revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A LINGUAGEM MATEMÁTICA, A TEORIA DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA E A REGRA DA CADEIA: POSSÍVEIS RELAÇÕES

DOI: https://doi.org/10.33871/rpem.2024.13.31.8846

Gabriel Ribeiro Padilha[1]

Resumo: O artigo mostra uma pesquisa qualitativa cujo objetivo foi evidenciar a relação entre a Teoria dos Três Mundos da Matemática e a linguagem matemática presente em conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, especificamente, na Regra da Cadeia. Para o desenvolvimento do estudo, realizou-se uma revisão bibliográfica em trabalhos selecionados no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Buscou-se por pesquisas de mestrado e doutorado acadêmico utilizando um recorte temporal de 2018 até 2023, com o descritor "três mundos da matemática". A Teoria dos Três Mundos da Matemática oferece uma perspectiva intrigante sobre o papel da linguagem matemática na compreensão de conceitos complexos, como a Regra da Cadeia, que é uma ferramenta utilizada para encontrar a derivada de funções compostas. Em conclusão, a Teoria dos Três Mundos da Matemática destaca como a linguagem matemática desempenha um papel fundamental nos diferentes níveis de compreensão da Regra da Cadeia, desde as suas raízes, nas experiências perceptuais, até a sua formalização como um teorema matemático. Essa abordagem tende a oferecer subsídios para professores, pesquisadores e estudantes, destacando a importância do aprimoramento da linguagem matemática na construção do conhecimento e do pensamento.
Palavras-chave: Linguagem Matemática. Teoria dos Três Mundos da Matemática. Cálculo Diferencial e Integral. Regra da Cadeia.

THE LANGUAGE, THE THEORY OF THREE MATHEMATICAL WORLDS AND DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS

Abstract: The article presents a qualitative research that aimed to evidence the relationship between the Three Worlds of Mathematics Theory and the mathematical language present in concepts of Differential and Integral Calculus, specifically, in the Chain Rule. To develop the study, a bibliographic review was carried out in selected works in the Theses and Dissertations Catalog of the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES). Searches were made for academic master's and doctoral research using a time frame from 2018 to 2023, with the descriptor "três mundos da matemática". The Three Worlds of Mathematics Theory offers an intriguing perspective on the role of mathematical language in understanding complex concepts, such as the Chain Rule, which is a tool used to find the derivative of composite functions. In conclusion, the Three Worlds of Mathematics Theory highlights how mathematical language plays a fundamental role in the different levels of understanding of the Chain Rule, from its roots in perceptual experiences to its formalization as a mathematical theorem. This approach tends to offer subsidies for teachers, researchers and students, highlighting the importance of improving mathematical language in the construction of knowledge and thought.
Keywords: Mathematical Language. Theory of Three Mathematical Worlds. Differential and Integral Calculus. Chain Rule.

[1] Bacharel em Matemática – Ênfase Matemática Pura pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Mestrando em Ensino de Matemática no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). E-mail: gabrielribeiro_05@yahoo.com. – ORCID: https://orcid.org/0009-0000-1887-3916.

Introdução

A linguagem matemática desempenha um papel fundamental na formulação e na comunicação de ideias matemáticas, abrigando conjuntos de símbolos e notações que permitem descrever de maneira clara e precisa alguns conceitos. Através da linguagem matemática, é possível representar relações, operações, equações e teoremas de forma universalmente compreensível. Esta linguagem é essencial para a disseminação do conhecimento matemático e para o entendimento mútuo entre educadores matemáticos e estudantes.

Uma teoria que evidencia essa importância é a Teoria dos Três Mundos da Matemática (TTMM), desenvolvida pelo educador matemático David Tall (2013). A TTMM explora a relação entre a matemática e a cognição humana, postulando a existência de três "mundos" distintos na aprendizagem da matemática: conceitual corporificado, operacional simbólico e formal axiomático. A TTMM sugere que a aprendizagem da matemática envolve a transição entre esses mundos, à medida que os alunos progridem do entendimento de imagens mentais e objetos matemáticos para a manipulação de símbolos, e, finalmente, para a aplicação prática da matemática em contextos do mundo real.

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é um ramo da matemática que se concentra na análise das mudanças instantâneas e na acumulação de quantidades ao longo de intervalos. Este ramo estuda funções matemáticas que descrevem como grandezas variam em relação a outras variáveis. O cálculo diferencial se dedica à determinação das derivadas, que representam as taxas de variação instantâneas de uma função em pontos específicos. Por outro lado, o cálculo integral lida com a acumulação de quantidades ao longo de intervalos, sendo essencial para o cálculo de áreas sob curvas, por exemplo. O CDI é essencial para a obtenção e interpretação de soluções de diversos problemas práticos em outras áreas do conhecimento como física, engenharias, química, economia, biologia, entre outras.

A linguagem matemática desempenha um papel crucial no CDI, pois as derivadas e integrais são representadas através de notações matemáticas específicas, como o símbolo “$\frac{d}{dx}$” para derivadas e o uso do símbolo “$\int$” para integrais. O conhecimento dessa linguagem é essencial para descrever e resolver problemas envolvendo taxas de variação, áreas sob curvas e outros conceitos do CDI.

É amplamente reconhecido que a disciplina de CDI desempenha um papel fundamental no avanço do conhecimento científico. Contudo, as altas taxas de reprovação e desistência na disciplina e a identificação das principais razões por trás desse desempenho insatisfatório têm se tornado alvo de interesse de pesquisadores no campo da Educação Matemática.

Tendo em vista esse cenário, por meio de uma revisão bibliográfica procuramos examinar pesquisas de mestrado e doutorado acadêmico utilizando um recorte temporal de 2018 até 2023, com o descritor "*três mundos da matemática*", concentrando-nos naqueles que traziam a TTMM como parte do arcabouço teórico em seus estudos. Além disso, refinamos a busca, tendo como foco trabalhos que continham pesquisas que trouxessem o CDI como principal objeto matemático do estudo.

