcionar, por exemplo, uma compreensão satisfatória do princípio fundamental da contagem e dos demais tipos de agrupamentos (Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2022a). Bastos e Lopes (2020), Salavatinejad, Alamolhodaei e Radmehr (2021) e Silveira e Andrade (2020) complementam ao recomendar que os problemas iniciais possuam uma quantidade relativamente pequena de agrupamentos. É importante, também, que tais problemas contemplem diversas situações

combinatórias, pois permitem a discussão dos invariantes, no momento das transformações de conversão e de tratamento de cada registro (Montenegro, 2018).

A formulação de problemas por parte dos alunos é citada por algumas pesquisas como potencial para desenvolver o raciocínio combinatório (Salavatinejad; Alamolhodaei; Radmehr, 2021; Silveira; Andrade, 2022b). Tal perspectiva favorece a aproximação da matemática com o contexto real dos estudantes, uma vez que, observa-se que geralmente os problemas gerados se relacionam diretamente com as suas vivências. Assim, a matemática passa a fazer sentido, uma vez que não apenas a solução do problema deve ser levada em consideração, mas também as interpretações que explicam os interesses e funcionamento da sociedade (Bastos; Lopes, 2020; Santos, 2019; Silveira; Andrade, 2022b). Essa relação próxima dos problemas combinatórios à vida dos estudantes estimula uma aprendizagem significativa, pois os conhecimentos prévios são facilmente relacionados ao problema (Jacoby, 2019).

Nesse processo de exploração de problemas, as representações simbólicas tornam-se instrumentos eficazes para o ensino e aprendizagem de análise combinatória. Por exemplo, vários estudos destacam o uso de árvore de possibilidades, desenhos, tabela ou lista organizada como representações que facilitam a compreensão dos invariantes combinatórios (Batista, 2020; Lara, 2017; Martins; Borba, 2022; Montenegro, 2018; Semanišinová, 2021; Silveira; Andrade, 2020). Borba (2017), Montenegro (2018) e Silva (2019) complementam que tais representações quando usadas como registros auxiliares de transição contribuem para que os estudantes interpretem corretamente o problema e definam a melhor operação para solucioná-lo. A representação intermediária de árvore de possibilidades é a que mais possibilita transição de linguagem materna para registro numérico com maior taxa de sucesso, principalmente quando os problemas possuem uma maior quantidade de possibilidades (Montenegro, 2018; Montenegro; Borba; Bittar, 2020). Outra faceta das representações, é a oportunidade que os professores têm de perceberem de forma explícita os erros dos estudantes e o real nível da sofisticação do raciocínio, seja a partir de soluções erradas ou certas. Dessa forma, o docente pode realizar intervenções mais assertivas de modo que haja a compreensão satisfatória dos conceitos envolvidos (Borba, 2017).

Uma alternativa promissora para perceber de forma explícita os invariantes combinatórios é o trabalho com material concreto, principalmente quando se trata do público infantil (Araújo; Santos, 2019; Lara, 2017; Rostirola; Siple, 2020; Silva, 2019). Esses materiais permitem visualizar mais facilmente as representações dos elementos contidos nos enunciados dos problemas, visualizar e movimentar as figuras que, dessa forma, auxiliam no desenvolvimento da compreensão dos conceitos combinatórios (Lara, 2017; Rostirola; Siple,

2020; Silva, 2019). Alguns pesquisadores destacam, entretanto, que o simples uso desses materiais não é garantia de resultados satisfatórios. É importante a mediação do professor para que tais recursos sejam potencializados e possam contribuir no ensino e aprendizagem de análise combinatória (Araújo; Santos, 2019).

