revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ARGUMENTAÇÃO, DEMONSTRAÇÃO E COMPLEXIDADE: IMPACTOS NAS IDENTIDADES DE MATEMÁTICOS E DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

DOI: https://doi.org/10.33871rpem.2024.13.31.8970

Lênio Fernandes Levy[1]

Resumo: A investigação descrita nas páginas a seguir é de cariz teórico. Volta-se para a possibilidade de transformações nas identidades dos matemáticos e dos professores de matemática. Matemáticos e professores de matemática (escolar e universitária) diferenciam argumentar de demonstrar, vinculando a argumentação mais à matemática elementar ou escolar, e a demonstração mais à matemática científica ou acadêmica. Contudo, argumentar e demonstrar não se restringem, quanto às suas características, a processos distintos. Argumentação e demonstração são contrastantes, sim, e até opostas; porém, fazendo-se uso de uma lógica não aristotélica, pode-se afirmar que, além de oporem-se, argumentação e demonstração completam-se: trata-se do princípio complexo dialógico. Outros dois princípios complexos a que também se recorre, neste trabalho dissertativo, para lidar com argumentação e demonstração, são o recursivo e o hologramático. Crê-se que discussões epistêmicas no sentido aqui recomendado, abrangendo docentes e discentes, nos âmbitos escolar e universitário, contribuam para alterar a concepção acerca dos papéis que a argumentação e a demonstração desempenham nas dinâmicas matemáticas, estimulando modificações nas identidades dos matemáticos e dos professores de matemática (elementar e acadêmica).

Palavras-chave: Argumentação e demonstração. Complexidade. Matemática e ensino de matemática. Identidades profissionais.

ARGUMENTATION, DEMONSTRATION AND COMPLEXITY: IMPACTS ON THE IDENTITIES OF MATHEMATICIANS AND MATHEMATICS TEACHERS

Abstract: The investigation described in the following pages is theoretical in nature. It turns to the possibility of transformations in the identities of the mathematicians and the mathematics teachers. Mathematicians and mathematics teachers (of the school and of the university) differentiate between arguing and demonstrating, linking argumentation more to elementary or school mathematics, and demonstration more to scientific or academic mathematics. However, arguing and demonstrating are not restricted, in terms of their characteristics, to distinct processes. Argumentation and demonstration are contrasting, yes, and even opposites; however, making use of a non-Aristotelian logic, it can be said that, in addition to opposing each other, argumentation and demonstration complement each other: this is the dialogical complex principle. Two other complex principles that are also used in this dissertation, to deal with argumentation and demonstration, are the recursive and the hologrammatic. It is believed that epistemic discussions, in the sense recommended here, involving teachers and students, in the school and university contexts, contribute to changing the conception about the roles that the argumentation and the demonstration play in the mathematical dynamics, stimulating changes in the identities of the mathematicians and the teachers mathematics (elementary and academic).

Keywords: Argumentation and demonstration. Complexity. Mathematics and mathematics teaching. Professional identities.

[1] Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas (Área de Concentração: Educação Matemática) pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professor (Associado) da UFPA, lotado atualmente no Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN / UFPA). E-mail: leniolevy@ufpa.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8513-9460.

Considerações iniciais

Neste texto, sustentamos a noção de que argumentar e demonstrar, embora habitualmente entendidas como técnicas ou estratégias empregáveis/empregadas em campos divergentes do saber, são, grosso modo, pertencentes a um conjunto de ações cognitivas a que chamamos, *verbi gratia*, de **exposições metódicas**[2]. Com elas, almeja-se atestar a plausibilidade ou a legitimidade de pensamentos ou hipóteses. Logo, paradoxalmente[3], argumentar e demonstrar distinguem-se e unem-se.

Nas próximas laudas, propomos e justificamos que: [i] argumentações geram deduções, que, por sua vez, originam argumentações; [ii] há argumentos em demonstrações, e existem demonstrações no bojo de argumentos; [iii] argumentações e demonstrações, a um só turno, antagonizam-se e complementam-se; [iv] a matemática e o ensino de matemática não passam incólumes à argumentação e à demonstração.

Admitindo-se (inclusive nos universos docente e discente, a que nos dedicamos sobremaneira ao longo deste texto) a veracidade de tais propostas e justificativas, pode haver, em razão do respectivo incremento, mudanças nas identidades dos matemáticos e dos professores de matemática.

O professor de matemática escolar prioriza a argumentação, notadamente nos primeiros anos letivos. Já o da universidade enfatiza a demonstração. Apesar de, na escola e na universidade, percorrerem esses itinerários de aparências descoincidentes, as referidas pessoas sempre se veem (e são vistas) como ensinantes. Por oportuno, a dialogia entre ver-se e ser visto é responsável por estabelecer as identidades sociais e profissionais (DUBAR, 2005).

Os matemáticos e os docentes de matemática tendem a conceber a argumentação e a demonstração como artifícios irreconciliáveis, chegando a dizer (quando o dizem, pois é mais comum nada afirmarem) ao público em geral, e aos alunos em especial, que se trata de recursos efetivamente apartados e imunes a trocas recíprocas, dada a sua oposição mútua.

Tamanha ação impacta no modo com que as sociedades, e, nelas, os frequentadores de instituições educacionais, percebem a matemática escolar e a matemática universitária. A própria identidade dos matemáticos e dos professores de matemática sofre repercussões advindas dessa ação, na medida em que a identificação de um profissional (conquanto dependa

---

[2] Denominação sugerida pelo autor do artigo.

[3] A teoria filosófica da complexidade, com que simpatizamos, é composta por princípios (ou melhor, por paradoxos não absurdos) que a lógica aristotélica jamais validaria.

dele) não prescinde dos outros para ser forjada.

Aliás, frisamos que dois processos concorrem para a produção das identidades: [i] o biográfico (a identidade para si – como eu me vejo); [ii] o sistêmico (a identidade para o outro – como eu sou visto) (DUBAR, 2005).

Dando continuidade a nossas ideias, advogamos que a argumentação e a demonstração consistem em feitos humanos – não sendo, então, descobertas, e sim elaborações – voltados, basicamente, para um arremate conectado a averiguar ou a reconhecer.