Assim, o presente artigo mostra uma pesquisa qualitativa cujo objetivo foi evidenciar a relação entre a TTMM e a linguagem matemática presente em conceitos de CDI, especificamente, na Regra da Cadeia.

Metodologia

Para o desenvolvimento do estudo, de natureza qualitativa (Oliveira, 2013), realizou-se uma revisão bibliográfica. Para tanto, fizemos uma seleção de trabalhos no Catálogo de Teses e Dissertações[2] da CAPES em dezembro de 2023. Buscamos apenas pesquisas de mestrado e doutorado acadêmico utilizando um recorte temporal[3] de 2018 até 2023 (5 anos), com o descritor *"três mundos da matemática"*. Assim, encontramos um total de 10 trabalhos.

Após leitura no resumo dos 10 trabalhos, resolvemos selecionar apenas aqueles cujo objeto matemático principal do estudo fosse algum conceito do cálculo (limites, derivadas e integrais). Sendo assim, mantivemos na nossa análise os 5 trabalhos apresentados no Quadro 1.

Além disso, no Quadro 2, organizamos as cinco pesquisas selecionadas com seus respectivos objetivos ou perguntas, de forma a compreender cada uma delas.

Em Soares (2018) foi investigado à luz da TTMM o conceito de limite de uma função em um ponto apresentado por estudantes de Licenciatura em Matemática, bem como as estratégias utilizadas na resolução de questões. Foi realizada uma análise de como era introduzido o conceito de limite em livros didáticos de cálculo que resultou em uma presença forte de características dos mundos simbólico e corporificado, especialmente do simbólico, com poucos aspectos do mundo formal. Em outro momento, foi aplicado um questionário com os alunos e uma entrevista com os professores da disciplina. Os resultados da entrevista indicaram

[2] em: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/. Acesso em: 24 jul. 2024.

[3] Compreendemos que esse critério temporal não abrange todas as pesquisas nessas circunstâncias, pois as dissertações e teses não são inseridas de forma imediata no sistema da CAPES.

que a abordagem dos professores perpassava pelos Três Mundos da Matemática, visto que eles declararam partir de exemplos gráficos e tabelas de valores de função para introduzir o conceito de limite, para, então, partir para a definição formal. Já o questionário, mostrou que a maioria dos alunos utilizava a linguagem natural (elementos da língua materna) para conceituar limite, predominando características do mundo corporificado, com breves passos no mundo simbólico, mas sem atingir componentes do mundo formal.

Quadro 1: Trabalhos encontrados de acordo com o procedimento metodológico empregado[4]

Nº.	Tipo	Ano	Origem	Título	Autor(a)
1	**D**	2018	UFN	O conceito de limite na formação inicial de professores de matemática: um estudo à luz dos três mundos da matemática	Gabriel de Oliveira Soares
2	**T**	2018	PUCRS	Monitoria de cálculo e processo de aprendizagem: perspectivas à luz da sócio-interatividade e da teoria dos três mundos da matemática	Jeronimo Becker Flores
3	**T**	2018	ANHANGUERA SP	O uso dos softwares GeoGebra e SimCalc para enriquecimento da imagem de conceito de derivada	Roberto Seidi Imafuku
4	**T**	2019	ANHANGUERA SP	Uma análise sobre a imagem de conceito de integral de alunos de engenharia na perspectiva dos Três Mundos da Matemática	Joelson de Araujo Delfino
5	**T**	2021	PUCRS	A construção do conceito de integral: uma viagem pelos três mundos da matemática	Rafael Winicius da Silva Bueno

Fonte: Dados da pesquisa.

Em Flores (2018), foi explorada a aprendizagem de cálculo em monitorias, utilizando os conceitos de sócio-interatividade de Lev Vygotsky e a TTMM de David Tall. Foi realizado um estudo de caso qualitativo da aprendizagem a partir da monitoria no contexto de Instituições de Ensino Superior no Rio Grande do Sul, seguido de entrevistas com os professores responsáveis e os monitores. Os resultados destacaram a importância da relação social (proximidade) entre monitores e estudantes, possibilitando um ambiente livre de tensões, em função de uma linguagem mais próxima, facilitando a comunicação e elevando as perspectivas da construção do conhecimento matemático. Além disso, os resultados indicaram que a

[4] Em “Tipo”, temos D para dissertação de mestrado e T para tese de doutorado. Em “Origem”, temos Universidade Franciscana (UFN), Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), Centro Universitário Anhanguera de São Paulo (ANHANGUERA SP) e Universidade Estadual de Londrina (UEL).

monitoria pode ser um ambiente de formação para futuros professores, promovendo a articulação entre teorias de aprendizagem e práticas pedagógicas.

Quadro 2: Objetivo(s) ou Pergunta(s) de pesquisa dos trabalhos selecionados

Autor	Objetivo(s) ou Pergunta(s) de pesquisa
Soares (2018)	Que características dos Três Mundos da Matemática propostos por Tall estão mais presentes nas estratégias de resolução de questões e na construção do conceito de limite de uma função apresentados por estudantes de dois cursos de Licenciatura em Matemática?
Flores (2018)	Como as monitorias de Cálculo auxiliam para o desenvolvimento do pensamento matemático na perspectiva dos Três Mundos da Matemática e da sociointeratividade?
Imafuku (2018)	Qual o papel das múltiplas representações presentes nos softwares SimCalc e GeoGebra no desenvolvimento das diferentes concepções de derivada e consequentemente na modificação da Imagem de Conceito de derivada de alunos de Licenciatura em Matemática?
Delfino (2019)	Qual é a Imagem de Conceito de Integral de alunos de Engenharia? Quais características dos Três Mundos da Matemática estão presentes nas respostas desses alunos?
Bueno (2021)	Que características dos Três Mundos da Matemática estão sendo trabalhadas na construção do conceito de integral, na formação inicial de professores de Matemática, no estado do Rio Grande do Sul, e como futuros docentes percebem a introdução desse conceito, a partir de uma prática alternativa, fundamentada no arcabouço teórico estudado?

