revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O JOGO DOMINÓ COMO INSTRUMENTO DE MOTIVAÇÃO PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2024.13.30.352-377

Jose Carlos Thompson da Silva[1]
Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner[2]

Resumo: Este artigo consiste numa investigação sobre estratégias intuitivas de estudantes de quinto ano do ensino fundamental ao resolverem um problema aditivo, envolvendo peça de jogo de dominó, sob o aspecto do raciocínio combinatório com base na teoria da Resolução de Problemas. A pesquisa é de natureza qualitativa do tipo experimento de ensino. Tal experimento evidenciou que alguns alunos fizeram contagens que não foram solicitadas no problema, ora por falta de atenção, ora pelo significado matemático que atribuíram a termos do enunciado. Conclui-se que o entendimento de um enunciado matemático envolve não apenas a leitura de um problema, mas também a compreensão de termos específicos da matemática aplicados em diferentes contextos escolares ou de experiências não escolares que podem influenciar nas respostas dos estudantes.
Palavras-chave: Matemática. Raciocínio Combinatório. Resolução de Problemas. Anos Iniciais.

THE DOMINO GAME AS A MOTIVATION TOOL FOR TEACHING COMBINATORY THROUGH PROBLEM SOLVING

Abstract: This article consists of an investigation into the intuitive strategies of 5th year elementary school students when solving an additive problem, involving a domino game piece, under the aspect of combinatorial reasoning based on Problem Solving theory. The research is of a qualitative nature of the teaching experiment type. This experiment showed that some students made counts that were not requested in the problem, sometimes due to lack of attention, sometimes due to the mathematical meaning they attributed to terms in the statement. It is concluded that understanding a mathematical statement involves not only reading a problem, but also understanding specific mathematical terms applied in different school contexts or non-school experiences that can influence students responses.
Keywords: Mathematics. Combinatorial Reasoning. Problem solving. Early Years.

Introdução

Neste artigo, dedicamo-nos a uma tarefa de resolução de problemas aplicada em um experimento de ensino realizado em 2018 com estudantes de quinto ano do ensino fundamental de uma escola pública do município de Vitória no estado do Espírito Santo. A investigação consistiu em analisar as estratégias intuitivas dos alunos, ou seja, suas respostas à

[1] Doutor em Educação pela Ufes, Vitória-ES. Professor de Matemática do Instituto Federal de Educação do Espírito Santo – Ifes, Vitória-ES, Brasil. E-mail: jose.thompson@ifes.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8412-9239.
[2] Doutora em Educação Matemática, com PhD por Indiana University – Bloomington, IN, USA. Professora colaboradora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo – UFES, Vitória - ES, Brasil. Professora aposentada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro -RJ, Brasil. E-mail: profvaniasantoswagner@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9841-6191.

referida atividade sem necessariamente advirem de uma instrução sistemática, bem como aquelas sistematizadas, pelo professor ou pesquisador ou pelos próprios colegas, do ponto de vista dos estudos da combinatória.

Nosso trabalho foi desenvolvido sob a perspectiva da resolução de problemas com base em Polya (1995), Lester (1987), Santos (1997), Santos-Wagner (2008), Hoffman e Santos-Wagner (2011) e Onuchic e Allevato (2004, 2011), D'Ambrosio (2017) e de possíveis obstáculos com base em Brosseau (1976). Nossa base teórica em combinatória e raciocínio combinatório consistiu nos estudos de Borba (2010, 2013), Pessoa e Borba (2009, 2010) e nos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000), Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), Bachx, Poppe, Tavares (1975) e Hazzan (1993).

Nossa investigação com as crianças se deu pelo fato de concordarmos com Pessoa e Borba (2009, 2010) que consideram que os problemas de produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação devem ser trabalhados desde os anos iniciais. Em situações que envolvem o raciocínio combinatório, os problemas podem solicitar que sejam listadas as possibilidades de realizar algum tipo de agrupamento ou quantificar o total de possibilidades de realizar um determinado tipo de agrupamento.

Para nós, o raciocínio combinatório é *o modo de pensar sobre diferentes estratégias para resolver problemas que envolvem seleção, alocação, partição, enumeração, ordenação, contagem, otimização, classificação, associações entre elementos de um ou mais conjunto e análise de existência de possibilidades mediante certas condições estabelecidas.* À medida que desenvolvemos o raciocínio combinatório e alguma capacidade de realizar operações combinatórias, diminuímos algumas dificuldades de enumerar ou contar os números possíveis de casos dados que se podem mesclar e combinar, sem que tenhamos omitido alguma possibilidade que deva ser considerada na solução do problema.

Uma classificação dos problemas combinatórios a partir dos procedimentos de resolução é encontrada nos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000). Esses primeiros pesquisadores trabalham com o modelo combinatório implícito classificado em seleção, alocação e partição. Roa (2000) acrescenta o composto (problema que envolve mais de um esquema combinatório), ou seja, o enunciado pode envolver seleção e partição, seleção e alocação e assim por diante.

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), os problemas de seleção de uma amostra de um conjunto é o tipo de problema que deu origem às noções combinatórias mais primitivas de escolha de objetos e têm grande importância para os estudos de estatística.

Portanto, um problema de seleção envolve a escolha, a preferência, a retirada de objetos ou de elementos de um dado conjunto ou a ordenação dos elementos desse conjunto. Um problema de alocação ou de colocação envolve a ideia de colocar, alocar, inserir, depositar ou distribuir objetos em espaços, em vagas ou em casas (células). Já os problemas de partição envolvem a ideia de subdividir os elementos de um conjunto em subconjuntos.

Metodologia e procedimentos de pesquisa

Optamos, em nossa pesquisa, por uma abordagem qualitativa, uma vez que a base de sua elaboração é constituída principalmente pela percepção e compreensão (STAKE, 2008). Sob uma perspectiva qualitativa, interpretativa e naturalista (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), esta pesquisa teve como público estudantes de uma turma de 28 alunos do turno matutino do quinto ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal de Vitória. Para análise de dados consideramos participantes da pesquisa, apenas 15 estudantes com idades de 10 e 11 anos (11 meninas e 4 meninos), cujos pais e/ou responsáveis concordaram com a participação e assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE). Ressaltamos que os nomes dos sujeitos utilizados neste trabalho são fictícios e escolhidos pelas próprias crianças.

Com base nesses aspectos supracitados, realizamos uma investigação do tipo experimento de ensino com base em Steffe e Thompson (2000), em que buscamos compreender a matemática dos estudantes. Para estes autores, as crianças apresentam e constroem uma matemática que é própria delas, e por isso, é importante ouvi-las, para compreender o que elas fazem, como fazem e por que fazem de tal forma, de modo que possamos entender as relações matemáticas que as crianças constroem ao resolverem problemas matemáticos.

Durante o experimento de ensino, utilizamos a observação participante e entrevistas com as crianças para a coleta de dados. Escutamos as crianças durante as aulas, observarmos como se relacionavam umas com as outras e com a professora. Quanto às entrevistas, elaboramos perguntas investigativas semiestruturadas para esclarecer e refinar informações e interpretações dos dados da pesquisa. Para registrarmos os dados, utilizamos o diário do pesquisador, gravações de áudio e aplicação de ficha com um problema de dominó que envolvia o raciocínio combinatório. Em cada etapa de escrita, buscamos evidências que conduzissem à compreensão e à melhor assertiva, considerando a questão de pesquisa: *Que estratégias alunos do quinto ano utilizam para resolver um problema aditivo que envolve o* *raciocínio combinatório?*

Analisamos as respostas das crianças à tarefa de resolução da seguinte forma: a) analisamos as falas dos alunos durante a aplicação da tarefa em sala de aula; b) analisamos as soluções das crianças na ficha de problemas e na apresentação das soluções. Realizamos entrevistas individuais a fim de compreendermos as respostas dos mesmos que diferenciavam das soluções previstas pelos pesquisadores.

Nesse processo de discussão dos dados, utilizamos as seguintes categorias de análise: *estratégias de enumeração* (sistemática completa, sistemática incompleta, não sistemática completa e não sistemática incompleta) e *estratégias de contagem*, além de verificarmos se as soluções eram dadas por *desenho, listagem, cálculo, tabela ou alguma outra estratégia*. Tais resultados serão discutidos nas próximas seções.

Jogando dominó

Essa etapa foi realizada em 26 de março de 2018. Inicialmente conversamos com os alunos para saber se conheciam o jogo dominó e se já haviam, ou não, jogado o mesmo. Tratamos da quantidade de peças e das regras do jogo. Em seguida, solicitamos que os estudantes formassem quatro grupos com cinco pessoas e um grupo com seis. Essa foi a primeira atividade em grupo realizada com a turma em 2018. Após a organização dos grupos, distribuímos o jogo de dominó. Em seguida, pedimos que observassem as peças e verificassem quantas faces possuíam cada peça e o que tinha desenhado nas faces.