Todavia, buscamos não cruzar tal ponto, restringindo-nos (nesta comunicação científica) ao que acabamos de mencionar. Ou seja, não pretendemos aguçar, manifestamente, a curiosidade dos leitores quanto à disputa histórico-epistemológica envolvendo os temas descoberta e elaboração.

Através dos atos de argumentar e de demonstrar, encadeiam-se[4] inferências[5], intentando-se uma solução ou um desenlace. Isso é corroborado quando assentimos que argumentar é "fornecer argumentos, isto é, razões a favor ou contra uma determinada tese" (PERELMAN, 1977 *apud* D'AMORE, 2007, p. 348). Outrossim, ao concordarmos com a noção de que demonstrar se ocupa da "verdade de uma conclusão, ou pelo menos de sua relação necessária com as premissas" (Ibidem, p. 348), robustecemos o nosso posicionamento.

Indo um pouco além, não é forçoso assumirmos que induzir também se associa, em alguma escala, aos processos demonstrativo (MORIN, 2002) e argumentativo, haja vista os dados coletados ou emergentes (na indução), ao precederem um estado ou um momento, serem capazes de auxiliar na aquisição ou na construção de elementos de uma conclusão admissível. Mas vamos, no artigo, deter-nos prioritariamente na díade argumentação-demonstração.

Argumentação, demonstração e três princípios da complexidade moriniana

Argumentar[6] e demonstrar dizem respeito a facetas distintas – a distinção, aqui, tem a ver, literalmente, com detalhes procedimentais – de uma espécie geral de atitude metodológica[7] (sendo essas facetas, por conta das ditas características peculiares, usadas via de regra em contextos discrepantes, se não opostos).

As particularidades procedimentais em jogo, em função de deterem aspectos únicos, são

---

[4] Encadeamento é "a transição que leva de um passo de raciocínio ao seguinte [...]" (D'AMORE, 2007, p. 357).
[5] Inferência é "cada passo do raciocínio" (D'AMORE, 2007, p. 357).
[6] A argumentação usada em filosofia é a que mais nos interessa realçar. Não desconsideramos, contudo, o verbo "argumentar" em seu sentido global.
[7] Ver exposição metódica (quer dizer, ver o ambiente que contém a argumentação e a demonstração).

requeridas ou formatadas por campos díspares do conhecimento; porém, igualmente, findam por demandar ou motivar esses diferenciados campos cognitivos (são os casos da demonstração, no que concerne à matemática acadêmica, e da argumentação, no que tange à matemática escolar).

Observa-se aí um movimento que condiz com o **princípio complexo recursivo**, segundo o qual: a causa gera o efeito, que retroage sobre a causa, (re) gerando-a ou contribuindo para a sua (re) geração (MORIN; 1999, 2001).

Estamos a lidar, repetimos, com duas variedades de um fluxo mental, qual seja o fluxo ou a dinâmica que visa a juntar informes anteriores ou premissas para galgar resultados ou conclusões aceitáveis.

Retomando o princípio moriniano da recursão, não nos poupamos de afirmar que argumentações filosóficas fomentam pensamentos lógicos, com elevado teor dedutivo, que, em contrapartida, originam (ou auxiliam na origem de) argumentações filosóficas.

Indo por caminho parelho, a matemática escolar (onde prevalece a ideia de argumentação) dá (ou ajuda a dar) margem à matemática acadêmica ou universitária (encarada como essencialmente dedutiva ou demonstrativa), a qual retroage sobre a matemática escolar, permitindo que múltiplos componentes desta sejam provocados ou apurados (Obs.: à vista disso, a argumentação produz a dedução, que, de seu lado, retroage sobre a argumentação, (re) produzindo-a ou contribuindo para a sua (re) produção).

Em outros termos, campos do conhecimento requeridos separadamente (ou em fatias contrastantes) pela argumentação e pela dedução – campos que, ressaltemos, também as requisitam – não impedem a obediência de ambas ao princípio complexo recursivo.

Demonstrar e argumentar completam-se, o que não impõe obstáculos (oferecendo, pelo contrário, motivos) a que se acarretem reciprocamente ou a que uma ação advenha de outra, em circularidade (princípio complexo recursivo) idêntica à que alia, digamos, computar e cogitar.

A propósito, a cogitação faz-se por intermédio da linguagem, que oportuniza à cogitação abarcar o que antecede a linguagem (atos, sensações, memórias, quimeras) e o que provém ou redunda da linguagem (explanações, discernimentos, problemas) (MORIN, 1999).

A cogitação não reprime a computação, aprimorando-se, deveras, a partir dela, conduzindo-a a um patamar superior de organização: a linguagem é, a um só tempo, computada (desde os sons ou os fonemas até as estruturas complexas de sintaxe) e cogitada (no âmbito da gênese e da ascensão do significado). O discurso é delineado no percurso recorrente ‘computação⇔ cogitação’ (MORIN, 1999).

Sem embargo, insistimos em evocar que essas técnicas (demonstrar e argumentar) são regulamentos carregados de minúcias que tornam cada um deles (cada regulamento) – a contar de um ponto estipulado – restrito aos processos a que se liga; processos, a seu turno, concatenados com as singularidades de disciplinas escolares e/ou acadêmicas. Voltemos, aqui, aos casos da demonstração-matemática-universidade e da argumentação-filosofia.

Contudo, em oposição a isso, não nos esqueçamos da argumentação na matemática superior, e da dedução na filosofia e na matemática elementar. Por que não nos olvidar? Porque, nada obstante as separações ou as exclusividades elencadas no parágrafo acima, inegavelmente há correlações (com destaque às proporcionadas por princípios complexos morinianos) que permanecem.

Campos afastados entre si exigem argumentação e, concomitantemente, dedução. Áreas vizinhas (ex.: matemática escolar e matemática universitária[8] – que talvez sejam áreas mais contíguas do que possamos esperar) também clamam por argumentação e, ao mesmo tempo, por demonstração (Obs.: cabe-nos iterar que argumentação gera dedução, que gera argumentação – princípio complexo da recursividade).

A própria filosofia, a exemplo da(s) matemática(s), trabalha com ambas, argumentação e dedução, o que, em tese, não se remete ao seu grau de distanciamento ou de aproximação de outros campos do conhecimento.