Fonte: Elaborado pelos autores

Em Imafuku (2018), foi investigada a contribuição de softwares como GeoGebra e SimCalc para o enriquecimento da imagem do conceito de derivada por estudantes de Licenciatura em Matemática. Foram utilizados questionários e atividades específicas para a coleta dos dados, e, para a análise dos dados a TTMM (Tall, 2013), a Teoria da Imagem de Conceito e definição de conceito (Tall; Vinner, 1981) e as concepções de derivada (Thurston, 1994). Assim, mostrou-se que as representações dinâmicas dos softwares foram fundamentais para o desenvolvimento de concepções relacionadas à derivada. Foram observados ainda que, a longo prazo, a continuidade das atividades foi crucial para consolidar essas concepções na imagem do conceito dos estudantes.

Em Delfino (2019), foi aplicado um questionário com dez questões abertas, de forma a verificar o que os alunos, de um curso de Engenharia Civil, evocavam de sua imagem de conceito de Integral de Riemann e quais as características dos Três Mundos da Matemática estariam presentes nas suas respostas. A análise dos dados foi realizada à luz da TTMM (Tall, 2013) e da Teoria da Imagem de Conceito e definição de conceito (Tall; Vinner, 1981). A maioria dos alunos revelou elementos suficientes em sua Imagem de Conceito que lhes permitiu trabalhar com a Integral de Riemann no cálculo de área utilizando funções de uma única variável; entretanto, o mesmo pareceu não ocorrer quando se utilizou integral dupla para cálculo de volume de um sólido de revolução. Por fim, com relação aos Três Mundos da Matemática, foi constatado que nem todas as respostas revelaram simultaneamente características dos Três Mundos. Com isso, conjectura-se que a ausência ou presença de características específicas dos Três Mundos da Matemática não é determinante para a correção ou precisão de uma resposta.

Em Bueno (2021), foi investigada a evolução histórica do conceito de integral e seu ensino na formação de professores de Matemática no Rio Grande do Sul, utilizando a TTMM. Iniciando com a reconstrução do desenvolvimento dos conceitos do Cálculo desde a Mesopotâmia até o século XX, a pesquisa conectou essas ideias aos três mundos da matemática. Um estado do conhecimento analisou como pesquisas brasileiras têm aplicado essa teoria em programas de pós-graduação, enquanto a investigação dos livros didáticos destacou a introdução do conceito de integral na formação inicial de professores. Uma atividade de modelação foi conduzida com alunos de Cálculo II, cujas respostas a um questionário foram interpretadas através da análise textual discursiva. Os resultados revelaram que os acadêmicos iniciaram a compreensão do conceito de integral a partir dos mundos conceitual corporificado e operacional simbólico. Os futuros docentes valorizaram experiências mais práticas nas aulas, destacando que uma abordagem pedagógica menos centrada em manipulações algébricas e definições formais é motivadora e pode inspirar a atuação profissional futura.

Embora os trabalhos analisados não estejam diretamente vinculados à Regra da Cadeia, a abordagem dos autores na análise de outros objetos matemáticos, à luz da TTMM, serviu como inspiração e fundamento para a elaboração deste trabalho. A maneira como os conceitos matemáticos foram explorados e compreendidos pelos pesquisadores, conforme evidenciado em trechos específicos de suas pesquisas, desempenhou um papel crucial na estruturação deste estudo. Ao observar como a TTMM foi aplicada na análise de temas como limite, derivada, integral, percebemos que essa abordagem teórica oferece uma perspectiva enriquecedora e abrangente para a compreensão dos diversos elementos matemáticos. Dessa forma, este trabalho se inspira nas análises dos autores frente a outros objetos matemáticos e busca aplicar essas análises para a exploração da regra da cadeia.

Linguagem, língua materna e linguagem matemática

Nos cenários científicos, a linguagem desempenha um papel de extrema relevância para o progresso científico desde tempos antigos até os dias atuais. E no contexto educacional, mais especificamente no diálogo em sala de aula, a linguagem, tanto falada quanto escrita, é uma ferramenta fundamental na comunicação entre professor e aluno.

A palavra linguagem, segundo o dicionário Michaelis ([2024]), significa:

> 1 Faculdade que tem todo homem de comunicar seus pensamentos e sentimentos. 2 Conjunto de sinais falados, escritos ou gesticulados de que se serve o homem para exprimir esses pensamentos e sentimentos. 3 Faculdade inata de toda a espécie humana de expressão audível e articulada, produzida pela ação de língua e dos órgãos vocais adjacentes. 4 Faculdade inata de todo indivíduo de aprender e usar uma língua. 5 Qualquer meio utilizado pelo homem para se comunicar. 6 Uso da língua, segundo a situação, o meio social, o interlocutor etc.; registro. 7 Sistema de comunicação animal por meio de sons, cantos e outros meios. 8 Sistema de sinais desenvolvido a partir de uma língua e que funciona como meio de comunicação, em circunstâncias específicas. 9 Conjunto de sinais convencionados que permitem a construção e a transmissão de uma mensagem, apenas por aqueles que os conhecem; código. (Michaelis, 2015, on-line).

Assim, ao considerarmos a disseminação de conceitos matemáticos, é evidente a importância de dominarmos uma linguagem particular, a saber, a linguagem matemática. Essa necessidade surge devido à dificuldade de tentarmos comunicar conhecimentos matemáticos apenas por meio da linguagem materna.