Perguntamos-lhes com que sólido geométrico cada peça de dominó parecia. Alguns alunos disseram que as peças pareciam com retângulo e outros disseram que pareciam com um paralelepípedo. Aproveitamos o momento e falamos brevemente sobre a forma geométrica da peça de dominó, além da diferença entre um retângulo e um paralelepípedo. Essa conexão da tarefa com outros tópicos da matemática vai ao encontro do que acreditamos e do que dizem os pesquisadores Kapur (1970), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) de que os estudos de combinatória possibilitam a integração com outros tópicos da matemática e com outras áreas de conhecimento.

Acompanhamos as jogadas dos grupos e demos tempo para que os alunos fizessem apenas uma jogada, mas, enquanto jogavam, percebemos a necessidade de sugerir que fizessem mais duas jogadas. Um grupo de cinco alunos não sabia como organizar as peças sobre a mesa e outro teve dificuldade de saber o que fazer quando o jogo estava fechado. Ou seja, eles não sabiam o que fazer quando as duas pontas do jogo têm o mesmo número e não há mais peças com esse número para continuar a jogada.

Grando (2000) orienta que, ao trabalhar um jogo com o propósito de ensino, a etapa da familiarização com o material é necessária. Desse modo as jogadas foram suficientes para atingir o nosso objetivo inicial, que era a familiarização com as peças do jogo para realizar a tarefa 1. Usamos 15 minutos para realizar o jogo e mais oito minutos para reorganizar a turma.

Figura 1- Alunos jogando dominó

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Após o término do jogo, conversamos com os alunos durante cinco minutos sobre alguns contratos didáticos quebrados, como o desrespeito ao colega e não saber perder em um jogo, além do esforço no desempenho das tarefas. Essas atitudes de retomada dos contratos estabelecidos com os alunos fazem parte do processo de avaliação. É um momento em que o professor necessita "Tomar decisões sobre o clima da sala de aula [...]" (SANTOS, 1997, p.12), no sentido de motivar os alunos, estimulá-los a participar, ter interesse e empenho nas atividades propostas pelo professor. Uma estratégia válida no desenvolvimento de tarefas coletivas, conforme orienta Santos (1997), é trabalhar com equipes fixas e móveis, de modo que os alunos construam conhecimentos e atitudes, tais como o auxílio e a cooperação entre e com os demais componentes do grupo.

Verificamos a necessidade de trabalhar a diversidade dos alunos no que diz respeito aos conteúdos atitudinais no âmbito das relações interpessoais (ZABALA, 1998). Segundo Andrade (2017),

> [...] os trabalhos [...] na temática da Exploração, Resolução, e Proposição de problema apontam evidências de que o trabalho de Exploração, Resolução, Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas (ERPCDP) na sala de Aula e na Formação do Professor, não é um trabalho para aventureiros e seu processo como um todo não é uma atividade simples, mas complexa, multicontextual, que compreende múltiplas dimensões e contextos, que depende de vários fatores, como o contexto do aluno real que temos e não o aluno idealizado, sonhado, imaginado; o contexto da matemática; o contexto da escola e da sala de aula que temos como um

todo os contextos de nós professores, dentre outros. O que pontua, então, que tal proposta, a todo instante, precisa ser construída e reconstruída, pensada e repensada no movimento dinâmico desses vários contextos, tendo como foco central de ação a sala de aula de matemática, pensada em toda sua multicontextualidade (ANDRADE, 2017, p. 390-391).

As situações ocorridas durante o jogo e as observadas em sala de aula ao longo de nosso acompanhamento da turma mostraram como esses aspectos citados no trecho anterior eram necessários. Ao longo de todo processo de pesquisa, fomos construindo relações de respeito ao pensamento dos alunos e reavaliando nossas ações como professor pesquisador, na forma de abordar o conteúdo e lidar com cada criança em nossa proposição e resolução de problemas.

Nas próximas seções, apresentamos a tarefa do dominó, bem como a análise das soluções dos alunos. No decorrer do texto, apresentamos intervenções que colaboraram para alcançar os objetivos estabelecidos em cada tarefa.

Aplicação do problema do dominó

Depois de revermos contratos didáticos com os alunos, iniciamos a aplicação da tarefa do dominó. Entregamos uma folha para cada aluno resolver individualmente e certificamo-nos de que todos tivessem preenchido o cabeçalho. Utilizamos algumas estratégias de apoio sugeridas por Santos (1997) e Santos-Wagner (2008), solicitando que os alunos fizessem uma leitura silenciosa, grifassem ou circulassem alguma palavra que não conheciam e que nos perguntassem algo se tivessem dúvidas.

Figura 2 – Problema do dominó

Data: 26/03/2018

Tarefa 1: Leia com atenção a questão abaixo e responda ao que se pede:

Na peça de dominó abaixo temos 4 pontos e 2 pontos. O total é 6 pontos.

a) Esta é uma peça com o total de 6 pontos. Desenhe todas as outras peças de dominó em que o total de pontos também seja 6.

b) Se juntarmos a peça de dominó que já desenhei com aquelas outras soluções que você desenhou agora, quantas peças de dominó com o total de 6 pontos teremos ao todo?

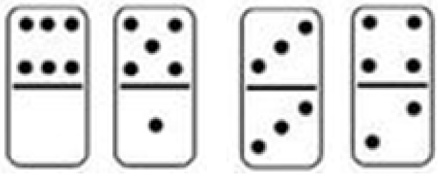
Objetivo geral: Investigar o raciocínio combinatório intuitivo dos alunos, ao resolverem um problema de adição que envolve o raciocínio combinatório sem uma aula formal de combinatória.

Objetivo específico: Construir com os alunos procedimentos que auxiliem no processo de enumeração sistemática e contagem em problemas de adição que envolve o raciocínio combinatório em modelos de alocação e partição a partir das propriedades comutativa e do elemento neutro da adição.

Fonte: Adaptado de Dante (2016, p.111, 1.º ano, Livro do professor)

Essa é uma tarefa de adição que envolve o raciocínio combinatório com a ideia de partição de dois números naturais cuja soma é seis. Nesse problema, esperávamos que os alunos identificassem a existência de quatro peças de dominó com o total seis, de acordo com a ilustração da figura a seguir.

Figura 3-Imagens de peças de dominó com o total seis



Fonte: https://br.depositphotos.com/64902345/stock-illustration-domino-set.html

Devido à restrição de o jogo de dominó não possuir peças repetidas, os alunos não poderiam desenhar peças com as mesmas configurações, ou seja, desenhar peças simétricas e as considerar como possibilidades distintas. Para que isso não ocorresse, foi necessário brincar com o jogo, conforme já descrevemos anteriormente.

Sob a perspectiva da resolução de problemas, solicitamos que a aluna Manuela fizesse a leitura em voz alta da tarefa do dominó. Enquanto lia, havia um aluno que estava resolvendo a questão. Pedimos que a turma não resolvesse o problema ainda, pois queríamos discutir a tarefa para favorecer a compreensão do que estava solicitado. De acordo com Polya (1995), a leitura e a compreensão do problema são umas das etapas importantes no processo de resolução de problemas. Além disso, segundo esse autor, "[...] quando um estudante comete erros realmente tolos [...]" no processo de resolução de problema matemático, uma das causas pode ser o fato de que esse aluno "[...] nem mesmo deseja entendê-lo adequadamente e, por isso, não chegou sequer a compreendê-lo [...]" (POLYA, 1995, p. 14). Assim, ao buscar auxiliar os estudantes na compreensão da tarefa, utilizamos algumas estratégias orientadas por Santos (1997), fazendo perguntas para que verificassem se haviam compreendido o problema.

> **Pesquisador:** É para desenhar peças do dominó com 7 pontos?
> **Turma:** Não.
> **Pesquisador:** E com 10 pontos?

Os alunos responderam que era com seis pontos. Ao questionar os alunos com perguntas sobre o total de pontos com o total sete e com total dez desejávamos, além de investigar se estavam compreendendo o que era solicitado na tarefa, chamar a atenção da turma para a informação dada no texto da tarefa. Assim, nossa ação de intervenção teve o intuito de orientar os sujeitos para que identificassem o valor do parâmetro ou do critério estabelecido no problema. Concordamos com os pesquisadores Batanero, Godino e Navarro-

Pelayo (1996), quando argumentam que identificar um parâmetro ou critério consiste em uma das etapas do processo de resolução de problemas combinatórios. Além da questão dos parâmetros, fizemos questionamentos aos alunos para atentarem para as casas (espaços) distintas do dominó e identificarem os objetos a serem desenhados (os pontos).