Relacionam-se o professor de matemática escolar predominantemente a argumentações e o docente de matemática universitária, junto com o matemático de carreira, majoritariamente a demonstrações. Ponderamos que tais *links* estejam incompletos (malgrado, na prática, transmitirem alguma credibilidade) e julgamos que essa incompletude (assumida, não como lacuna, mas como algo pleno) repercute na identidade dos matemáticos e dos professores de matemática.

Defendemos a ideia de que, na sala de aula, em nível escolar ou universitário, os professores de matemática possuem (ou necessitam haurir) condições de debater sobre argumentação e demonstração com seus alunos. E se o debate se efetuar nos moldes que preconizamos, encaminhar-se-á uma reforma, ainda que incipiente, nas identidades dos matemáticos e dos docentes de matemática. A reforma, após seu início, tem chance de malograr, mas igualmente de ganhar substância. Por sinal:

---

[8] Não analisamos, nesta construção textual, a polêmica acerca da inserção da matemática escolar em categoria diferente daquela pertinente à matemática acadêmica, embora tratemo-las, aqui, por intermédio dessa nomenclatura (escola x academia), que, bem ou mal, sugere (falsa ou verdadeiramente?) que são saberes diversos.

> Uma vez formadas, as construções intelectuais vivem uma vida própria, engajam-se em relações dialéticas com outras “construções” e espíritos humanos. Geram conseqüências com freqüência imprevistas para os seus autores... “Tornam-se conhecimentos públicos e, desse modo, propriedade pública. *Transcendem assim o espírito individual*...” (MORIN, 2002, p. 135).

A identidade é mutável. Ela não é concedida em definitivo ao nascermos; é construída na infância e reconstruída no decorrer da vida. O indivíduo nunca a elabora sozinho: ele subordina-se aos outros e às suas próprias orientações e autodefinições. A identidade resulta de contínuas socializações (DUBAR, 2005).

Fato similar, em termos identitários, ocorre com as “línguas”: ao serem acrescidas, no transcurso do tempo, de aspectos originados em certo universo sociocultural, elas passam a adquirir uma “identidade” em virtude do citado universo[9], como no fenômeno da língua francesa e da França, ou na conjuntura da língua inglesa e da Inglaterra. Aliás, franceses e ingleses vinculam-se (ou identificam-se pessoalmente) e são vinculados (ou são identificados pelos outros) com as suas línguas maternas.

Mas percebamos que, independentemente das suas especificidades, trata-se de “línguas”. Dada uma temática, compreender a sua globalidade e os seus itens locais (compreender, inclusive, que existem globalidade e itens locais) implica alargar a identificação e/ou a identidade respectiva.

Aproveitemos tal ensejo para mencionar que o francês e o inglês são línguas, ou melhor, incorporam-se à estrutura-mor chamada “língua”, que, por sua vez, através de suas regras e demais características, impregna o francês e o inglês.

Em resumo: as partes estão no todo, e o todo, com suas propriedades, encontra-se nas partes que a ele pertencem (Obs.: enunciado condizente com o **princípio complexo hologramático** – MORIN; 1999, 2001 –, extensivo aos elementos *argumentação* e *demonstração* quando confrontados com o sistema de atividades que os inclui e que nomeamos, nestas laudas, de *exposição metódica*).

Advogamos que argumentar e demonstrar são “as vestimentas de um manequim especial”. Asseveramos que a argumentação está na demonstração, a qual se situa na argumentação. Em aulas de matemática, na escola ou na universidade, assim como na matemática enquanto campo científico, argumenta-se na demonstração e demonstra-se na argumentação. “As roupas, interpenetrando-se, vestem o manequim”. Um dos intentos (se não

[9] Porém, o agrupamento sociocultural que engenha uma língua também recebe influxos formativos dessa língua (vide o princípio complexo da recursão – MORIN, 1999).

o objetivo central) deste artigo é, voltamos a salientar, a introdução de debates filosóficos (destacando a teoria da complexidade moriniana) sobre *argumentação* e *demonstração* em aulas de matemática elementar e acadêmica; introdução que, pouco a pouco, em nossa visão, possibilitaria o fomento de mudanças identitárias em docentes e em alunos (e – por que não? – em professores universitários que, além de ensinantes, são pesquisadores e/ou produtores de matemática científica).

Esboçamos, nas próximas linhas, um paralelo com uma parcela do assunto de cunho epistemológico que acabamos de levantar: Morin (2002) esclarece, mediante o princípio hologramático, algumas relações entre conhecimento e cultura.

Para ele, a cultura viabiliza ao pensamento a autoformação e/ou a ação de conceber; ela preenche, molda e ocasionalmente guia os conhecimentos; temos aqui, no entanto, uma imposição sociológica ou exterior em escala inferior àquela de um arranjo interno; a cultura e – por meio dela – a sociedade acham-se no interior do conhecimento humano (MORIN, 2002).

O conhecimento situa-se na cultura, e a cultura está dentro do conhecimento; qualquer pensamento individual é, por esse motivo, um evento de matiz cultural, e os pedaços do edifício cultural, de essência coletiva, renovam-se nos exercícios cognitivos dos sujeitos (MORIN, 2002).

Indo em frente: processos (ou, se quisermos, "jogos") distintos demandam (ou são demandados por) regras distintas. Entretanto, os processos 1 e 2 não deixam de ser, por definição, "processos"; bem como as regras 3 e 4 não se eximem da condição de "regras". Com isso, desejamos assegurar que argumentação e demonstração, apesar de seus contornos únicos, localizam-se sob um "guarda-chuva conceitual maior". Indícios desse "guarda-chuva" são os traços comuns aos atos de argumentar e de demonstrar (Obs.: aspectos do "todo" encontram-se nas "partes"!).

As regras em foco (digamos, regras 3 e 4), é bom que frisemos, têm uma função básica: integram determinado "conceito"; além disso, reiteramos que elas denotam construções humanas, ao invés de descobertas extraculturais. Sendo mais claros: para nós, argumentar e demonstrar estão sob um só "guarda-chuva" e são frutos da humanidade (não se descobre um argumento ou uma demonstração; elabora-se um argumento ou uma demonstração).

Esta dissertação questiona parcialmente Bruno D'Amore (sem desmerecer a sua incontestável contribuição à área da educação matemática), que dedica um capítulo de seu livro – vide D'Amore (2007) – à diferença (em visível detrimento da completividade) entre argumentar e demonstrar. Há singularidades, sim, caracterizando a argumentação e a demonstração. Todavia, defendemos que argumentar e demonstrar correspondem a "lados de uma moeda" (havendo aí inextricável interligação).