O desenvolvimento do pensamento matemático pode ser modelado por diversos fatores, como maturação biológica e diferenças culturais. Pensando neste último, encontra-se a língua materna. Considerando o processo de ensino e de aprendizagem, o contato direto com a língua materna impacta diretamente no desenvolvimento de habilidades matemáticas. De forma a exemplificar esse impacto, trazemos a citação de Geary et al. (1996) quando destacam que

> Nas línguas do Leste Asiático, a estrutura de base 10 do sistema numérico é representada de forma transparente na própria nomenclatura dos números. Por exemplo, para os nativos da China, os números 11, 12 e 13 são traduzidas como dez um, dez dois e dez três, respectivamente. O fato de 11, por exemplo, ser composto por uma única dezena e uma única unidade é óbvio na palavra numérica chinesa associada, mas não na palavra numérica inglesa eleven (Geary et al., 1996, p. 2).

O número 11, em português, “onze”, também não traz em sua nomenclatura nenhuma pista que leve à associação semântica da quantidade descrita pelo número. Portanto, a maneira como os números são estruturados nas línguas maternas, como as diferenças nas nomenclaturas dos números encontradas nas línguas chinesa, inglesa e portuguesa, têm potencial de proporcionar para aqueles que possuem o chinês como língua materna uma certa "vantagem" no processo de aprendizado.

A linguagem matemática é uma forma especializada de comunicação que os profissionais formados e estudantes de matemática usam para representar, descrever e manipular conceitos e relações matemáticas. Ela é uma linguagem precisa e os seus símbolos representam conceitos, projetada para ser clara, concisa e universalmente compreensível. A linguagem matemática é a espinha dorsal da matemática como disciplina e é essencial para a resolução de problemas, a formulação de teoremas, a construção de modelos e a comunicação de resultados matemáticos.

A linguagem matemática se baseia em vários elementos, incluindo:

- Símbolos e Notações: os símbolos matemáticos são usados para representar números, operações, relações e variáveis. Por exemplo, os símbolos $+$, $-$, $\times$, $\div$, $<$, $>$, $\int$ e letras como x e y são usados em expressões matemáticas.
- Fórmulas e Equações: as fórmulas e equações matemáticas são expressões que relacionam diferentes quantidades matemáticas. Elas são fundamentais para descrever relações matemáticas e para resolver problemas.
- Conceitos e Definições: A linguagem matemática também inclui a definição precisa de conceitos matemáticos, como *função*, *derivada*, *integral*, *conjunto* e muitos outros. Essas definições estabelecem as bases para a compreensão de conceitos matemáticos.
- Lógica e Demonstrações: A lógica é uma parte fundamental da linguagem matemática. Os matemáticos usam argumentos lógicos para deduzir conclusões a partir de premissas. As demonstrações matemáticas são construídas utilizando a linguagem matemática de forma rigorosa e lógica.

Assim, a linguagem matemática é a linguagem da matemática; um conjunto de ferramentas poderosas que permite àqueles que lidam com matemática a explorarem e explicarem o mundo dos números, das relações e das estruturas matemáticas de maneira clara e precisa. Ela é essencial para o progresso e a compreensão da matemática como disciplina e tem aplicações em uma ampla gama de campos, da física à engenharia, da economia à ciência da computação.

Concluímos essa seção com as palavras de Morais Filho (2007) ao afirmar que "[...] é necessário despertar em professores do Ensino Médio, e em nossos jovens alunos, o espírito crítico, o raciocínio correto e o cuidado com a linguagem, para que repassem esses conhecimentos às próximas gerações".

Teoria dos Três Mundos da Matemática

A TTMM foi proposta pelo educador matemático britânico David Tall para descrever diferentes níveis de abstração na compreensão matemática. Essa teoria ajuda a explicar como os estudantes progridem na compreensão matemática e como os professores podem apoiar esse desenvolvimento.

Assim, no ano de 2013, David Tall viu seu trabalho reconhecido com a publicação do renomado livro "Como os humanos aprendem a pensar matematicamente: explorando os três mundos da matemática"[5], no qual propusera sua articulação teórica. De acordo com Tall (2013), existem três distintos domínios de conhecimento na área da matemática: o primeiro se concentra na exploração de objetos e suas características; o segundo se inicia com a aritmética e progride para a álgebra, incorporando simbolismo cada vez mais complexo; e, por fim, o terceiro, originado a partir do estudo acadêmico avançado da matemática pura e, consequentemente, adotando uma abordagem mais formal.

Assim, a TTMM postula a existência de três "mundos" distintos na aprendizagem da matemática: conceitual corporificado; operacional simbólico; e, formal axiomático.

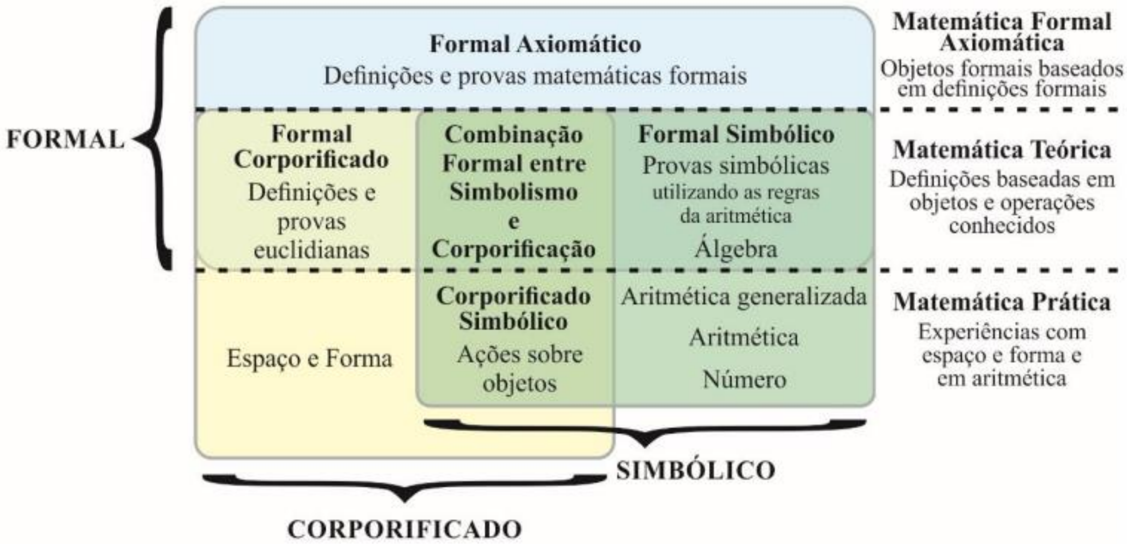
> *Corporificação conceitual* se baseia nas ações e percepções humanas, desenvolvendo imagens mentais que são verbalizadas de modo cada vez mais sofisticado e tornam-se entidades mentais perfeitas em nossa imaginação. *Simbolismo operacional* cresce além de ações físicas dos procedimentos matemáticos. Enquanto alguns alunos podem permanecer em um nível processual, outros podem conceber os símbolos de forma flexível, como as operações a realizar e também operar, por meio de cálculo e manipulação. *Formalismo axiomático* se baseia no conhecimento formal de sistemas axiomáticos especificado pela definição cujas propriedades são deduzidas por provas matemáticas[6] (Tall, 2013, p. 16-17, grifo do autor, tradução nossa).