> **Pesquisador:** Pode desenhar estrelas no dominó?
> **Turma:** Não.
> **Pesquisador:** Posso desenhar nas duas partes do dominó?
> **Turma:** Sim.

Entre as etapas do raciocínio combinatório nos modelos de alocação e partição, segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), os alunos precisam distinguir: a) se os objetos são iguais; b) se as casas onde se vai alocar são distintas ou não; c) se há permissão de mais de um objeto por casa; d) se permite que alguma casa fique vazia. Discutimos sobre o problema e sua compreensão e, depois que ouvimos alguns alunos, pedimos que a aluna Manuela continuasse com a leitura da questão da letra b. Durante a nossa conversa, o aluno Lipinho disse não ter entendido o problema. Solicitamos, então, que ele mesmo fizesse a leitura e sugerimos que outros alunos explicassem o que haviam entendido.

> **Manuela:** Tem que pegar a peça que já está desenhada.
> **Pérola:** Você vai pegar essa peça aqui e, com as outras que desenhou aí, vai contar quantas peças você consegue desenhar com seis pontos e escrever o total.

Depois que ouvimos alguns alunos, pedimos que resolvessem a tarefa. Fomos andando pela sala e verificando como resolviam. À medida que os alunos terminavam, recolhíamos as fichas da tarefa, concluída em torno de sete minutos. Pedimos que os alunos aguardassem os outros colegas terminarem. Investigamos as estratégias intuitivas dos alunos ao resolverem o problema do dominó envolvendo o raciocínio combinatório sem a intervenção do professor, ou seja, sem uma aula formal de combinatória. Fizemos isso porque de acordo com Fischbein (1975), a intuição é importante para o processo de desenvolvimento cognitivo. Para Fischbein

> Intuições são parte integrante do comportamento inteligente. Elas são aquisições cognitivas que intervêm diretamente nas ações práticas ou mentais, em virtude de suas características de imediatismo, globalidade, capacidade extrapolativa, estruturalidade e auto-evidência.
> *Intuições primárias* são aquisições cognitivas que são derivadas da experiência do indivíduo, sem a necessidade de qualquer instrução sistemática.
> *Intuições secundárias* são aquisições que possuem todas as características de intuições, mas eles são formados por meio da educação científica, principalmente na escola.
> As intuições também podem ser classificadas como intuições *afirmativas* ou *antecipatórias*. As intuições afirmativas incorporam o conhecimento do mundo externo que aceitamos como evidente. Intuições antecipatórias são construções mentais que antecipam globalmente a solução de um problema antes que as etapas

> detalhadas da solução tenham sido encontradas (FISCHBEIN, 1987, p. 117, tradução nossa).

Nossa análise sobre o raciocínio combinatório dos alunos ocorreu com base em nossas leituras de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Roa (2000), Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991) e Bachx, Poppe e Tavares (1975) e em nossa experiência como professor pesquisador. Elaboramos quadros com as categorias de análise sobre enumeração e contagem. No quadro a seguir, temos as estratégias 1, 2, 3, 4 e 7, que foram pensadas pelo pesquisador e apareceram nas respostas dos alunos. Já as estratégias 5, 6 e 8 não apareceram nas respostas dos alunos. No que concerne a cada categoria trazemos alguns exemplos de resoluções dos alunos no intuito de exemplificar os tipos de respostas.

Quadro 1 – Categorização das estratégias de resolução para a enumeração na tarefa do dominó com o total seis

Estratégias de enumeração	**Base teórica**	**Alunos**
Desenhar todas as peças de dominó com o total seis.	Estudos exploratórios, Batanero, Godino, Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000).	Manuela
Desenhar apenas as peças de dominó que estejam faltando com o total seis.	No problema original, espera-se que o aluno desenhe as peças que estão faltando, pois o autor coloca os desenhos de três peças de dominó para o aluno completar o que falta (Dante, 2016).	Athayde, Cláudia, Estela, Felipe, Lipinho Malves, Pérola, Sol
Desenhar algumas peças com o total seis esquecendo-se de outras possibilidades.	Está relacionada a alguns tipos de erros que alunos podem cometer em problemas de enumeração, ao resolverem tarefas que envolvem o raciocínio combinatório (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).	Flora Gonçalves Moranguinho
Desenhar algumas peças com o total seis e repetir peças com a mesma configuração.	Está relacionada a alguns tipos de erros de repetição e de não exibição de todas as possibilidades que alunos podem cometer, ao resolverem problemas que envolvem o raciocínio combinatório (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).	Mel
Escrever todas as possíveis somas de duas parcelas com o total seis: 0 + 6, 6 + 0, 5 + 1, 1 + 5, 2 + 4, 4 + 2 e 3 + 3.	Está relacionada às combinações completas e representa todas as soluções inteiras não negativas de duas parcelas de números naturais com o total seis (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BACHX; POPPE; TAVARES, 1975).	Nenhum aluno realizou este tipo de solução.
Escrever as somas 5 + 1, 1 + 5, 2 + 4, 4 + 2 e 3 + 3 esquecendo-se das somas.	Está relacionada às combinações completas e representa todas as soluções inteiras positivas de duas parcelas de números naturais com o total seis (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991; BACHX; POPPE; TAVARES, 1975).	Nenhum aluno realizou este tipo de solução.

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Ao observarmos o quadro, notamos que as soluções dos alunos são visuais e não analíticas, ou seja, baseiam-se na representação por meio de desenhos, e não por meio de soluções numéricas ou algébricas. As soluções por meio de "[...] representações visuais são de particular importância na sala de aula de matemática, ajudando alunos a avançar na sua compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos" (VALE, 2017, p.142). As soluções intuitivas visuais possibilitam fazer intervenções que permitem a construção de estratégias sistematizadas de enumeração, dando significado aos procedimentos adotados, e possibilitam o envolvimento dos alunos no diálogo sobre o problema abordado.

Desse modo, constatamos que as respostas intuitivas dos alunos foram baseadas em desenhos para representar as possibilidades das peças de dominó com o total seis. De acordo com Vale (2017), uma das fontes das nossas intuições são as experiências repetidas de objetos físicos. Nesse sentido, verificamos que a brincadeira com o jogo de dominó contribuiu para o fortalecimento das ideias intuitivas dos alunos, para representar as peças de dominó com o total seis.

Além de investigarmos as soluções intuitivas dos alunos sobre a enumeração, investigamos a maneira como esses alunos fizeram a contagem das possibilidades. Observamos que se basearam em contar peças, contar peças e somar os pontos das peças, somar os pontos das peças ou contar o total de peças do jogo de dominó. Ajudar os alunos a desenvolver habilidades para "[...] descobrir o número de casos possíveis, seja contando-os ou por cálculos simples" (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 83, tradução nossa[3]) é um dos objetivos do ensino de combinatória.

[3] [...] descubrir el número de casos posibles, bien por conteo, bien por cálculos simples (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.83).

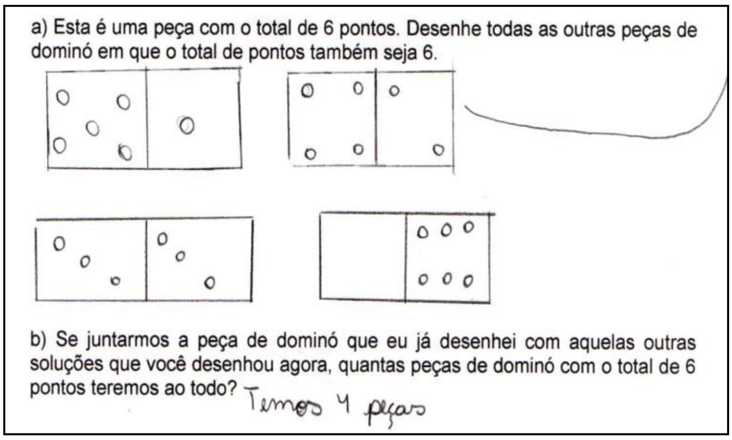
Quadro 2 – Estratégias de contagem dos alunos no problema do dominó

	Estratégias de contagem	Característica	Alunos
1	Contar todas as peças que desenhou com o total seis.	Esta contagem está relacionada à solução em que o aluno desenha todas as possibilidades previstas na enumeração.	Manuela
2	Contar as peças de dominó que desenhou, incluindo a que estava no problema.	Esta solução está relacionada ao tipo de estratégia em que o aluno já considera a possibilidade dada como uma das soluções, escrevendo outras distintas.	Athayde Bela Estela Gonçalves Pérola
3	Contar somente as peças que desenhou.	Neste caso, o aluno considera como resposta apenas as soluções que representou e descarta a possibilidade dada no problema.	Nenhum aluno realizou este tipo de estratégia de contagem.
4	Contar as peças de dominó que desenhou, incluindo a que estava no problema, e somar os pontos das peças.	Neste caso, o aluno, além de realizar a contagem solicitada no problema, modifica a tarefa, acrescentando a soma do total de pontos das peças.	Malves Moranguinho Sol
5	Contar os pontos das peças que desenhou com os pontos da peça dada no problema.	Neste caso, o aluno não faz a contagem solicitada e realiza outro tipo de contagem, que é a de somar os pontos da peça do problema e das peças desenhadas por ele.	Felipe Flora Lipinho Mel
6	Contar os pontos das peças que desenhou.	Neste caso, o aluno não faz a contagem das possibilidades como solicitado. Realiza outro tipo de contagem, somando os pontos das peças de dominó que desenhou.	Cláudia
7	Dar o total de peças do jogo de dominó.	Neste caso, o aluno não realiza a contagem das possibilidades solicitada. Apenas dá o total de peças do jogo de dominó.	Red
8	Dar um total mediante uma suposição.	Neste caso, o aluno imagina um total sem fazer investigação das possíveis soluções.	Nenhum aluno fez este tipo de contagem.