Outras metodologias também são trabalhadas com análise combinatória, mas em menor número. São os casos, por exemplo, da história da matemática (Bastos; Lopes, 2020) e modelagem matemática (Bastos, 2019; Batista, 2020). Em relação à história da matemática, destaca-se o papel motivacional em proporcionar ao estudante um maior interesse e inspiração, além de demonstrar o papel da matemática na sociedade, o que traz uma abordagem rica em significados (Bastos; Lopes, 2020). Já a modelagem matemática estimula a abordagem de análise combinatória a partir dos contextos vivenciados pelos estudantes, materializando-se, nesse caso, a partir das situações-problema. Assim, não só o conteúdo matemático é referenciado, mas também os fenômenos diários relacionados às atividades extraescolares (Bastos, 2019). Outro aspecto é referente à liberdade dos estudantes em escolher temas de seu interesse, bem como o ambiente de investigação que é gerado por essa abordagem de ensino (Batista, 2020).

Algumas estratégias de resolução de problemas são mencionadas nas pesquisas como bem-sucedidas para a aprendizagem dos alunos. Montenegro (2018) cita, por exemplo, a utilização de riscos nas possibilidades repetidas, o que permite ao estudante perceber que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades nos problemas de combinação. Soto, Siy e Harel (2022) destacam a representação física utilizada pelo professor para discutir as características da situação combinatória. Segundo os autores, tal estratégia permitiu que os estudantes exteriorizassem os conceitos envolvidos no problema e, dessa forma, pode intervir da melhor maneira junto aos estudantes. Assim, o professor pode gerar necessidades cognitivas nos estudantes, no sentido de mostrar que sem o domínio de conceitos combinatórios, determinada contagem seria impossível ou mal interpretada. Salavatinejad, Alamolhodaie e Radmehr (2021) desenvolveram um modelo que traz estratégias que são utilizadas para solucionar problemas combinatórios, a saber: usar outros problemas ou subproblemas relevantes, ter uma melhor compreensão da tarefa dada por meio de exemplos simples e representações visuais, e identificar relações entre conceitos combinatórios, fazer generalizações a partir de exemplos concretos. Lockwood e De Chenne (2021) argumentam que o uso de programação pode contribuir para codificação de problemas combinatórios.

Semanišinová (2021) enfatiza a necessidade de o professor aperfeiçoar sua capacidade de *feedback* relevante ao aluno. Para esse autor, o professor precisa entender porque os

estudantes não conseguem resolver determinado problema, saber escolher a representação ou método de solução adequado para a solução do problema, e identificar os conceitos e propriedades que estão interligados com a solução apresentada. Lockwood e Reed (2020) salientam que um caminho promissor é identificar formas abrangentes de pensar ou perspectivas que possam ajudar os alunos em várias situações de contagem. Os autores destacam o pensamento por equivalência, isto é, perceber aproximações entre problemas que se sabe e não se sabe resolver e, a partir daí, criar relações para solucionar novos problemas. Além disso, sugerem que esse modo de pensar contribui para o entendimento das fórmulas e o aumento da capacidade de solucionar diversos tipos de situações-problema de análise combinatória.

Algumas pesquisas analisaram a aplicação de algumas ferramentas durante o ensino de análise combinatória (Ambrozi, 2017; Gadelha; Borba; Montenegro, 2020; Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Santos, 2018; Tavares; Bogutchi, 2019; Vidal, 2019). O trabalho com jogos (digitais ou não) facilitou o entendimento e a compreensão do tema, tornando as aulas mais participativas, atraentes, produtivas, interessantes, dinâmicas e significativas para os alunos (Ambrozi, 2017; Santos, 2018; Tavares; Bogutchi, 2019; Tolio; Bisognin, 2017), bem como auxiliou na concentração e construção de estratégias (Ambrozi, 2017; Santos, 2018). O trabalho com o software Pixton foi relatado como uma alternativa interessante para ilustrações de possibilidades combinatórias, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório (Gadelha; Borba; Montenegro, 2020; Gadelha; Borba; Montenegro, 2021). O trabalho com criptografia foi abordado como atrativo e presente no contexto atual, o que chamou a atenção dos alunos e despertou-lhes a curiosidade (Vidal, 2019). Aguiar (2019) e Brito e Almeida (2022) trabalharam com técnicas de gamificação e destacaram o seu aspecto motivacional para aprendizagem.