[5] Título original: "How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics".
[6] No original: "*Conceptual embodiment* builds on human perceptions and actions developing mental images that are verbalized in increasingly sophisticated way and become perfect mental entities in our imagination. *Operational symbolism* grows out of physical actions into mathematical procedures. Whereas some learners may remain at a procedural level, others may conceive the symbols flexibly as operations to perform and also to be operated on through calculation and manipulation. *Axiomatic formalism* builds formal knowledge in axiomatic systems specified by set-theoretic definition, whose properties are deduced by mathematical proof."

O primeiro, conhecido como "mundo conceitual corporificado," tem suas raízes nas percepções e ações que ocorrem no mundo real, evoluindo gradualmente para a construção de imagens mentais de crescente complexidade. Neste contexto, a manipulação direta de objetos físicos não é necessária, pois o indivíduo pode explorá-los mentalmente, analisando-os e formando conjecturas sobre suas propriedades ou situações específicas, como, por exemplo, a concepção de uma linha perfeitamente reta.

No quadro teórico da TTMM (Figura 1) a "corporificação" transcende as experiências corpóreas, englobando também a exploração mental. Além da observação, descrição, ação e reflexão sobre objetos físicos, as experiências mentais desempenham um papel fundamental. Representações visuais, como figuras geométricas e gráficos, são meios de corporificação, permitindo análises detalhadas. No mundo corporificado, a validação ocorre por meio da intuição e visualização, dispensando frequentemente demonstrações formais. A linguagem, nesse primeiro mundo, é descritiva e comum, facilitando a relação entre objetos e conceitos matemáticos, sem a necessidade de formalismos ou terminologia técnica específica. “Ou seja, algo é verdadeiro, se parece ser ou [...] se as experiências realizadas acabam ocorrendo da forma como se prevê” (Bueno; Viali, 2019, p. 55).

Figura 1: Interação entre os Três Mundos da Matemática



Fonte: Retirado de Bueno e Viali (2019, p. 45), adaptado de Tall (2013).

O segundo, o “mundo operacional simbólico”, é uma dimensão do aprendizado matemático que se fundamenta na utilização de símbolos em tópicos da aritmética, da álgebra e do CDI. Esse mundo tem sua origem em ações que gradualmente evoluem para processos matemáticos representados por meio de símbolos e manipulações, em que os símbolos representam ações e percepções originadas no mundo corporificado. Por exemplo, ao estudar o conceito de derivada, o conjunto de símbolos $\frac{df}{dx}$ implica a percepção de que a função f deve ser derivada em relação a x e a ação de derivação aplicando regras (como $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$) ou ainda usando outras técnicas como a regra da cadeia (regra de derivação utilizada para encontrar a derivada de funções compostas, como, por exemplo, para derivar a função $f(x) = sen(x^2)$, tomamos uma variável u, onde $u = x^2$ e temos $\frac{d(sen(u))}{du} \cdot \frac{d(x^2)}{dx} = cos(u) \cdot 2x = 2xcos(u)$, assim $f'(x) = \frac{df}{dx} = 2xcos(x^2)$).

Neste contexto, no mundo simbólico, diferentemente do mundo corporificado, a validação exige mais do que a mera percepção da verdade. É necessário realizar cálculos numéricos ou manipulações simbólicas para demonstrar que algo é verdadeiro. Os símbolos têm a capacidade de comprimir conceitos complexos e ações matemáticas, permitindo que sejam facilmente reutilizados quando necessário. A linguagem é mais precisa e exige o uso adequado dos símbolos, pois estes têm significados específicos que devem ser respeitados nas manipulações simbólicas e cálculos realizados para validações.

O terceiro mundo da TTMM é conhecido como o "mundo formal axiomático". Neste mundo, o desenvolvimento do conhecimento matemático é conduzido a partir de axiomas que geram teoremas, corolários e outras proposições. As demonstrações matemáticas neste contexto são rigorosas, baseadas em deduções formais e linguagem precisa. Aqui, a ênfase recai na construção lógica de estruturas matemáticas complexas (como por exemplo, anéis e grupos) por meio da formulação cuidadosa de axiomas que definem essas estruturas em termos de propriedades específicas. Difere significativamente dos outros dois mundos propostos por Tall (2013), uma vez que não se baseia apenas em objetos sensoriais ou experiências corporificadas. Em vez disso, ele se apoia em experiências mentais cada vez mais abstratas que levam à criação de axiomas precisos e definidos para descrever conceitos matemáticos. A linguagem utilizada é formal e precisa, e as definições são estritamente estabelecidas, isso implica em sua validação, por exemplo, um teorema é verdadeiro, quando puder ser demonstrado utilizando de axiomas e definições.