Os lados A e B, por definição, tornam concreto o "metal que serve para trocas". O fato de serem opostos (não enfraquece, e sim) fortalece, em nosso juízo, a percepção de aproximações ou de itens compartilhados entre eles, porquanto ambos, unidos, resultam na peça monetária. Referido ponto de vista poderia ser estendido por nós à comunicação entre a matemática escolar e a matemática acadêmica.

De resto, pensamos que convém, a esta altura, enunciar o **princípio complexo moriniano** a que se dá o nome de **dialógico**: existem contradições ou antagonismos não absurdos, contradições ou antagonismos que, simultaneamente, complementam-se (MORIN; 1999, 2001). Tais são os casos: [i] dos lados de uma moeda; [ii] da argumentação e da demonstração; [iii] da matemática escolar e da matemática acadêmica.

Morin (2002) utiliza-se da indução e da dedução para ilustrar o princípio dialógico: o raciocínio conecta os empreendimentos indutivo e dedutivo; a declaração "todos os homens são mortais" é consequência de uma indução que, fundamentando-se na constatação do caráter mortal da totalidade dos homens de que se tem notícia, alude a uma lei universal aplicável aos homens desconhecidos, do passado e do futuro; e a partir dessa lei deduz-se a mortalidade de todo ser humano.

Dessarte, a marca de chegada de uma indução transforma-se na marca de largada de uma dedução, evidenciando que indução e dedução, malgrado a contrariedade mútua (no que diz respeito a suas definições), são complementares (MORIN, 2002).

Haveria acréscimos significativos nas identidades de professores e de alunos, se esses assuntos fossem trabalhados, em aulas de matemática, junto com os conteúdos específicos tradicionais.

Caminhemos adiante! D'Amore (2007) afirma que a retórica antiga tendia a assumir a argumentação como um discurso para convencer os outros, enquanto que a demonstração era tida como algo para convencer a si próprio; nesse sentido, D'Amore (2007) detalha os objetivos da demonstração: [i] demonstrar para convencer-se e [ii] demonstrar para entender.

A nosso ver, nada impede que a inversão das qualidades e dos objetivos acima elencados seja válida, quer dizer: demonstração voltada para o convencimento dos outros, e argumentação dirigida para [i] convencer a si mesmo e para [ii] alcançar o entendimento.

Ora abordemos a seguinte citação: "Uma demonstração é correta ou não é correta, não há meio termo. [...]; a argumentação é comparável a um tecido cuja solidez global supera aquela de cada um dos fios que o compõem” (BECCHERE; GRUGNETTI; PUXEDDU; USELLI, 1996 *apud* D’AMORE, 2007, p. 351).

As noções de correção e de incorreção, mencionadas nas linhas anteriores por Becchere, Grugnetti, Puxeddu e Uselli (1996), embora destinadas (por tais autores) à caracterização do ato de demonstrar, não se restringem, em nossa avaliação, ao linguajar e ao corpo conceitual da matemática, incluindo – assim pensamos – a argumentação.

Existem, aliás, argumentos, com destaque aos filosóficos, que perduram faz séculos; argumentos que, dada a fortaleza de seu teor lógico, não foram desditos (parcial ou inteiramente) pelo tempo ou pelas mais diversas culturas. Exemplo disso é o conteúdo da Ética (SPINOZA, 2009). Botelho (2021) assevera que esse livro:

> [...] parece um tratado matemático, dividindo-se em proposições, demonstrações, axiomas e escólios – formato inspirado nos escritos do grego Euclides, o pai da Geometria, a quem Spinoza muito admirava. Os filósofos escolásticos medievais costumavam organizar suas obras de forma semelhante; mas não elaboraram suas teorias com a implacável liberdade de nosso Bento [Spinoza]. Descartes, por seu lado, também afirmara que toda filosofia deveria ser exposta em forma matemática; contudo, jamais colocou em prática sua própria sugestão. O jogo geométrico é manipulado pelo eremita da água-furtada [Spinoza] com a imperturbável perícia de um enxadrista, e o modo como expõe os argumentos demonstra sua confiança na natureza racional do Universo: é uma espiral lógica que avança por volutas estritamente lógicas até conclusões de sabor exorbitante e fantástico (BOTELHO, 2021, p. 149-150).

Isocronicamente, ainda refletindo sobre as colocações de Becchere, Grugnetti, Puxeddu e Uselli (1996 *apud* D’AMORE, 2007), concluímos que a validade geral de uma demonstração (vide a “solidez global do tecido”) é passível de manutenção ao inserirem-se, nela, encadeamentos e inferências consistentes (vide os “fios componentes do tecido”) segundo os parâmetros de hoje, substituindo-se encadeamentos e inferências frágeis, que foram, porém, aceitos como irretocáveis durante um punhado de décadas ou, com frequência, durante um bocado de séculos.

Dito com outras palavras: o tecido conserva a solidez global; entretanto, alguns de seus fios, às vezes, são trocados. Num cômputo amplo, demonstrações (e não apenas argumentações) são comparáveis, sim, a tecidos cuja firmeza supera, em determinada acepção, a dos respectivos fios.

Mais de uma demonstração, ao longo da história da matemática, teve partes (vide os fios) de sua estrutura aperfeiçoadas ou refeitas, decorridos, a contar de sua publicação inicial, múltiplos anos. E isso não abalou a resistência dessas demonstrações como um todo. É possível, inclusive, que se troquem, no futuro, inúmeros dos fios atuais, sem que a robustez global de um tecido venha a ser colocada em xeque.

Prossigamos! Consoante Becchere, Grugnetti, Puxeddu e Uselli (1996 *apud* D'AMORE, 2007, p. 351), "[...] em uma argumentação, nós nos apoiamos na lógica 'natural', na demonstração, na lógica formal; uma argumentação pode levar em conta o momento em que se desenvolve, a demonstração é, pelo contrário, atemporal".