A metodologia de resolução de problemas, sob a ótica de diversos teóricos, foi abordada na maioria das pesquisas. Alguns resultados são destacados: aumento no índice de respostas corretas, a consistência e coerência dos argumentos e a variedade de estratégias de resolução percebida (Bastos; Lopes, 2020; Lara, 2017; Nunes; Vidal, 2017; Santos, 2019; Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2020); perspectiva ativa, exploradora, propositiva de problemas e menor dependência do estudante em relação aos auxílios docentes (Silveira; Andrade, 2020; Silveira; Andrade, 2022b); valorização do processo de resolução e não apenas do resultado (Estevam *et al.*, 2019); influência positiva na visão didática de futuros professores (Nunes; Vidal, 2017); visualização de diferentes registros/representações de um mesmo objeto matemático (Lara, 2017); acompanhamento do crescimento cognitivo do discente (Silveira;

8 Considerações finais

A partir da presente revisão de trabalhos, fica clara a problemática envolvendo o ensino e aprendizagem de análise combinatória. As principais dificuldades apresentadas pelos estudantes estão relacionadas à dificuldade de interpretação dos problemas com ênfase na incompreensão dos invariantes combinatórios e baixo repertório de representações simbólicas, tendo como origem um ensino pautado majoritariamente por aplicação de fórmulas em situações padronizadas.

Já em relação às dificuldades dos docentes, as pesquisas indicam um baixo repertório metodológico ao ensinar análise combinatória e pouco conhecimento específico do conteúdo. Tais lacunas têm origem na formação docente deficiente que nem sempre o tópico de combinatória foi abordado, bem como no material didático disponibilizado, este com pouca diversidade de situações combinatórias, invariantes e representações simbólicas.

Podemos perceber, portanto, um ciclo que vem se repetindo: professores com lacunas no seu processo de formação em combinatória optando por não ensinar o referido conteúdo ou, quando realizado, priorizam um ensino com pouca reflexão e com ênfase em fórmula-aplicação, com situações combinatórias padronizadas (baixa diversidade) e, conseqüentemente, poucos invariantes e representações simbólicas discutidos.

Conforme Quadro 3, foi possível observar uma quantidade significativa de pesquisas que propuseram propostas e recursos de ensino. Percebe-se, desse modo, que os pesquisadores vêm buscando meios para que os professores aumentem o seu repertório metodológico para lecionar o conteúdo de análise combinatória de modo que ocorra uma melhor apreensão dos conceitos por parte dos estudantes. Nesse processo, as pesquisas destacaram o questionamento orientado realizado pelos professores como mecanismo que favorece o desenvolvimento dos estudantes ao lidar com problemas combinatórios. Abordagens e/ ou recursos de ensino – resolução de problemas, gamificação, história e modelagem matemática, jogos, softwares, material concreto – que deem autonomia aos alunos também são evidenciados, pois permitem que os estudantes exponham suas formas de pensar, permitindo intervenções mais assertivas por parte dos professores.

Mesmo com vários trabalhos apresentando resultados positivos, nota-se que os estudantes continuam com baixa aprendizagem em análise em combinatória. Outro fato observado é que algumas propostas são interessantes, mas que no contexto real do professor

possa ser difícil de implementar, seja devido à falta de recursos ou tempo necessário para realização da proposta. Em vários trabalhos que abordaram jogos e a metodologia de gamificação, houve destaque para o aspecto motivacional dos estudantes, entretanto, não houve discussão sobre a aprendizagem dos conceitos envolvidos. Dessa forma, abre-se oportunidade para novas pesquisas que favoreçam tanto a aprendizagem dos estudantes, bem como o entusiasmo docente em envolver-se com análise combinatória.

A partir do exposto, os resultados encontrados contribuem para o desenvolvimento de estudos futuros, uma vez que permitem que os pesquisadores se aproximem de forma detalhada dos contextos reais envolvendo o ensino e aprendizagem de análise combinatória. Tal fato é imprescindível para que seja possível propor possíveis caminhos que busquem estreitar a relação ensino-aprendizagem em combinatória.