É fundamental enfatizar que, embora tenham suas particularidades, pode haver sobreposições entre essas três esferas (Figura 1), fazendo com que os estudantes potencializem a capacidade de incorporar elementos de cada uma delas em seu desenvolvimento cognitivo.

Como podemos observar na Figura 1, o quadro teórico da TTMM articula os movimentos do pensamento matemático entre os três mundos, em função das três formas distintas de se agir na matemática, sendo classificadas como matemática prática, matemática teórica e matemática formal.

Segundo Tall (2013), quando estamos imersos em experiências da matemática prática, ocorre uma integração entre a percepção e os procedimentos matemáticos, dando origem a movimentos de pensamento que conectam os mundos corporificado e simbólico: corporificado para corporificado, simbólico para simbólico, corporificado para simbólico e simbólico para corporificado. Na matemática teórica (que se relaciona com o formalismo corporificado e o formalismo simbólico), a percepção, os procedimentos e o formalismo matemático estão interligados, e os fluxos de pensamento conectam esses mundos da seguinte maneira: formal para corporificado, formal para simbólico, corporificado para formal e simbólico para formal. Por fim, a matemática formal (associada ao formalismo axiomático) é principalmente caracterizada pela continuidade do pensamento dentro do mundo formal: formal para formal.

De acordo com Lima (2007):

> Há uma hierarquia entre mundos, no sentido de que o mundo formal não é usualmente discutido em estágios anteriores ao nível universitário, portanto só é tratado depois dos mundos corporificado e simbólico. Já estes últimos podem coexistir e serem relacionados de maneira intrínseca. Quando o mundo formal está em jogo, ele também se relaciona aos outros mundos intrinsecamente (Lima, 2007, p. 80-81).

Em paralelo a Lima (2007), aqui conjecturamos que uma das causas para as dificuldades de compressão em conceitos do CDI que estudantes de primeiro semestre encontram, seja consequência da exigência de uma linguagem matemática um pouco mais rigorosa no ensino superior frente àquela exigida na educação básica. Nos arriscamos a dizer ainda que muitas vezes, os processos de ensino e aprendizagem, na educação básica e até no ensino superior se prendem no mundo simbólico (conteúdo passado diretamente por meio de definições e fórmulas, processos mecanizados e repetitivos) sem uma devida passagem pelo mundo da corporificação (trabalhar a percepção, exercícios de criação de imagens mentais, pensar, conjecturar). Contudo, apesar de os processos se concentrarem no mundo simbólico, a linguagem matemática ainda é pouco cobrada na educação básica frente àquela que acaba sendo exigida num considerável nível no ensino superior.

Na próxima seção apresentamos uma análise da linguagem matemática presente no teorema que define a Regra da Cadeia (regra utilizada para derivar funções compostas) e suas conexões com a TTMM de forma a atingir o objetivo dessa pesquisa.

Análise e discussão

Começamos enunciando a definição da Regra da Cadeia, bem como uma forma alternativa para essa regra, ambas segundo o livro Anton, Bivens e David (2014, p. 174-175):

> TEOREMA (Regra da cadeia): Se g for diferenciável no ponto x e f for diferenciável no ponto $g(x)$, então a composição de $f \circ g$ será diferenciável no ponto x. Além disso, se $y = f(g(x))$ e $u = g(x)$, então $y = f(u)$ e
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot$$
>
> [...]
>
> UMA VERSÃO ALTERNATIVA DA REGRA DA CADEIA
>
> $$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$
>
> (Anton; Bivens; David, 2014, p. 174-175).

A Regra da Cadeia, como trata o teorema, é uma regra de derivação utilizada para derivar funções compostas. Em ambas as versões, o que está de fato mudando é a notação presente nas derivadas das funções de fora e de dentro.

Em seu livro, Morais Filho (2007) define que:

> Uma notação matemática é um conjunto de símbolos (que pode ser apenas um único símbolo) que representa um objeto ou uma ideia. Estes símbolos podem ser construídos com letras de alfabeto, figuras conhecidas ou ser de qualquer outra natureza, desde que sirvam para os propósitos. O uso de notações matemáticas deve ser uma forma de comunicação concisa e precisa, que possa contribuir para a facilidade e a economia da linguagem (Morais Filho, 2007, p. 3).

Em complementar a citação de Morais Filho (2007), percebemos uma uniformidade nas notações, uma forte tentativa de universalizar a linguagem matemática, simplificando inclusive o processo de entendimento e facilitando a interlocução de ideias e conjecturas que permeiam uma área de estudo da matemática ou mesmo de áreas correlatas. Entretanto, ainda encontramos maneiras diferentes de representar o mesmo conceito.

Quando começamos a estudar derivadas, algumas notações são apresentadas, de forma a indicar derivação. Dada uma função $f(x)$ e um ponto a, as notações $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ no ponto

a, servem para indicar a derivada de $f(x)$ aplicada em a, que em termos geométricos descreve o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ que passa pelo ponto $(a, f(a))$, ou em termos analíticos do CDI é definida pelo seguinte limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Essas notações são as mais utilizadas, embora também exista $\dot{f}$ (ponto em cima), porém com pouco uso. Portanto, temos duas principais notações para representar a derivada de uma função $f(x)$, a primeira $f'(x)$ (caso fosse a derivada da função f em um certo ponto a representaríamos como $f'(a)$), e a segunda $\frac{df}{dx}(x)$ (ou $\frac{df}{dx}(a)$, num certo ponto a).

Aqui acreditamos ser importante que o professor apresente as duas notações, tanto $f'(x)$ como $\frac{df}{dx}(x)$, mostrando para o estudante as possibilidades que ele tem e que estimule o aluno usar no começo as duas formas de representação para que não se enrijeça. A importância da apresentação destas duas formas, se dá já na forma como é passado o enunciado do teorema para o estudante.