Dada essa citação, cabe-nos perguntar novamente se a lógica argumentativa (em nosso julgamento, formal ou natural, a depender do caso analisado) em conformidade com os contextos, digamos, filosófico, literário e artístico, entre outros, e a lógica requerida pela demonstração matemática (prioritariamente uma lógica formal) não significam variedades e/ou variantes da "lógica como um todo", a qual, diga-se de passagem, é produto de elaborações histórico-culturais e/ou de uma sucessão de instantes ou de durações.

Lógica natural e lógica formal são, de nosso prisma, membros da própria "lógica". Ratificamos que, por definição, a lógica A e a lógica B entram na categoria daquilo a que se dá o nome de "lógica", a qual, por sinal, evolui e/ou tem evoluído no decurso do tempo, não se constituindo, mesmo no campo da matemática, em algo atemporal.

Os três princípios complexos a que nos referimos até agora valem aqui: [i] a lógica natural gera a lógica formal, que retroage sobre a lógica natural, (re) gerando-a ou contribuindo para a sua (re) geração (princípio recursivo); [ii] a lógica natural está na lógica formal, que está na lógica natural; a lógica natural e a lógica formal estão na lógica como um todo, a qual está na lógica natural e na lógica formal (princípio hologramático); [iii] a lógica natural contradiz a lógica formal e, a um só tempo, complementa-a (princípio dialógico).

Como amostra, no sentido especial do princípio hologramático, arrazoamos (ou salientamos a asserção de) que há, embora com intensidades distintas, lógica natural e lógica formal tanto na matemática quanto na filosofia ou na argumentação (com ênfase, no presente artigo, à argumentação filosófica); e que matemática, filosofia e argumentação (filosófica) acham-se, em alguma escala, no interior das lógicas natural e formal.

Persistindo em nossa defesa de relações entre argumentação e demonstração, cumpre-nos fazer comentários acerca da seguinte citação:

> (Na argumentação tem-se) a apresentação de várias teses e a sua verificação ou refutação com simples raciocínios, com exemplos imediatos ou com provas experimentais. E isso está em contraposição às demonstrações, que demandam, por outro lado, raciocínios articulados e muitas vezes distantes da

verificação intuitiva imediata (MARCHINI, 1987 *apud* D'AMORE, 2007, p. 351).

Com o escopo de frisar o quão tal pensamento é discutível, apontamos para o fato de que, de um lado, há/houve copiosas demonstrações consideradas válidas numa primeira ocasião, mas que, pouco depois, são/foram refutadas mediante uso de raciocínios simples, de casos particulares e/ou de provas experimentais.

Lakatos (*apud* SILVA; MOURA, 2015), ao assegurar que a matemática se modifica identicamente às ciências naturais – à base de contraexemplos, de críticas e de correções de teorias –, estremeceu as fundações universalistas da dedução.

De outro lado, informamos que não são (não foram) raras as argumentações (filosóficas, literárias etc.) que tomam/tomaram por lastro raciocínios encadeados e distantes da verificação intuitiva imediata.

Continuando em frente, ressaltamos que Duval (1995 *apud* D'AMORE, 1995) dedica-se a vários campos de pesquisa, entre eles: o tema da diferença entre argumentar e demonstrar. Trata-se, evidentemente, de posição assimétrica, ao menos em parte, à que preconizamos neste artigo.

Vem-nos à mente, contudo e de repente, a hipótese de que, ao tentar mostrar ou investigar elementos em prol dessa diferença, Duval (1995) – como o próprio D'Amore (2007) –, com recorrência, depare-se com indícios de que os *links* entre os dois processos (argumentação e demonstração) marquem presença em demasia nos diversos fluxos cognitivos e/ou nas variadas mobilizações mentais.

D'Amore (2007), reportando-se a Duval (1995), diz que (ao menos no início) para o estudante de matemática não existe tanta divergência entre argumentar e demonstrar; segundo D'Amore (2007) e Duval (1995), é necessária uma didática específica para a demonstração, discrepante daquela usada na argumentação; e tal didática, conforme esses autores, deve ser explícita e reflexiva.

De acordo com D'Amore (2007), na argumentação, ao nos deslocarmos de uma proposição a outra, operamos com regras implícitas que dependem das estruturas linguísticas e das representações escolhidas. Ele enuncia isso sobre a argumentação como se, na demonstração, muitas vezes, algo semelhante não acontecesse. Situar qualquer ação de demonstrar invariavelmente à margem dessa possibilidade é, para nós, uma inadvertência.

Já no que toca à demonstração, D'Amore (2007) assevera que, ao migrarmos de uma proposição à sua sucessora, utilizamos regras de derivação que devem (deveriam) ser explicitadas ou acordadas previamente. Esse autor oportuniza, em nosso entendimento, mais um hiato ao não admitir que processo similar (quer dizer: explicitação prévia de regras de derivação) ocorre com relativa abundância quando lidamos com a argumentação.

Aliás, D'Amore (2007) atribui certas qualidades a uma das duas modalidades (à demonstração, e não à argumentação, ou vice-versa), não assumindo que tais qualidades são ou podem ser igualmente pertinentes à outra modalidade.

Distanciando-nos, respeitosamente, de D'Amore (2007), se nós nos fundamentarmos na noção de que argumentar e demonstrar são as partes de uma totalidade que nomeamos de exposição metódica, então, ao valermo-nos do princípio complexo hologramático (MORIN; 1999, 2001), não ignoraremos que a totalidade em foco (exposição metódica), com suas propriedades, localiza-se no interior de cada uma das suas partes (argumentação e demonstração) e que estas, por conseguinte, possuem ou possuirão algo em comum.

Mas voltamos a enfatizar, concordantes com o princípio complexo dialógico (MORIN; 1999, 2001), que argumentação e demonstração – embora denotativas ou integrantes, grosso modo, de um só conceito – não deixam de ser reconhecidas por aspectos ou por detalhes que, de algum jeito, distinguem-nas [neste ponto (aludindo à *distinção*), enfim, comungamos com de D'Amore (2007)], criando-se aí um antagonismo cuja marca é a complementaridade (MORIN; 1999, 2001).

Na tabela (D'AMORE, 2007, p. 356) a propósito da qual engendramos comentários que se encontram em parágrafos anteriores deste artigo, concernentes à "passagem de uma proposição a outra" (tanto na argumentação quanto na demonstração), os seguintes itens (no que tange à argumentação e à demonstração) também são analisados pelo autor supracitado: [i] papel da proposição; [ii] papel dos conectores que ligam as proposições; [iii] modalidade de encadeamento entre proposições.