Referências

AGUIAR, I. P. **O uso de técnicas de gamificação como auxílio a resolução de problemas no campo da análise combinatória**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2019.

AMBROZI, L. **Jogos em uma sequência didática para o ensino de análise combinatória**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2017.

ANTONIDES, J.; BATTISTA, M. T. A learning trajectory for enumerating permutations: applying and elaborating a theory of levels of abstraction. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 68, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.101010>.

ARAÚJO, G. R.; SANTOS, J. A. F. L. Materiais manipuláveis: recurso para a resolução de problemas de produto cartesiano por uma aluna com deficiência visual. **Educação Matemática em Revista – RS**, v. 2, n. 20, p. 157–162, 2019.

ASSIS, A. B.; PESSOA, C. A. S. Os três porquinhos e o lobo mal: literatura infantil e o ensino de combinatória. **Revista Educação Online**, n. 28, p. 60–82, 2018.

BASTOS, A. C.; LOPES, J. R.; VICTER, A. J. Reflexões acerca do ensino da análise combinatória no ensino médio. **REnCiMa**, v. 11, n. 3, p. 330–344, 2020. DOI: <https://doi.org/10.26843/rencima>.

BASTOS, T. A. **Modelagem na educação matemática para o desenvolvimento de conceitos de análise combinatória em uma escola particular no Vale do Rio Doce em Minas Gerais**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2019.

BATANERO, C. GODINO, J.; NAVARRO-PELAYO, V. Combinatorial Reasoning and its Assessment. In: GAL, I.; GARFIELD, J. B.; SEGAARD, M. (orgs.). **The assessment**

challenge in statistics education. 1997. p. 239-252.

BATISTA, M. S. **Princípio fundamental da contagem e modelagem matemática nos anos finais do ensino fundamental**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

BORBA, R. E. S. R. O raciocínio combinatório na educação básica. *In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador, 2010.

BORBA, R. E. S. R. Crianças de anos iniciais levantando espaços amostrais: relações entre pensamentos combinatório e probabilístico. **JIEEM**, v. 10, n. 2, p. 86–92, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2019.

BRASIL. **Sistema de Avaliação da Educação Básica**. Brasília: MEC, 2022.

CAMPOS, C. E.; IGLIORI, S. B. C. Teses e dissertações sobre o ensino e a aprendizagem da combinatória: perspectivas investigativas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, v. 16, p. 1–20, jan./dez., 2021. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e79022>.

CARNEIRO, S. O. **A metacognição associada a aprendizagem significativa: estudo envolvendo o conteúdo de análise combinatória**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2019.

COELHO, L. D. O.; DIAS, M. S. S. Contribuições da metodologia análise de erro para o ensino e aprendizagem da análise combinatória no ensino médio. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 13, n. 2, p. 223–249, 2022. DOI: <https://doi.org/10.51359/2177-9309.2022.253725>.

COUTO, M. A. C. **Resolução de problemas de análise combinatória e aplicação na lousa digital**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM. Brasília. Ano II. n. 2, p. 15-19, 1989.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. *In: MACHADO, S. D. A. (org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus, 2003, p. 11-33.

ESTEVAM, E. J. G.; PAULEK, C. M.; BASNIAK, M. I.; SCALDELAI, D.; FELIPE, N. A. Estratégias e procedimentos emergentes na resolução de questões de análise combinatória e o ensino exploratório de matemática. **JIEEM**, v. 12, n. 2, p. 221–233, 2019. DOI: <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2019v12n2p221-233>.

FERREIRA, A. G.; ALMEIDA, F. E. L. Organizações matemáticas no ensino de combinatória. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 11, n. 25, p. 433–458, 2022. DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.25.433-458>.

FREITAS, J. L. M. Uma reflexão sobre crenças relativas à aprendizagem matemática. **SérieEstudos – Periódico do Mestrado em Educação da UCDB**, n. 11, p. 99-110, 2001.