Como já dito, o teorema da Regra da Cadeia é uma parte fundamental do CDI, e sua formulação utiliza uma linguagem matemática precisa e notações específicas para descrever a relação entre as derivadas de funções compostas. Vamos analisar a linguagem matemática e as notações presentes no teorema:

- Funções $f(x)$ e $g(x)$: O teorema começa mencionando duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, que são funções de uma variável x. Essas funções representam as duas partes da função composta.
- Função composta $f(g(x))$: O objetivo do teorema é calcular a derivada da função composta $f(g(x))$, onde f é uma função de $g(x)$, que por sua vez é uma função de x. A notação $f(g(x))$ indica que a função f é aplicada no ponto imagem de x por g.
- Derivadas $f'(g(x))$ e $g'(x)$: A notação $f'(g(x))$ representa a derivada de f em relação ao ponto $g(x)$, enquanto $g'(x)$ representa a derivada de g em relação ao ponto x.
- Expressão $f'(g(x))g'(x)$: O teorema estabelece que a derivada da função composta $f(g(x))$ é igual ao produto das derivadas $f'(g(x))$ e $g'(x)$, como indicado pela expressão $f'(g(x))g'(x)$.

Como podemos perceber (por meio das notações presentes no teorema da Regra da Cadeia, com as trocas sugeridas), a linguagem matemática ainda é precisa e específica, permitindo uma descrição clara da relação entre as derivadas das funções que compõem uma função composta. Esses conjuntos de símbolos são essenciais para a formulação e compreensão de conceitos e técnicas fundamentais no CDI.

Vale ressaltar que nossa ideia não é explicar e demonstrar os conceitos de derivadas e regras de derivação, no entanto apresentamos alguns exemplos com resolução para explorar e analisar os movimentos do pensamento matemático relacionados a TTMM. Como o exemplo de Anton, Bivens e David (2014):

> Suponha que um professor tenha um carro econômico que faça 20 km por litro de combustível. A quilometragem que pode ser alcançada sem reabastecer é uma função do número de litros que há no tanque de combustível. Em símbolos, se y for o número de quilômetros que pode ser alcançado e u for o número de litros de combustível disponíveis, então y é uma função de u, ou $y = f(u)$. Digamos que cada litro de combustível esteja custando 4 reais no posto favorito do professor. A quantidade de combustível disponível no tanque é uma função da quantia de dinheiro gasto no abastecimento. Se x for o número de reais pagos no abastecimento, então $u = g(x)$. Agora 20 quilômetros por litro é a taxa de variação da quilometragem em relação ao combustível gasto, portanto,
>
> $$f'(u) = \frac{dy}{du} = 20 \text{ quilometros por litro.}$$
>
> Da mesma forma, como o combustível custa 4 reais por litro, cada real fornece 1/4 de litro de combustível, e
>
> $$g'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{4} \text{ litro por real.}$$
>
> Observe que o número de quilômetros que pode ser percorrido também é uma função do número de reais que foram gastos com o combustível. Esse fato pode ser expresso como a composição de funções
>
> $$y = f(u) = f\big(g(x)\big).$$
>
> Poderíamos estar interessados na quilometragem obtida por real gasto em combustível, que é $\frac{dy}{dx}$. A intuição sugere que as taxas de variação são multiplicadas nesse caso; portanto,
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{20 \text{ km}}{1 \text{ litro}} \cdot \frac{1 \text{ litro}}{4 \text{ reais}} = \frac{20 \text{ km}}{4 \text{ reais}} = 5 \text{ km por real.}$$
>
> (Anton; Bivens; David, 2014, p. 174).

Como podemos analisar, no exemplo, no mundo da corporificação (mundos dos objetos, espaço e forma), temos o combustível, o dinheiro e a quilometragem e estamos no movimento de pensamento do corporificado para corporificado. Observamos, em seguida, dentro do corporificado simbólico, as ações sobre esses objetos, isto é, uns estarem em função dos outros e as taxas de variação, como a quilometragem em relação ao combustível gasto, a quantidade de combustível em relação ao valor gasto em real e até mesmo a quilometragem obtida por real gasto em combustível. Aqui temos principalmente as conexões entre os dois primeiros mundos, ou seja, os movimentos de pensamento corporificado para simbólico e simbólico para corporificado, mas em complementar ainda podemos ter o movimento do corporificado para o corporificado.

Após "corporificar" esses conceitos, partiremos para onde está presente a linguagem matemática, os símbolos (notações), a aritmética, o número. Os objetos do exemplo, o combustível (u), o dinheiro (x) e a quilometragem (y) podem ser representados notações matemáticas, bem como as relações entre eles, número de quilômetros depende da quantidade de combustível ($y = f(u)$ e $f'(u) = \frac{dy}{du}$), a quantidade de combustível depende do valor gasto ($u = g(x)$ e $g'(x) = \frac{du}{dx}$), número de quilômetros dependendo do valor gasto com o combustível ($y = f(u) = f\big(g(x)\big)$, $y' = f'(g(x))g'(x)$ e $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$). Aqui a concentração está no movimento do simbólico para o simbólico, porém como dito no parágrafo anterior, movimentos envolvendo o corporificado e o simbólico, ou só o corporificado, ainda podem ocorrer.

Até aqui, voltando a Figura 1, encerramos os processos dos mundos relacionados a ação da matemática prática. Neste artigo, não entraremos a fundo nas ações da matemática teórica e da matemática formal, ou seja, não nos aprofundaremos nas conexões dos mundos corporificado e simbólico com relação ao mundo formal axiomático. A justificativa se concentra em acreditarmos que adentrar a fundo no mundo formal axiomático e suas conexões foge um pouco da proposta de relacionar com o CDI, pois o seu formalismo estaria presente em disciplinas conhecidas por Análise Matemática ou Análise Real.