D'Amore (2007) advoga, relativamente a esses itens, no sentido de deixar clara a existência de diferenças irreversíveis (além da inviabilidade de conversação ou de simbiose) entre argumentação e demonstração. Vejamos:

Tabela 1 – Argumentação e demonstração

	Argumentação	**Demonstração**
Passagem de uma proposição a outra	Usam-se regras implícitas que dependem das estruturas lingüísticas e das representações escolhidas.	Usam-se regras de derivação que devem (deveriam) ser explicitadas ou acordadas previamente; as proposições

	Entra em jogo a metalinguagem e o significado de cada proposição; estamos, portanto, em plena fase semântica	não veiculam conteúdos semânticos particulares, mas intervêm pelo seu papel (exemplo: premissa, consequência), passo a passo, no decorrer da demonstração
Papel da proposição	Toda proposição tem um papel que depende do seu conteúdo retórico	Muda ou pode mudar de acordo com a situação e isso depende do quadro teórico
Papel dos conectores que ligam as proposições	Os conectores são os mesmos da linguagem natural e a sua função é a de manifestar relação entre proposições (exemplos: uma proposição é conseqüência de outra, ou a justifica; ou a contradiz, ou se opõe a ela, ...)	Os conectores são sempre retirados da língua natural, mas são apenas operadores, que agem sobre as proposições não tanto pelo que elas veiculam de um ponto de vista semântico, mas sim pelo seu estado operatório; portanto, podem, às vezes, ser omitidos ou subentendidos
Modalidade de encadeamento entre proposições	Ocorre por conexão extrínseca, por acumulação, agregam-se umas às outras	Ocorre pela substituição, como em um cálculo, aplicando regras; as novas proposições tomam o lugar, substituem as precedentes

Fonte: D’Amore (2007)

Entretanto, ao fazermos o exercício mental de inverter ou de trocar (na tabela), uns com os outros, os comentários atinentes a cada item (ou seja, quando cogitamos que aquilo que foi escrito sobre a argumentação passa a ser escrito – preservando-se as palavras da redação original – acerca da demonstração, e vice-versa), não conseguimos atestar redução de coerência no texto imaginário resultante.

Isso reforça a nossa conjectura de que argumentar e demonstrar são facetas de uma “única atividade”[10]. Em seus pormenores, a atividade desdobra-se nessas facetas, que são dizentes a regras específicas e/ou diferenciadas (aplicando-se a campos distintos: a demonstração sobretudo na matemática; a argumentação mormente na filosofia, na literatura etc.).

Isto é: [i] trata-se de facetas que espelham regras cujas singularidades são exigidas pelos campos de conhecimento a que, por hábito, destinam-se; [ii] de seu lado, os campos

[10] Vide a **exposição metódica**.

harmonizam-se (ou obedecem) às facetas/regras/singularidades. Ratificamos que tal movimento recursivo de causa e efeito condiz com a complexidade apregoada por Morin (1999, 2001).

Ao fim e ao cabo, atividades, facetas, regras e singularidades, nos casos em questão, referem-se ou correspondem a um tipo de fluxo mental (vide, de modo genérico, “exposição metódica”) e são (não nos cansamos de lembrar!) frutos da elaboração humana. Reafirmamos, pois, que argumentação e demonstração são facetas do mesmo conceito, além de procederem de construções, e não de descobertas.

De maneira análoga – retomando exemplos linguísticos históricos já mencionados neste artigo –, o francês e o inglês encaixam-se na categoria genérica de “língua” e, paralelamente, advêm da criatividade individual e coletiva do homem, ao invés de provirem de ordenamentos extra-humanos inexplicáveis.

Avancemos! É problemático o seguinte anúncio, mediante o qual D’Amore (2007, p. 358) busca alocar, peremptoriamente, argumentação e demonstração em campos irremediavelmente disjuntos: “Nas argumentações, a inferência é devida a relações semânticas entre elas, mais próximas à retórica do que à lógica [...]”.

Por que essa assertiva é digna de análise cautelosa? Porque a demonstração matemática é redutível, à semelhança da argumentação lógico-filosófica, da argumentação lógico-literária etc., a significados, a unidades linguísticas e/ou a elementos semânticos. Presumimos que a matemática guarde em si características retóricas, já que ela (a matemática) direciona-se, quando priorizamos a esfera sociológica, para a comunicação, para a explicação e/ou para o convencimento externo.

Também é inseguro, a partir do instante em que se tenta qualificar somente a demonstração, deixando-se de fora a argumentação, asseverar que: “Há encadeamento quando dois passos dedutivos são tomados um após o outro; para que o encadeamento seja aceitável, é necessário que a conclusão do primeiro passo seja considerada condição para poder usar uma regra de inferência aplicada no segundo” (D’AMORE, 2007, p. 358).

Voltamos, no presente artigo, a afirmar que tal sucessão articulada de atos não é uma exclusividade da demonstração e que marca, com frequência, boas e plausíveis argumentações, sobremaneira no contexto filosófico. Em suma, há propriedades argumentativas na demonstração, e existem caracteres demonstrativos na argumentação.

A passagem a seguir, de Botelho (2021), em que pese sua extensão incomum, é interessante para o atingimento do nosso intento de descortinar aspectos lógicos na ação de argumentar (Obs.: ademais, é uma belíssima adaptação de trechos da produção escrita de Platão):