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Ao analisarmos a resposta da aluna Manuela, verificamos que ela desenhou todas as peças de dominó com o total seis e fez a contagem delas. Percebemos que, além de apresentar as peças com o critério estabelecido (soma com o total seis), a aluna realizou a contagem. Uma das etapas do raciocínio combinatório no processo de contagem por meio da enumeração é “[...] identificar e formar configurações combinatórias com as regras estabelecidas” (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 114, tradução nossa[4]).

Figura 4- Resposta da aluna Manuela


a) Esta é uma peça com o total de 6 pontos. Desenhe todas as outras peças de dominó em que o total de pontos também seja 6.

b) Se juntarmos a peça de dominó que eu já desenhei com aquelas outras soluções que você desenhou agora, quantas peças de dominó com o total de 6 pontos teremos ao todo? Temos 4 peças

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Para desenharem as peças com o total seis, os alunos Athayde, Estela, Manuela e Pérola disseram que se lembraram das peças do jogo com esse total e depois contaram as peças desenhadas com a que já estava apresentada no problema. Isso reforça que ter brincado com o jogo de dominó com as crianças ajudou na construção de ideias intuitivas na resolução do problema. Verificamos que esses alunos construíram configurações com a soma de dois números naturais com o total seis e, para isso, leram o problema com atenção para compreender o que era solicitado na atividade. Veja o episódio a seguir.

> **Pesquisador:** No problema, você desenhou quatro peças. Você acha que teria mais possibilidades ou só essas?
> **Manuela:** Eu acho que, pelo o que eu vi, poderia ser só essas.
> **Pesquisador:** Você acha que esta pergunta da letra **(b)** estava clara ou estava difícil de entender?
> **Manuela:** Depende do modo que a gente lesse.
> **Pesquisador**: Por quê?
> **Manuela:** *Se a gente ler muito rápido, sem prestar atenção, muita atenção, a gente não consegue entender, porque a gente não vê que está perguntado quantas peças que a gente poderia fazer, entendeu?* A gente, quando lê sem prestar muita atenção, a gente pensa que está perguntando quantas peças “ao todo”. Todas as peças que existem que a gente pode fazer (*grifo nosso*).
> **Pesquisador:** Como você acha que deveria ser feito esta pergunta?
> **Manuela:** Deixa eu ver. Eu acho que poderia ser bem assim: Se juntarmos as peças de dominó com a que eu ... calma! Se juntarmos as peças de dominó que eu já desenhei com qualquer outra solução que você ... ao invés de ser com a que você desenhou ... com as outras que podem ser feitas.

Pela fala da aluna, notamos que ela já desenvolve algumas estratégias de apoio para compreender o problema (Santos, 1997; Santos-Wagner, 2008), que é ler o problema, reler,

[4] Identificar y formar configuraciones combinatorias com unas condicones determinadas (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p.114).

ler com atenção, procurando palavras-chave e frases no problema, ou seja, busca descodificar o problema. "Descodificar um problema é procurar o seu significado, é procurar entendê-lo, é decifrar a mensagem que ele expressa e, sobretudo, é também fazer uma análise crítica dessa mensagem [...]" (ANDRADE, 2017, p. 369).

Outro detalhe importante é que esses quatro alunos conseguiram diferenciar a pergunta da letra (a) (que envolvia a enumeração por desenho) da pergunta da letra (b) (que envolvia a contagem). Afirmamos isso, pois enumerar e contar são dois tipos de ações diferentes quanto ao tipo de solução pedida, segundo os pesquisadores espanhóis:

> *Problemas de enumeração*. Em ocasiões pode nos interessar enumerar uma lista dos elementos que possuem certas propriedades. [...] *Problemas de contagem*. Trata-se de determinar o número de elementos de um conjunto finito que possui uma propriedade ou uma coleção de propriedades (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 25-26, tradução nossa[5]).

Defendemos, com base nesses autores espanhóis e em Santos-Wagner (2008), a necessidade de trabalhar com os alunos o significado matemático das palavras presentes nos enunciados dos problemas. Além disso, ao realizarmos intervenções pedagógicas sobre a compreensão do problema, precisamos chamar a atenção dos alunos para o tipo de resposta que se espera: se é só o cálculo, se são o cálculo e desenho, se é só o desenho, etc. Dessa forma, nós, professores e pesquisadores, precisamos atentar para o tipo de palavras que inserimos nos problemas. Devemos verificar se tal palavra se enquadra com a estrutura do problema formulado, se vai ajudar ou atrapalhar na compreensão e resolução dele. Mas isso, só conseguiremos se ouvirmos os estudantes.

Navarro, Batanero e Godino (1996) chamam a atenção para os verbos que melhor se associam aos problemas do modelo combinatório implícito de partição, tais como "[...] "dividir", "partir", "decompor", "separar", etc.[...]" (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996, p. 30, tradução nossa[6]). No problema do dominó, quando pedimos aos alunos que desenhassem as peças com o total seis, poderíamos ter solicitado que repartissem a quantidade seis como uma soma de duas parcelas, pois estamos trabalhando com um problema de adição que envolve a ideia de partição.

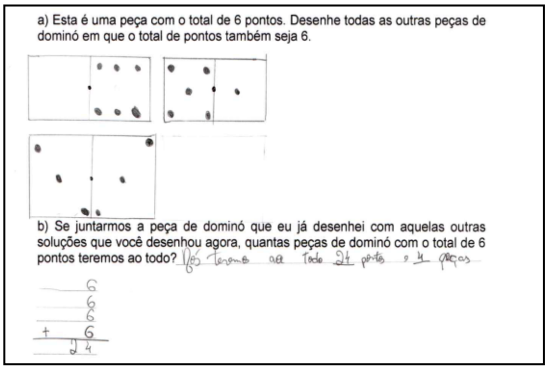
A aluna Malves (Figura 5) desenhou corretamente as outras três peças de dominó com o total seis. Porém, além de fazer a contagem das quatro peças de dominó com esse total, a aluna somou o total de pontos de cada peça. De modo semelhante, as alunas Moranguinho e

---

[5] *Problemas de enumeración*. En ocasiones puede intersarnos enumerar o hacer una lista de los elementos que poseen esta(s) propiedad(es). [...] *Problemas de recuento.* Se trata de determinar el número de elementos de conjunto finito que posee una propiedad o una colección de propiedades.
[6] [...]. Otros verbos claves asociados com la partición son: "dividir", "partir", "descomponer", "separar", etc. (NAVARRO; BATANERO; GODINO, 1996, p.30).

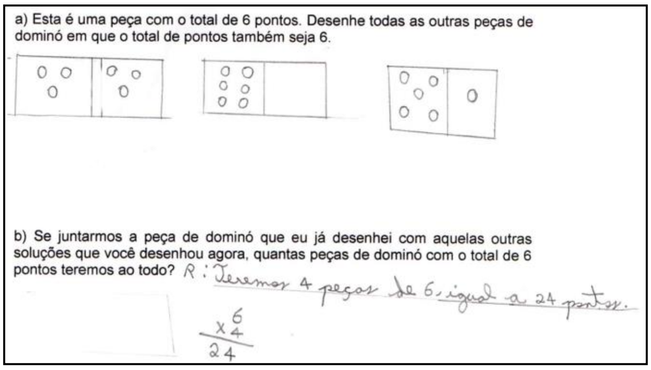
Sol (Figura 6) também desenharam as outras três peças de dominó com o total seis. Porém, além de dizerem o total de peças, contaram os pontos das peças usando o cálculo de multiplicação.