GADELHA, D.; BORBA, R.; MONTENEGRO, J. A. SOFTWARE PIXTON©: uma proposta de recurso para a ilustração de possibilidades combinatórias. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 12, n. 3, p. 1-18, 2021. DOI: <http://orcid.org/0000-0003-3570-9581>.

GADELHA, D. S.; BORBA, R. E. S. R.; MONTENEGRO, J. A. O uso de recursos didáticos na resolução de problemas combinatórios. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p. 419-441, 2020. DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.18.419-441>.

GALVÃO, M. C. B.; RICARTE, I. L. M. Revisão sistemática da literatura: conceituação, produção e publicação. **Logeion: Filosofia da Informação**, v. 6, n. 1, p. 57-73, 2019. DOI: <https://doi.org/10.21728/logeion.2019v6n1.p57-73>.

GEORGIEV, I.; ANDREEV, I. Methodical scheme for introduction of combinatorial compounds in mathematics education. **TEM Journal**, v. 10, n. 1, p. 414-420, 2021. DOI: <https://doi.org/10.18421/TEM101-52>.

JACOBY, K. **O ensino de análise combinatória pautado na aprendizagem, nos trabalhos em grupo e na comunicação matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2019.

LARA, W. M. **Problemas de contagem no ensino fundamental**: uma experiência com tarefas exploratório-investigativas e registros de representação semiótica. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017.

LIMA, E. T.; BORBA, R. E. S. R. Relações entre o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico na EJA. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 7, n. 13, p. 33-60, 2018.

LIMA, E. T.; BORBA, R. E. S. R. A influência da escolarização na resolução de problemas combinatórios e probabilísticos: um estudo realizado na educação de jovens e adultos. **EMR-RS**, v. 1, n. 20, p. 134-146, 2019.

LOCKWOOD, E.; DE CHENNE, A. Reinforcing key combinatorial ideas in a computational setting: a case of encoding outcomes in computer programming. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 62, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100857>.

LOCKWOOD, E.; REED, Z. Defining and demonstrating an equivalence way of thinking in enumerative combinatorics. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 58, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100780>.

LOPES, L.; ALVES, S. Itens rotineiros e não rotineiros de análise combinatória: reflexões a partir da produção escrita de estudantes do Distrito Federal 1. In: XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá, 2019.

MARTINS, G. G. **Ensino de análise combinatória**: um estudo das representações de professores de matemática do ensino médio público de São Mateus. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, 2018.

MARTINS, G. V.; BORBA, R. E. S. R. Do prescrito ao apresentado: a combinatória nos currículos de anos iniciais da EJA. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 36, p. 1-22, 2021. DOI: <https://doi.org/10.46312/pem.v14i36.12324>.

MARTINS, G. V.; BORBA, R. E. S. R. Os currículos de matemática moldados, em ação e realizados: uma análise da combinatória na educação de jovens e adultos. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 11, n. 24, p. 62-82, 2022. DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.24.62-82>.

MONTENEGRO, J. A. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias**. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

MONTENEGRO, J. A.; BORBA, R. E. S. R.; BITTAR, M. Representações intermediárias na aprendizagem de situações combinatórias. **Educação & Realidade**, v. 45, n. 1, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1590/2175-623687693>.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 338 p.

NUNES, C. B.; VIDAL, T. C. Resolução e formulação de problemas no desenvolvimento do raciocínio combinatório. **Com a palavra, o professor**, v. 2, n. 4, p. 80-104, 2017.

OLIVEIRA, M. S. **Uma proposta para o ensino-aprendizagem de análise combinatória na perspectiva de resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

OLIVEIRA, G. F. **Ensino de análise combinatória**: como classificar problemas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2017.

PEREIRA, E. R. S. S. P. **Tarefas de análise da produção escrita para o ensino de análise combinatória**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021.

PESSOA, C. A. S. Interação social: uma análise do seu papel na superação de dificuldades de resolução de problemas aditivos. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25., Caxambu, 2002. **Anais [...]**. Caxambu, 2002.