> Em uma amigável tertúlia, Sócrates lança a pergunta: "O que é coragem?". O primeiro a responder é o personagem que dá título à obra:
> "Ora, meu caro Sócrates, não há dificuldade alguma nessa pergunta", diz Laques. "Corajoso é aquele que mantém seu posto mesmo sob ataque dos inimigos e não foge".
> "Ótima resposta, Laques", torna Sócrates, em tom tipicamente melífluo. "Acho, contudo, que minha pergunta não foi muito clara; a culpa, de certo, é toda minha. Mas devo dizer que sua resposta nada tem a ver com o que eu lhe perguntei".
> Laques fica perplexo – podemos até imaginá-lo enrugando a testa e erguendo uma sobrancelha. Sócrates prossegue:
> "Você me diz que corajoso é aquele que mantém seu posto e não foge ante a investida do inimigo. Mas, e o que dizer do soldado que *luta enquanto foge*? Tenho certeza, Laques, de que já ouviu falar dos citas."
> Os citas eram um antigo povo nômade que habitava a Ásia Central; eram famosos por seus excelentes cavaleiros, especialistas em um tipo de guerrilha arcaica. Sua tática mais famosa envolvia arqueiros montados: após um ataque, os guerreiros citas recuavam, disparando flechas para trás. Era uma técnica dificílima e perigosa: um pequeno deslize, e o arqueiro podia cair sobre as patas de sua própria montaria. Logo, era preciso muita coragem para realizar essa façanha; os citas eram merecidamente famosos por sua bravura. Contudo, a julgar pela definição de Laques, os velozes arqueiros asiáticos não seriam outra coisa além de covardes...
> Laques é forçado a admitir que seu conceito de coragem não se aplica a todos os casos imagináveis. Sócrates aponta, também, que costumamos chamar de *corajosas* pessoas que jamais se envolveram em uma luta física – o marinheiro que enfrenta os perigos do mar; os trabalhadores que acordam diariamente para se entregar a uma rotina de escassez e exaustão; e aqueles que ousam enfrentar a si mesmos, resistindo às tentações da desonestidade, do ganho fácil, da lisonja...
> "Muito bem, muito bem", Laques concorda. "A coragem deve ser algo mais amplo do que a capacidade de suportar um ataque inimigo no campo de batalha. Digamos, então, que coragem seja uma espécie de *perseverança do espírito*; isso se aplica a todos os casos que você mencionou."
> Contudo, Sócrates também desmancha esse argumento de forma igualmente cordial e implacável, fazendo com que o próprio interlocutor, de resposta em resposta, contradiga a si mesmo.
> "Laques, você acha que a coragem é algo bom ou algo reprovável?"
> "Algo bom, certamente."
> "E quanto à tolice? É também uma coisa boa?"
> "De forma alguma, Sócrates. A tolice é reprovável."
> "Imaginemos agora dois homens. Um sabe mergulhar, o outro nunca entrou na água. Ambos são desafiados a fazer um mergulho até o fundo do mar. Ambos aceitam o desafio, com grande *perseverança de espírito*. Qual dos dois é o mais corajoso?"
> "O que não sabe mergulhar, é claro."
> "Contudo, qual dos dois é o mais tolo? O que tem o devido conhecimento técnico das artes do mergulho ou o que se enfia na água mal sabendo nadar?"
> "O mais tolo, nesse caso, é o nadador diletante."
> "Você havia dito que a coragem é algo bom, enquanto a tolice é reprovável.

> Mas agora chegamos à conclusão de que, nesse caso, o mais corajoso não é o mais perseverante, e sim o mais tolo."
> "É fato, Sócrates."
> "Você continua achando que sua definição está correta?"
> "De forma alguma. Eu estava errado. Que coisa estranha, Sócrates! Parece que não consigo expressar em palavras o que parecia claro em meu pensamento; sinto que sei o que é a coragem, mas, se tento defini-la, ela me passa a perna e foge de mim." (BOTELHO, 2021, p. 53-55).

Eis outra citação de D'Amore que, em nossa visão, é delicada: "Cada vez mais a dedução é semelhante a um cálculo, enquanto a argumentação se parece com um discurso e, portanto, recai no terreno da retórica" (D'AMORE, 2007, p. 359).

Delicada por quê? Porque calculamos quando argumentamos; e porque, no sentido lato do termo, retórica diz respeito a comunicação, sendo a matemática concebida graças, em escala relevante, à comunicação – não haveria as matemáticas escolar e acadêmica sem comunicação. Arriscamo-nos, portanto, a dizer que, em certa acepção, não existiria matemática sem retórica.

Enfim, em nova tabela exposta por D'Amore (2007) na página 361, nada nos impede – em conformidade com o que já fizéramos diante de quadro constante em lauda anterior (qual seja a página 356) da obra em foco – de proceder a uma inversão (contrariando, de determinado jeito, o autor), ou melhor: o que é enunciado, item por item, para caracterizar demonstração também vale para qualificar argumentação, e vice-versa, prenunciando que, apesar de suas especificidades, podemos encarar demonstração e argumentação como lados, em permanente diálogo, de uma moeda. Vejamos:

Tabela 2 – Demonstração e argumentação (e menções a *explicação*)[11]

	Demonstração	**Argumentação**	**Explicação**
Como ocorre o enfoque do discurso?	escolhe-se um enunciado explícito que é chamado *alvo*	escolhe-se um enunciado-alvo que pode também permanecer implícito	toma-se um fato que é o próprio objeto de uma pergunta
A qual resultado se tende na produção do discurso?	a modificar o valor epistêmico do alvo e à determinação da sua verdade	a modificar o valor epistêmico do alvo por si mesmo ou por um interlocutor	a conectar o fato com outros, em um sistema de funcionamento (é necessário ter presente que há vários tipos de funcionamento)

[11] A coluna a propósito de *explicação* é componente da tabela original (ver D'AMORE, 2007), mas não focalizamos analiticamente a temática neste texto.

Que aspecto têm as proposições que são consideradas no discurso?	têm um estatuto operativo, determinado pelo estatuto teórico fixado preliminarmente	evidenciam-se os aspectos intencionais e extensionais	evidencia-se o conteúdo conceitual
Consideram-se relações de oposição entre as proposições?	limita-se à contradição no raciocínio por absurdo (ou seja, se produz uma contra-tese para depois refutá-la)	recorre-se a uma rede de oposições explicitada para relacionar proposições a favor e contra a tese	depende do tipo de explicação
Indicam-se as relações entre as proposições?	não se garante, depende do estatuto das proposições; pode-se indicar ou não	recorre-se a conectores argumentativos	recorre-se a conectores organizativos
Há continuidade do discurso?	é assegurada localmente pelo fato de que uma mesma proposição tem funções diferentes: uma vez aparece como conclusão, na seguinte, como premissa	é assegurada globalmente e tematicamente pelo fato de que são mantidas as referências a certos objetos nas proposições sucessivas	é assegurada de maneira extrínseca pela coerência cognitiva da descrição do sistema (examinado em cada caso)

Fonte: D'Amore (2007)

E repetimos: o fato de um lado ser A ou B não desmente a sua condição de "lado". A e B, por suas similaridades (as quais não nos eximimos de compreender, em cômputo global, como indicativas de conexões entre A e B), inserem-se no conceito de "lado".