Finalizamos, no entanto, com um breve olhar para conexões dos mundos corporificado e simbólico com o formal axiomático, isto é, o próprio teorema da Regra da Cadeia. Em seu livro, Morais Filho (2007) expõe que "[...] a princípio, um *teorema* é uma sentença matemática condicional '*Se P, então Q*' ou implicativa '$P \Rightarrow Q$', cuja validade é garantida por uma demonstração. Nesse caso, chama-se *hipótese* a sentença P e *tese* a sentença Q". As demonstrações do teorema da Regra da Cadeia, bem como suas consequências e aplicações são opções de caminhos para quem quer explorar as ações da matemática teórica e da matemática formal. A enunciação do Teorema da Regra da Cadeia situa-se no centro da Figura 1, combinação formal entre simbolismo e corporificação; em outras palavras, o teorema é a intersecção entre as três esferas existentes na TTMM, bem como a junção desses conceitos utilizando-se da linguagem matemática.

Considerações Finais

A TTMM oferece uma perspectiva intrigante sobre o papel da linguagem matemática na compreensão de conceitos matemáticos complexos, como a Regra da Cadeia. No contexto da Regra da Cadeia (que é a ferramenta utilizada para encontrar a derivada de funções compostas), podemos explorar como a linguagem matemática evolui à medida que avançamos através dos três mundos propostos por Tall (2013). À medida que os estudantes progridem pelos mundos conceituais, é essencial que os educadores reconheçam a importância de abordagens pedagógicas adaptadas a cada estágio.

No primeiro mundo, o mundo conceitual corporificado, a Regra da Cadeia pode ser inicialmente compreendida através de experiências perceptuais e ações físicas que envolvem a manipulação de objetos e a observação de suas mudanças. Neste estágio, os estudantes podem visualizar a composição de funções e entender a relação entre as taxas de variação através de exemplos de situações cotidianas, como o exemplo apresentado em Anton, Bivens e David (2014) e discutido neste artigo.

No segundo, o mundo operacional simbólico, a linguagem matemática assume um papel mais formal. Aqui, as notações matemáticas $f'(x)$ e $\frac{df}{dx}$ representam a derivada de função $f(x)$, enquanto $f'(g(x))$ e $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ representam a derivada da função composta $f(g(x))$.

Finalmente, no mundo formal axiomático, a Regra da Cadeia é vista como um teorema que pode ser demonstrado a partir de axiomas e definições matemáticas, demonstrações essas conduzidas com rigor, seguindo uma linguagem formal e deduções lógicas.

Em conclusão, a TTMM destaca como a linguagem matemática desempenha um papel fundamental nos diferentes níveis de compreensão da Regra da Cadeia, desde suas raízes nas experiências perceptuais até sua formalização como um teorema matemático. Essa abordagem oferece percepções valiosas para professores, pesquisadores e estudantes, destacando a importância do aprimoramento da linguagem matemática na construção do conhecimento e do pensamento matemático.

Para pesquisas futuras, há várias questões interessantes a serem exploradas. Uma delas é a eficácia de estratégias de ensino específicas que facilitam a transição entre os mundos conceituais. Além disso, a compreensão dos desafios enfrentados pelos estudantes em diferentes estágios da aprendizagem da Regra da Cadeia e como superá-los pode ser uma área de pesquisa promissora. Também é importante investigar como a TTMM aplicada a outros tópicos do CDI (e matemática em geral) pode contribuir para os processos de ensino e aprendizagem no campo da Educação Matemática.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Agradeço a professora Thiarla Xavier Dal Cin Zanon, professora do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), pelo acolhimento, discussões e sugestões durante a realização deste trabalho. Agradeço ao professor Fernando Henrique Fogaça Carneiro, professor da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela revisão e adequação do trabalho nas devidas normas.

Referências

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVID, S. **Cálculo**: volume 1. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

BUENO, R. W. S. **A construção do conceito de integral**: uma viagem pelos três mundos da matemática. 2021. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

BUENO, R. W. S.; VIALI, L. O cálculo e os três mundos da matemática: um estado do conhecimento. **Revista Dynamis**, Blumenau, v. 25, n. 2, p. 39-55, 2019. DOI: https://doi.org/10.7867/1982-4866.2019v25n2p39-55.

DELFINO, J. A. **Uma análise sobre a imagem de conceito de integral de alunos de engenharia na perspectiva dos três mundos da matemática**. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática – Centro Universitário Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2019.

FLORES, J. B. **Monitoria de cálculo e processo de aprendizagem**: perspectivas à luz da sociointeratividade e da teoria dos três mundos da matemática. 2018. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

GEARY, D. C. *et al.* Development of arithmetical competencies in Chinese and American children: influence of age, language, and schooling. **Child development**, Washington, v. 67, n. 5, p. 2022-2044, 1996. Disponível em: https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/9022227/. Acesso em: 24 jul. 2024.

IMAFUKU, R. S. B. **O uso dos softwares GeoGebra e SimCalc para enriquecimento da imagem de conceito de derivada**. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática – Centro Universitário Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2018.

LIMA, R. N. **Equações algébricas no ensino médio**: uma jornada por diferentes mundos da matemática. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MICHAELIS: **dicionário brasileiro da língua portuguesa**. São Paulo: Melhoramentos, 2015. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/. Acesso em: 12 dez. 2023.

MORAIS FILHO, D. C. **Um convite à matemática**: fundamentos-lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidadesCampina Grande: EDUFCG, 2007.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Petrópolis: Vozes, 2013.

SOARES, G. O. **O conceito de limite na formação inicial de professores de matemática**: um estudo à luz dos três mundos da matemática. 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2018.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically**: exploring the three worlds of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l.], v. 12, p. 151-169, 1981. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00305619.

THURSTON, W. P. On the proof and progress in mathematics. **Bulletin of the American Mathematical Society**, New York, v. 30, n. 2, p. 161-177, 1994. DOI: https://doi.org/10.1007/0-387-29831-2_3.