Figura 5- Resposta da aluna Malves



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Figura 6- Resposta da aluna Sol



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Ao analisarmos as respostas das alunas Malves, Moranguinho e Sol, verificamos que elas respeitaram os parâmetros (ou critérios) estabelecidos na partição (que era a soma com o total seis) e realizaram a enumeração por meio de desenhos, ou seja, por meio de soluções visuais. Porém, em relação ao processo de contagem, as estudantes realizaram uma tarefa a mais, que foi contar os pontos das peças. "O erro não é apenas uma resposta incorreta, ou algo falso a ser corrigido, envolve antes de tudo um processo de pensamento, uma forma de raciocinar que necessita ser discutida [...]" (ITACARAMBI, 2010, p. 17). Buscamos compreender o que levou essas alunas a ter tais pensamentos de contar os pontos das peças.

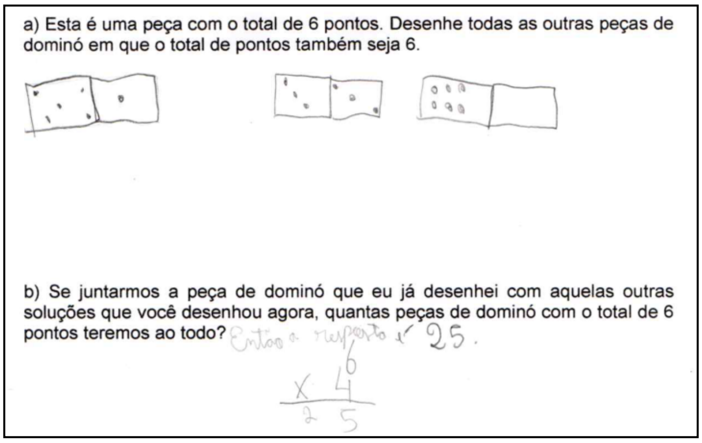
> **Pesquisador:** Por que você multiplicou 6x4 na pergunta da letra (b)?
> **Moranguinho:** Eu fui. Aqui é pra fazer quantos pontos tinha no total. Aí quatro peças de dominó com vinte quatro pontos. Eu quis contar os pontos também.
> **Pesquisador:** Você quis contar as peças e o total de pontos?
> **Moranguinho:** Sim.
> **Moranguinho:** *Quantas peças de dominó temos ao total*? Essa palavra *quantas* aqui confundiu um pouquinho.

Quando olhamos para as respostas dos alunos para além do erro, na tentativa de compreender o pensamento do aluno e o que levou a tal solução, somos conduzidos a fazer questionamentos que permitem reflexões sobre os enunciados dos problemas, e sobre nossa forma de apresentar e discutir a tarefa com os estudantes. Essas reflexões possibilitam a ampliação de entendimento do professor pesquisador sobre como os alunos pensaram ao resolver uma tarefa e possibilitam ampliação de saberes para alunos e professor. Dizemos isso porque "[...]. O questionamento na interpretação do texto ajuda, na maioria das vezes, a avaliar as respostas dadas pelos alunos e a verificar que a interpretação do professor não é a única possível" (ITACARAMBI, 2010, p. 14).

Não esperávamos que os alunos contassem os pontos das peças, mas tal solução fez-nos repensar sobre o enunciado e o significado das palavras “quantas”, “quais”, “total”, “todas” e “juntarmos”, usadas em tarefas matemáticas. Por isso, em nosso retorno com os alunos, tivemos o cuidado de explicar que tipo de contagem a tarefa solicitava. Esclarecemos isso no intuito de que os alunos não tivessem o mesmo tipo de interpretação (contar os pontos dos desenhos) em tarefas posteriores, ou seja, que pudessem aprender a interpretar corretamente os enunciados.

O aluno Lipinho, além de desenhar corretamente as outras peças do dominó com o total seis, ou seja, desenhar as peças respeitando o critério (parâmetro) estabelecido na partição, contou os pontos do dominó usando a multiplicação, porém errou o cálculo. Ao mostrar ao aluno a sua resolução, ele identificou que havia errado na hora de fazer o cálculo e disse que faltou atenção. Tal atitude mostra-nos que a ação reflexiva sobre sua resposta permitiu reconhecer o erro cometido no processo de multiplicação.

Figura 7 – Resposta do aluno Lipinho



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Outros alunos que também contaram os pontos das peças de dominó foram Felipe, Flora, Mel e Cláudia. Ao conversarmos individualmente sobre o entendimento da tarefa foi possível compreender como pensaram. Verificamos que a falta de compreensão do enunciado todo e de determinadas palavras influenciaram no processo de resolução e isso os levou a realizar a soma dos pontos das peças de dominó. Vejamos os episódios a seguir:

> **Cláudia:** *Junte as peças que eu já desenhei com as outras soluções que você já desenhou*. Quantas peças de dominó com o *total* de seis pontos teremos ao todo?
>
> **Pesquisador:** Era para dizer quantas peças ou era para somar o total de seis pontos?
>
> **Cláudia:** Era para ver quantas peças.
>
> **Pesquisador:** Então, você fez certo somando os pontos ou era para dizer quantas peças? O que te fez pensar que era para somar os pontos?

Cláudia: *Porque eu pensei que era para fazer a conta e ver quantos pontos.*

Para os alunos, as palavras "juntarmos", "quantas" e "total" presentes no enunciado davam a ideia de contar os pontos. Pensaram dessa forma, porque quando eles resolviam problemas de matemática durante as aulas, essas palavras traziam a ideia de somar ou de contar o total. Porém na tarefa eles teriam que contar as peças. Essa relação entre o significado das palavras, as experiências vividas e a reflexão sobre essas relações vão dando novos significados à medida que o professor pesquisador realiza intervenções, ouvindo e fazendo questionamentos aos alunos.

Notamos que, além de o aluno ler o enunciado do problema, intervenções do professor pesquisador são importantes para auxiliar os estudantes no processo de resolução. Entre essas intervenções, é preciso ensinar aos alunos a verificarem o significado das palavras e as ideias que elas trazem no problema matemático. Tudo isso é necessário em aulas, além de ouvir a interpretação deles sobre as tarefas e quando possível reformular o problema com base nas dificuldades (ou nos obstáculos) apresentadas por eles. Uma outra estratégia pedagógica seria ajudá-los a ler e reelaborar seu pensamento. Sobre o docente que escuta o aluno para interpretar a solução dele, D'Ambrosio (2017) afirma que

> [...] esse professor tenta compreender o que o aluno está pensando, faz a ele muitas perguntas para entender qual o seu equívoco, para, então, poder criar situações que o levem a corrigir o seu erro. Esse professor também busca guiar o aluno a respostas e a construções matemáticas corretas, já determinadas. Em ambos os casos, a matemática a ser aprendida é a acadêmica formal, que existe e está pronta para ser absorvida pelos alunos. Esses professores sabem essa matemática e a transmitem a eles de uma forma ou de outra. Para ambos, o objetivo é eliminar erros na produção matemática do aluno (D'AMBROSIO, 2017, p. 111-112).

A atitude do professor de ouvir os seus alunos, reformular os problemas ou orientá-los na reestruturação lógica de seu pensamento é produtiva e pode permitir que tarefas matemáticas se tornem cada vez mais claras e objetivas para alunos. Essa atitude também ajuda outros professores, pesquisadores e até mesmo autores de livros didáticos na preparação de questões matemáticas mais adequadas ao nível escolar dos estudantes com os quais se pretende trabalhar.

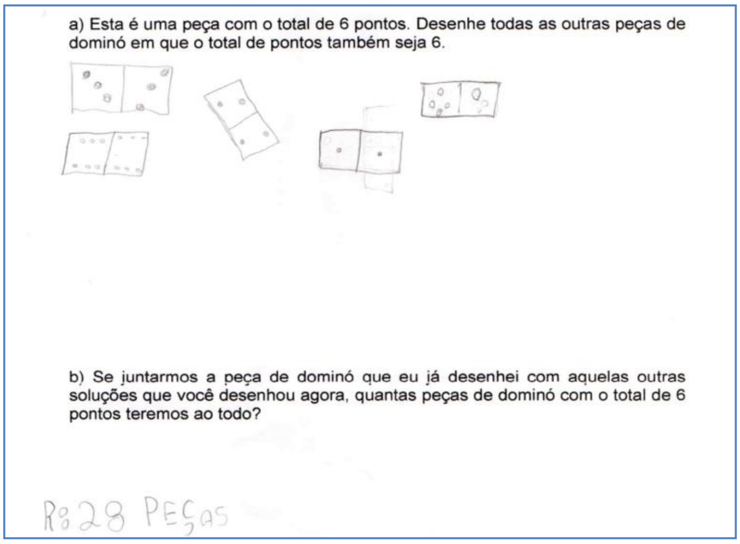
Segundo Navarro, Batanero e Godino (1996), há alguns erros que alunos podem cometer em problemas envolvendo combinatória. Entre esses erros, citamos o fato de que alunos podem esquecer alguns tipos possíveis de partição. Em nossa análise, além de identificarmos esse tipo de erro nas respostas dos alunos, como exemplo temos as alunas Flora e Gonçalves que não desenharam todas as peças e disseram que não se lembraram de algumas soluções possíveis. Também identificamos outro tipo de erro no problema de partição (tarefa do dominó) relacionado à contagem, que foi a soma dos valores das parcelas de cada enumeração. A análise dos dados fez-nos refletir sobre nossa atuação durante e após o processo de investigação com os alunos. De acordo com D'Ambrosio (2017),

> [...] para os professores-pesquisadores as linhas entre a pesquisa e o trabalho docente são nebulosas e é impossível separá-las. Nosso ofício é um constante vaivém – dos dados analisados às decisões tomadas –, para dar continuidade ao trabalho com alunos. Assim que deliberada a movimentação na prática, novos dados emergem e novas análises são necessárias. Essa dinâmica de trabalho constitui o dia a dia do professor-pesquisador. Discutir separadamente a análise de dados e a implicação dessa análise para o trabalho docente seria um tratamento artificial dos dados e não comunicaria ao leitor o constante movimento que resulta no tecer do saber do professor (D'AMBROSIO, 2017, p. 115-116).