Aumentando nosso arroubo de radicalismo, assumimos que talvez seja coerente a afirmação de que não se trate exatamente de dois lados (A e B) de uma moeda, e sim de "moeda unilateral" (metáfora jocosa?) abrangendo argumentação e demonstração.

Argumentação e demonstração são ou seriam, em linhas gerais, complementares. Todavia, em observância ao princípio complexo dialógico: argumentação e demonstração completam-se, unem-se e, concomitantemente, antagonizam-se, refutam-se. Convencer o leitor quanto a tal "contradição não absurda" é/foi um dos propósitos deste artigo.

Considerações finais

Ao longo desta comunicação científica, de caráter eminentemente teórico, apresentamos motivos em prol das ideias de que existem demonstrações no âmago de argumentos e de que há argumentos no cerne de demonstrações. Por muito que não se os acate, a matemática e o ensino de matemática não se isentam da argumentação e, ao mesmo tempo, da demonstração.

O docente de matemática, no colégio, dá primazia à argumentação, notoriamente nos anos iniciais da educação básica; já na universidade, o protagonismo cabe à demonstração. Na escola e na universidade, locomovendo-se por trilhas procedimentais opostas (argumentação *versus* demonstração), o professor dificilmente cessa de ver-se (e de ser visto) a ocupar a posição de quem leciona.

Tende-se, na sociologia, a aceitar a concatenação entre ver-se e ser visto como fenômeno responsável pela constituição das identidades sociais e profissionais. O outro é latente em cada um de nós e precisa reciclar-se para que nos transformemos em nós mesmos; a compreensão somente pode acontecer através da relação entre sujeitos; a indispensabilidade do outro é radical; a ligação com o outro situa-se na origem.

As dimensões identitárias "para si" e "para o outro" são inextricavelmente unidas e, a um só tempo, problemáticas no que toca à sua inseparabilidade. São indecomponíveis por não termos o condão de descartar o outro para conhecermos a nossa essência; são vinculadas mutuamente com feitio problemático porque a vivência do outro não é experienciada diretamente por nós, o que nos obriga a depender da linguagem para sabermos o que o outro imagina a nosso respeito.

Amiúde, os matemáticos e os ensinantes de matemática percebem a argumentação e a demonstração como recursos díspares, alegando (quando o fazem, pois é corriqueiro nada dizerem), à sociedade e/ou aos indivíduos, que se trata de artifícios antípodas e incomunicáveis entre si. Tamanha ação repercute na maneira segundo a qual as coletividades e, nelas, os estudantes enxergam a matemática da escola e a matemática da universidade.

As identidades dos matemáticos e dos professores de matemática são alvos de vários tipos de impactos, sem que se omitam aqueles (impactos) provenientes de atos de tal ordem, dado que a identificação de alguém, ainda que dependa dessa pessoa (perspectiva subjetiva) não se priva dos outros (perspectiva objetiva) para ser criada.

Por sinal, reiteramos que duas dinâmicas se coadunam para o surgimento das identidades: [i] a biográfica, real ou subjetiva (a identidade para si – como eu me vejo); [ii] a sistêmica, genérica ou objetiva (a identidade para o outro – como eu sou visto).

Normalmente, conectam-se (a insistência em frisar a conexão acompanhou-nos por todo o artigo) o docente de matemática elementar a argumentações e o professor de matemática superior, assim como o cientista matemático, a demonstrações. Avaliamos que tais associações possuem lacunas (a despeito de transmitirem algum teor de confiança quanto à sua veracidade) e ponderamos que essa incompletude exerce influxos na identidade e/ou no reconhecimento dos matemáticos de ofício e dos docentes de matemática.

Somos partidários do arbítrio de que, nas aulas de matemática, em âmbitos escolar e universitário, os professores mostrem-se competentes (ou adquiram qualificação) para questionar (e receber questionamentos de) seus alunos sobre argumentação e demonstração.

E se o debate ou a discussão efetuar-se nos parâmetros que buscamos reforçar no transcurso destas páginas, conduzir-se-á uma mudança, ainda que embrionária, nas identificações dos matemáticos e dos docentes de matemática.

A identidade é transitória. Ela não nos é atribuída definitivamente quando nascermos; começa a ser edificada na infância e é refeita no decorrer da nossa vida. O homem jamais a constrói sozinho: ele submete-se aos outros, bem como aos seus próprios norteamentos individuais e às suas autodefinições para moldá-la e remodelá-la. A identidade redunda de socializações ininterruptas.

Referências

BECCHERE, M.; GRUGNETTI, L.; PUXEDDU, S.; USELLI, E. **Argomentare e dimostrare... una problematica “interdisciplinare”**. In: GRUGNETTI, L.; IADEROSA, R.; REGGIANI, M. (Eds.). 1996, p. 51-61.

BOTELHO, J. F. **A odisseia da filosofia**: uma breve história do pensamento ocidental. São Paulo: Maquinaria Sankto Editora e Distribuidora Ltda, 2021.

D’AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DUBAR, C. **A socialização**: construção das identidades sociais e profissionais. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. 1995. Berna: Peter Lang. Trad. esp.: Sémiosis y pensamiento humano. Régistros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle. 1999.

MARCHINI, C. Argomentazione e dimostrazione. **L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate**. 10, 2, p. 121-140, 1987.

MORIN, E. **O método 3**: o conhecimento do conhecimento. 2. ed. Porto Alegre: Sulina, 1999.

MORIN, E. **Ciência com consciência**. 5. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2001.

MORIN, E. **O método 4**: as ideias. 3. ed. Porto Alegre: Sulina, 2002.

PERELMAN, C. **Argomentazione**, Verpete da Enciclopedia Einaudi. Torino: Einaudi, 1977.

SILVA, G. H. G. da; MOURA, A. Q. Uma aproximação entre o falibilismo de Lakatos e o trabalho com investigações matemáticas em sala de aula: possíveis aproximações. **Acta Scientiae: Revista de Ensino de Ciências e Matemática**. v. 17, n. 2, mai./ago. 2015, p. 277-293.

SPINOZA, B. **Ética**. Tradução de Tomaz Tadeu. São Paulo: Autêntica, 2009.