PESSOA, C.; BORBA, R. O raciocínio combinatório do início do ensino fundamental ao término do ensino médio. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador, 2010.

ROSTIROLA, S. C. M.; SIPLE, I. Z. Materiais lúdicos como instrumentos de ensino-aprendizagem-avaliação de análise combinatória no Ciclo de Alfabetização. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, e020016, 2020. DOI:

<https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id258>.

SALAVATINEJAD, N.; ALAMOLHODAEI, H.; RADMEHR, F. Toward a model for students' combinatorial thinking. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 61, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100823>.

SANTOS, E. R. **Board games como atividades experimentais no aprendizado de análise combinatória e raciocínio lógico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

SANTOS, E. V. **Contribuições da resolução, exploração e proposição de problemas ao processo de ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

SEMANIŠINOVÁ, I. Multiple-solution tasks in pre-service teachers course on combinatorics. **Mathematics**, v. 9, 2286, 2021. DOI: <https://doi.org/10.3390/math9182286>.

SILVA, A. C. **O uso de material manipulativo e a produção de desenhos no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação infantil**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

SILVA, D. P.; GUERRA, E. A. A aprendizagem de análise combinatória no ensino médio: uma proposta didática por meio da resolução de problemas. **REMAT**, v. 3, n. 2, p. 40-51, 2017.

SILVA, J. R.; RUFINO, M. A. S.; SILVA, C. C.; SILVA, E. J. Os obstáculos epistemológicos e didáticos na combinatória: uma análise sobre a compreensão dos professores da educação básica. In: XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019. Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá, 2019.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Ensino-aprendizagem de análise combinatória via exploração, resolução e proposição de problemas no ensino médio. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 17, e020017, p. 1-21, 2020. DOI: <https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id259>.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Análise combinatória no ensino médio: episódio de sala de aula via exploração, resolução e proposição de problemas. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 2, n. 23, p. 242–253, 2022a.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Proposição de Problemas de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula. **Revista de Educação Matemática**, v. 19, n. 01, e022019, 2022b. DOI: <https://doi.org/10.37001/remat25269062v19id615>.

SOTO, O.; SIY, K.; HAREL, G. Promoting a set-oriented way of thinking in a U.S. High School discrete mathematics class: a case study. **ZDM - Mathematics Education**, v. 54, p. 809-827, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01337-7>.

SOUZA, D. D. C.; CASTRO, J. B.; BARRETO, A. L. D. O. Desempenho, representações e

estratégias de estudantes do 5º ano do ensino fundamental na resolução de situações de combinatória. **Vidya**, v. 40, n. 2, p. 397-416, 2020. DOI: <https://doi.org/10.37781/vidya.v40i2.3367>.

TAVARES, P. C. M.; BOGUTCHI, T. F. Ensino da análise combinatória por meio de tecnologia móvel: um relato de experiência. **Abakos**, v. 7, n. 3, p. 22-34, 2019.

TEIXEIRA, P. J. M. Práticas de professores do ensino fundamental durante a resolução de problemas de contagem. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 2, p. 81-113, 2020. DOI: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p081-113>.

TEZA, D. R. **O ensino do raciocínio combinatório**: considerações a partir do movimento histórico e lógico. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

TOLIO, F. B.; BISOGNIN, E. Um estudo dos princípios aditivo e multiplicativo por meio de jogos. **Ciência e Natura**, v. 39, n. 3, p. 723-737, 2017. DOI: <https://doi.org/10.5902/2179460x27389>.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. In: **Análise Psicológica**, 1. 1986. p. 75-90.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad** - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Trillas. 1991.

VIDAL, S. C. **Criptografia como ferramenta educacional no ensino da análise combinatória**. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

VOSGERAU, D. S. R.; ROMANOWSKI, J. P. Estudos de revisão: implicações conceituais e metodológicas. **Rev. Diálogo Educ.**, v. 14, n. 41, p. 165-189, 2014.