Com a escuta aos alunos, em nosso processo de intervenção, foi necessário orientá-los a enumerar partições, pensar nos fatos fundamentais da adição de forma sistemática e depois ensiná-los a contar as enumerações para evitar tal tipo de erro. Dessa forma, o nosso olhar sobre a análise das respostas dos alunos foi reformulando nossa prática de intervenção com os sujeitos. Citamos como exemplo o conceito de elemento neutro da adição. Após nossa análise das soluções dos alunos, demos o retorno à professora regente que, em aulas paralelas à nossa pesquisa, trabalhou esse conceito com os alunos. Esse movimento ocorreu ao longo de todo nosso processo de investigação.

Na figura a seguir (Figura 8), apresentamos a resolução do aluno Red, que desenhou cinco peças de dominó, mas apenas uma delas dá o total seis. Ele disse que desenhou as peças de dominó que vieram à sua memória e deu como resposta 28 peças para a pergunta da letra (b), referindo-se ao total de peças do jogo de dominó. "Num problema matemático perfeitamente formulado, todos os dados e todas as cláusulas da condicionante são essenciais e têm de ser levados em conta [...]" (POLYA, 1995, p. 128). Notamos que Red não atentou para a condicionante ou aos parâmetros estabelecidos na tarefa que era desenhar peças com o total seis.

Figura 8 – Respostas do aluno Red


a) Esta é uma peça com o total de 6 pontos. Desenhe todas as outras peças de dominó em que o total de pontos também seja 6.

b) Se juntarmos a peça de dominó que eu já desenhei com aquelas outras soluções que você desenhou agora, quantas peças de dominó com o total de 6 pontos teremos ao todo?

R: 28 PEÇAS

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Ao resolver esse problema, Red desenhou as peças de dominó que vieram à sua memória, ou seja, um pensamento guiado pela experiência do jogo. Red atendeu à parte do que foi solicitado no problema, pois desenhou peças de dominó. Contudo, tivemos de chamar sua atenção para o parâmetro estabelecido, que era ter o total seis. A respeito da contagem, o aluno relacionou-a com o total de peças, mas não ao número de possibilidades conforme foi solicitado.

De acordo com os autores Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), uma das etapas do raciocínio combinatório são a identificação dos valores pertinentes dos parâmetros estabelecidos no problema, a formação efetiva das configurações pedidas e a contagem das mesmas. Red não se ateve a essa etapa, e as configurações formadas foram construídas aleatoriamente, de acordo com suas lembranças das peças de dominó, sem restringir ao total (que era seis). Além disso, a contagem das configurações não estava relacionada às enumerações, e sim ao total de peças do jogo de dominó.

Esse fato mostrou-nos que, em nossas intervenções, precisávamos chamar a atenção dos alunos para vários detalhes durante o processo de resolução de problemas. Era necessário comentar com os alunos sobre os parâmetros estabelecidos, realizar a contagem das enumerações construídas e analisar se suas respostas atendiam ao que foi solicitado. De acordo com D’Ambrosio (2017),

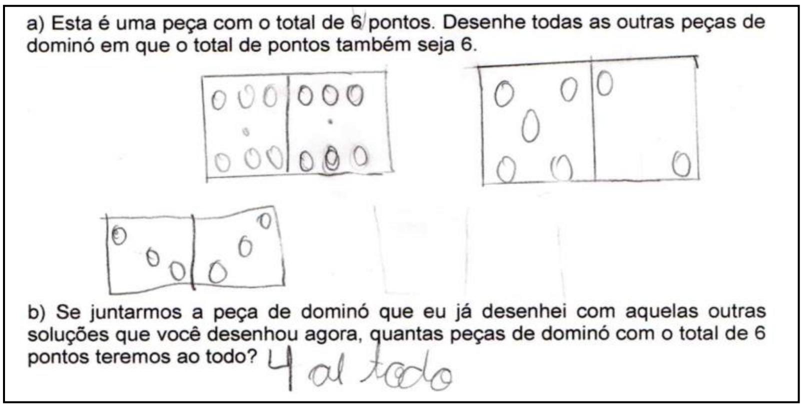
> [...] o docente continua examinando as estruturas, os esquemas e a lógica da matemática do aluno e se interessa por momentos em que o saber deste parece se desestabilizar, pois esse é o momento em que o aluno elabora novos saberes para retomar um estado de equilíbrio com conhecimentos anteriores que se alteram e se tornaram novamente viáveis. O professor está disposto a incorporar a matemática do aluno como elemento do seu próprio saber matemático (D’AMBROSIO, 2017, p.

112-113).

Na figura a seguir, apresentamos a resposta da aluna Bela, que também não atentou para o parâmetro estabelecido e desenhou peças de dominó com os totais doze, sete e seis. Embora a aluna tenha feito a contagem direta das peças que desenhou com a que foi dada no problema, ela só identificou que não havia respeitado o critério estabelecido na hora da nossa intervenção. Quando conversamos com a aluna sobre as peças desenhadas e o total de pontos de cada peça, ela imediatamente verificou que havia errado.

> **Pesquisador:** O que pedia para fazer na atividade do dominó?
> **Bela:** Pedia para fazer os dominós com o total de seis pontos.
> **Pesquisador**: Aqui você desenhou quantos pontos? Por que você desenhou seis de um lado e seis do outro?
> **Bela:** Aé! Era só ter colocado seis aqui e zero aqui.
> **Pesquisador:** E por que nesse outro você colocou cinco aqui e dois aqui?
> **Bela:** Aé! Era para colocar um. Faltou atenção.

Figura 9 – Resposta da aluna Bela



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

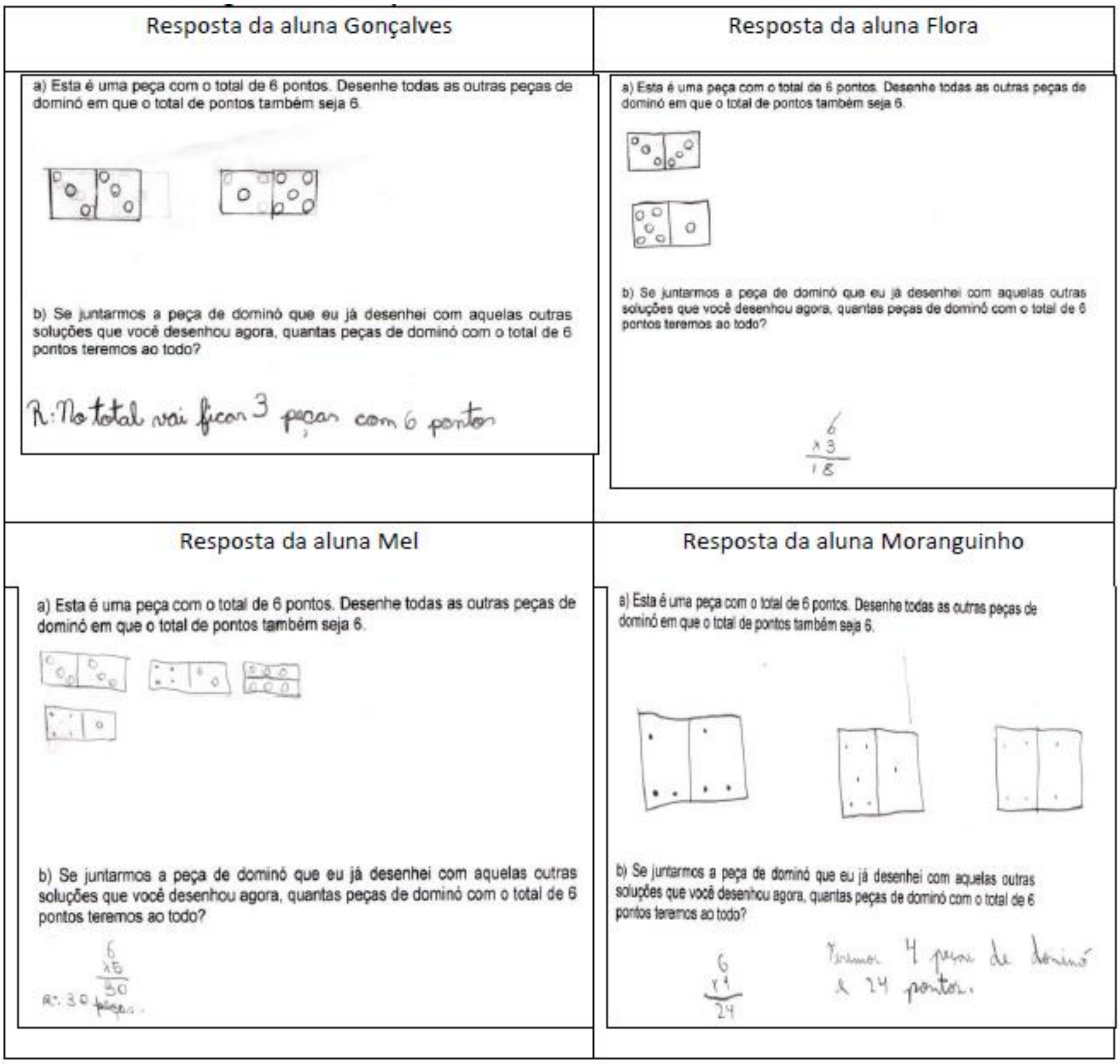
Verificamos que Bela fez a contagem das peças desenhadas, mas não observou o parâmetro estabelecido e o total de pontos igual a seis. Por isso, reafirmamos que a atenção e a confrontação da resposta com os parâmetros estabelecidos são indispensáveis no processo de resolução de problemas matemáticos.

Um aspecto importante do raciocínio combinatório é a "[...] demonstração lógica, mas menos formal, de que o processo a ser seguido garanta que não falte nenhuma das possíveis configurações" (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 65, tradução nossa[7]). Nesse aspecto, as alunas Flora, Gonçalves, Mel e Moranguinho (Figura 10) desenharam peças de dominó com o total seis, mas esqueceram-se de algumas possibilidades, o que nos mostrou a necessidade de ensinar ideias lógicas de sistematização para ajudá-las a encontrar todas as possibilidades.

---

[7] [...] – Demonstración lógica, más o menos formal, de que el proceso seguido garantiza que no falta ninguma de las posibles configuraciones (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 65)

Figura 10 – Respostas de alunas sobre a tarefa do dominó



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Algo que nos chamou a atenção foi o desenho da aluna Mel, que representou a peça de dominó com três pontos em cada um dos quadrantes, e uma peça continha os pontos em diagonal e outra continha os pontos na horizontal. Olhando pelo aspecto do raciocínio combinatório, ela cometeu o erro de repetição de possibilidades, que é um dos tipos cometidos no processo de enumerações. Embora esse erro de repetição seja esperado em problemas de combinatória, fomos pegos de surpresa sobre o que levou a aluna a construir tal representação na horizontal. Ao conversarmos sobre as peças desenhadas e o porquê de tal representação, Mel disse que, na hora da atividade, lembrou as peças de dominó que costumava jogar com o avô e por isso fez tal representação. Nesse sentido,

> [...] ao mesmo tempo em que planejamos nossa sala de aula pensando nessa variedade, nessa multicontextualidade, somos 'atropelados' e 'pegos de surpresa' por ela, mas é essa mesma variedade de fatores que pode (re)dimensionar e nortear todos os nossos pensamentos e ações. Na verdade, por um lado, não há como

> delimitar/controlar essa multicontextualidade, mas, por outro, ela passa a ser um referencial, um mapa que ajuda a pensarmos e repensarmos cotidianamente o movimento de operacionalização da ERCPCDP na sala de aula (ANDRADE, 2017, p.391).

Quando trabalhamos a compreensão de problemas matemáticos, precisamos ter em mente que não é apenas a ausência de conhecimentos matemáticos que pode influenciar no entendimento de um problema. Há fatores afetivos e epistemológicos, as experiências pessoais, a estrutura do problema e a linguagem (seja materna, seja matemática) presente nos enunciados.

Outro fato interessante em nossa análise foi que Red, Bela, Clara, Flora, Mel e Moranguinho não desenharam a peça com os valores seis e zero e disseram que não se lembraram desse caso particular. Segundo os pesquisadores Navarro, Batanero e Godino (1996), esse é um dos tipos de erros que alunos podem cometer em problemas de combinatória: esquecer possíveis enumerações de partições. “[...] O papel do professor é justamente buscar situações problemáticas que tenham o potencial de adicionar novas perspectivas ao conhecimento do aluno [...]” (D’AMBROSIO, 2017, p. 111). Esse detalhe chamou-nos a atenção para a necessidade de os professores dos anos iniciais trabalharem com tarefas que explorem a propriedade do elemento neutro da adição em combinações de números.

Nesse sentido, o professor precisa auxiliar os alunos a desenvolver alguns procedimentos necessários ao processo de construção do raciocínio combinatório. Assim, espera-se que os erros sejam reduzidos à medida que os estudantes vão realizando tarefas que envolvem esse assunto. Entre os procedimentos necessários para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, citamos:

> - Reconhecer quando é adequado um procedimento.
> - Explicar as razões para os distintos passos de um procedimento.
> - Conduzir até o final um procedimento de forma confiável e eficaz.
> - Verificar o resultado de um procedimento empiricamente ou analiticamente; reconhecer procedimentos corretos e incorretos.
> - Gerar procedimentos novos e ampliar ou modificar os procedimentos conhecidos.
> - Reconhecera natureza e o papel que cumprem os procedimentos dentro da matemática (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 101, tradução nossa).

Nesse ambiente de compreensão coletiva, o erro precisa ser visto não apenas como uma resposta incorreta, mas sobretudo como resultado de um processo de pensamento que precisa ser discutido para desenvolver um raciocínio matemático reflexivo. Ou seja, um raciocínio em que os alunos utilizem conhecimentos matemáticos sistematicamente e reflitam sobre suas respostas em relação ao que é solicitado no problema. Para que isso ocorra, é necessário escutarmos mais o que dizem os nossos alunos, como nos diz D’Ambrosio (2017).

> O que se ouve, quando se acredita na produção do aluno, informa a respeito do conhecimento que ele leva para a escola e da sua forma de raciocinar; além de ter enriquecido o modelo da matemática das crianças e dado direção para planejar novas ações. As possibilidades para a continuidade do processo de ensino foram definidas pela reflexão sobre a produção matemática dos alunos. O modelo dinâmico, que se altera a cada nova descoberta, se desenvolve a partir da voz dos alunos e propicia aos professores elementos de investigação. O trabalho do professor-pesquisador pode ser descrito como o trançar de pesquisa e ação com reflexão contínua (D'AMBROSIO, 2017, p. 127).

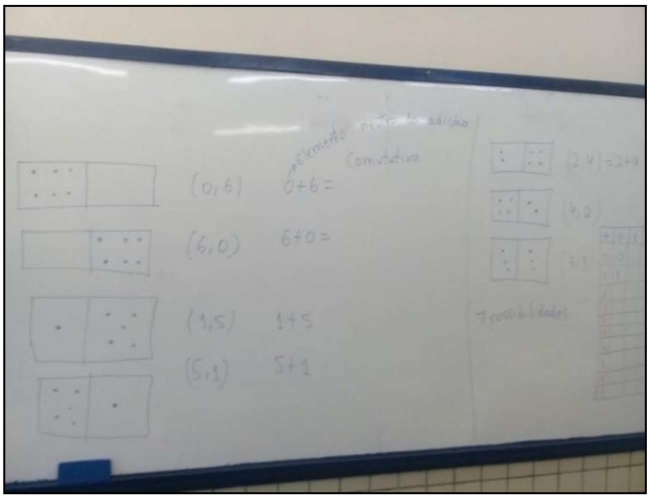
Por diversas vezes, nós professores queremos que os alunos aprendam os conhecimentos matemáticos socializados pela escola para interagir melhor com o mundo. Porém, esquecemos que, antes de a criança conhecer a matemática ensinada pelo professor (baseada nos livros didáticos), ela já interage com o mundo. Portanto, estamos diante de um sujeito histórico que já resolve problemas e, portanto, aprende com o mundo. Esses conhecimentos anteriores podem ser aperfeiçoados quando o professor escuta as respostas de seus alunos e busca compreender o que os leva a tais pensamentos, fazendo intervenções necessárias para ajudar a desenvolver o raciocínio combinatório.

Retorno coletivo sobre a tarefa do dominó

Em 3 de abril de 2018, realizamos o retorno com os sujeitos da pesquisa sobre a atividade do jogo do dominó. Apresentamos-lhes as respostas intuitivas corretas e incorretas, sobre as quais conversamos com eles, sejam baseadas no conhecimento que tinham do jogo, sejam em suas experiências escolares ou afetivas. Com suporte nessas intuições primárias, fomos desenvolvendo intuições secundárias criando sistematizações de enumeração e contagem.

Durante o nosso retorno coletivo, fomos conversando com os alunos e desenhando as peças de dominó com o total seis de forma sistemática, começando com valores extremos (0,6) e (6,0). Em seguida, fizemos (1,5) e (5,1) e assim por diante, até que tivéssemos o par formado pelo termo central (3,3). Paralelamente às soluções visuais (desenhos), construímos também as soluções analíticas representadas pelas somas dos números e pelos pares ordenados. Usamos essa estratégia para ensinar aos alunos a propriedade comutativa da adição e o conceito de elemento neutro, ao fazer 6 + 0 e 0 + 6. Além desses conceitos matemáticos, explicamos aos alunos o que seria uma rotação, ao girarmos a peça de dominó com um ângulo de 180° em torno de seu ponto de simetria, integrando com outros conceitos da geometria.

Figura 11 – Imagem de exemplos de estratégias de resolução e de propriedades da adição discutidas com os alunos



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Essas estratégias e conceitos foram antecipados com a professora regente que passou a incorporar tais procedimentos de resolução em tarefas matemáticas em suas aulas. Ao questionar os alunos sobre a propriedade que usávamos, ao somarmos zero com seis e depois somar seis com zero e verificarmos que o resultado não se alterava, eles também não souberam responder. Apresentamos com a regente da classe alguns exemplos, até que a aluna Pérola se lembrou do que a professora havia trabalhado numa aula anterior e respondeu que era a propriedade do elemento neutro da adição.

Além de conversarmos com os alunos sobre a propriedade comutativa e do elemento neutro da adição, mostramos o que eram pares ordenados de números e como realizar somas sistemáticas usando uma tabela de valores numéricos. Demos exemplos de pares ordenados, como (0,6), (6,0), (1,5), (5,1), (4,2), (2,4) e (3,3). Fizemos isso porque acreditamos e defendemos, com base em Fischbein (1975) e Vale (2017), que os problemas que utilizam múltiplas estratégias de resolução possibilitam aos alunos desenvolver outras ideias intuitivas apresentando soluções por desenhos ou geométricas, ou por cálculos aritméticos ou algébricos. Isto é, o que fizemos no retorno coletivo auxiliou a todos os alunos porque favorece que cada aluno aprenda um arcabouço de ideias intuitivas para usar ao resolver outros problemas. Desse modo, fomos dialogando e mostrando a importância de formular uma lógica sistemática e usando a propriedade comutativa e o elemento neutro, para encontrar possibilidades de escrever a soma de dois números.

Considerações finais

A conversa com os alunos, além de ajudar na interpretação do problema, contribui para que eles relacionem os conhecimentos matemáticos que possuem a esquemas e estratégias de resolução. Algumas ações devem ser postas em prática pelos estudantes para desenvolver atitudes ante o conhecimento matemático, entre as quais está a tendência de revisar e refletir o próprio pensamento e sua atuação na resolução de problemas.

Acreditamos que a conversa coletiva com os alunos desde a leitura do problema é importante para desenvolver a compreensão das tarefas matemáticas, a compreensão de conceitos e as estratégias de resolução. Para isso, é necessário desenvolver um ambiente propício, onde os alunos tenham liberdade de falar o que pensam sobre o tema abordado, pois assim o professor poderá identificar as dificuldades encontradas no processo de resolução, sejam aquelas presentes nos enunciados, sejam as estabelecidas culturalmente ou mesmo as conceituais.

Para que o raciocínio combinatório seja desenvolvido, é preciso que os alunos tenham condições de sugerir algum tipo de resolução. A partir desta ideia, os alunos precisam testar ou investigar estratégias que pensaram para resolver a tarefa, para que se convençam da validade ou não de certas estratégias. Ademais, os alunos precisam aprender a exibir quais são as possibilidades que encontraram para resolver a tarefa proposta e saber contar quantas foram essas possibilidades. Todas estas etapas precisam ser exploradas pelos estudantes e eles precisam observar se as ideias possuem conexões entre si.

Ao trabalharmos problemas de combinatória com alunos de quinto ano, devemos considerar que eles são sujeitos sociais e seus conhecimentos são construídos e reconstruídos respeitando seus saberes culturais elaborados socialmente em suas experiências escolares e extraescolares. Para que estudantes de quinto ano compreendam um problema matemático, é preciso que o trabalho seja desenvolvido com cautela, escutando o aluno e reconstruindo novos significados e reflexões sobre suas respostas. Isso é necessário para que as respostas não se baseiem apenas em palpites fundamentados em experiências e sem um raciocínio lógico estruturado em conceitos matemáticos.

Verificamos que, sem a intervenção do professor, alguns alunos fizeram contagens que não foram solicitadas no problema. Esse fato ajuda-nos a entender que a leitura de um problema matemático se refere não só à compreensão, mas também envolve o entendimento de termos específicos da matemática (relações lógicas) que, muitas vezes não fazem parte da experiência escolar dos alunos.

Referências

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre resolução, exploração e proposição de problemas matemáticos no cotidiano da sala de aula. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para resolução de problemas.** São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 355-395.

BACHX, A. C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. **Prelúdio a análise combinatória**. 7. ed. São Paulo: Nacional, 1975.

BATANERO, C., GODINO, J., NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Editorial Síntese, S.A., 1996.

BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - ENEM, 10., 2010, Salvador, BA, 2010. **Anais**..., Salvador, BA, 2010. p. 1-16.

BORBA, R. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - ENEM, 11., Curitiba, PR, 2013. **Anais**..., Curitiba, PR, 2013. P. 1-16

BROUSSEAU, G. Lês obstacles épistemologiques et lês problèmes em mathématiques. Meeting of the CIEAEM, lonvain da neuve, reproduced in les obstacles épistemologiques et les problems en mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La PenséeSauvage-Éditions, v. 4, n. 2, p. 164-198, 1976.

DANTE, L. R. *Ápis*: alfabetização matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 1.

D'AMBROSIO, B. S. O professor-pesquisador diante da produção escrita dos alunos. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para resolução de problemas.** São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 109-129.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2012.

FISCHBEIN, E. **The Intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: D. Reidel,1975.

GRANDO, R. C. A. **O conhecimento matemático e o uso dos jogos na sala de aula**. 2000. 239 f. Tese (Doutorado em educação) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 2000.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar** 5: combinatória, probabilidade. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

HOFFMAN, B.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. A exploração da escrita, leitura e oralidade em matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., Recife, PE, 2011. **Anais**... Recife, PE, 2011. p. 1-12.

ITACARAMBI, R. R. **Resolução de problemas**: construção de uma metodologia: (ensino fundamental I). São Paulo: Livraria da Física, 2010.

KAPUR, J. N. Combinatorial analysis and school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, p. 111-127, 1970.

LESTER, F. Teaching mathematical problem solving. **Nämmaren**, p. 32-43, 1987.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO; P. C. P., FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

ONUCHIC, L.R; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensinoaprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1.ª a 4.ª série. **Zetetiké**: Revista de Educação Matemática, Campinas, SP, v. 17, n. 31, p. 105-150, dez. 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Em Teia**: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.1, n.1, 2010. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2182/1753. Acesso em: 10 ago. 2017

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROA, R. **Razonamiento combinatório em estudiantes com preparación matemática avanzada**. 2000. 196 f. Tese (Doutorado em Ciencias Matemáticas) - Universidad de Granada, 2000.

SANTOS, V. M. P. dos. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão. Instituto de Matemática/UFRJ, 1997.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim** GEPEM, Rio de Janeiro, n. 53, p. 43-74, jul./dez. 2008.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa**: estudando como as coisas funcionam. Porto Alegre: Penso, 2008.

STEFFE, L.; THOMPSON, P. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Eds.). **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000. p. 267-307.

VALE, I. Resolução de problema um tema em contínua discussão: vantagens das resoluções visuais. In: ONUCHIC, L. R; LEAL JUNIOR, L. C; PIRONEL, M. (Orgs). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 109-129

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul Ltda., 1998.