revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: UMA EXPERIÊNCIA NUMA ESCOLA PÚBLICA PAULISTA

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.27.363-385

Marília Prado[1]
Ana Paula Jahn[2]

Resumo: Este artigo traz um recorte de uma dissertação de mestrado cujo objetivo principal foi investigar de que maneira práticas de Resolução de Problemas podem ser implementadas na sala de aula e como são vivenciadas pelos estudantes, com ênfase no papel das diferentes representações semióticas em seus processos de resolução. Para tanto, realizou-se uma experiência com turmas de 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Paulo, inspirada na competição internacional Rali Matemático Transalpino. A estratégia metodológica envolveu um estudo experimental de intervenção, organizado em três fases, cuja análise dos dados produzidos foi de natureza qualitativa, à luz das pesquisas na área, bem como da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. A análise dos dados produzidos mostrou que os alunos vivenciaram a experiência como participantes ativos nos processos de resolução dos problemas e, por meio das discussões realizadas, reconheceram a importância da mobilização de diferentes representações como auxiliares no desenvolvimento das resoluções, ainda que tenham apresentado dificuldades em atividades de conversão do registro numérico tabular para o registro simbólico-algébrico.
Palavras-chave: Resolução de Problemas. Ensino Médio. Rali Matemático. Representação semiótica.

PROBLEM SOLVING AND SEMIOTIC REPRESENTATIONS: AN EXPERIENCE AT A PUBLIC SCHOOL IN SÃO PAULO

Abstract: This article presents an excerpt of a master's thesis whose main objective was to investigate how Problem Solving practices can be implemented in the classroom and how they are experienced by students, with an emphasis on the role of different semiotic representations in their problem-solving processes. Therefore, an experiment was carried out with 1st grade classes at a public high school in the city of São Paulo, inspired by the international mathematical competition Rali Matemático Transalpino. The methodological strategy involved an experimental intervention study, organized into three phases, whose data analysis was qualitative, in the light of research in the area, as well as Raymond Duval's theory of representation registers. The analysis of the produced data showed that the students experienced the experiment as active participants in the problem-solving processes and, through the discussions held, recognized the importance of mobilizing different representations as auxiliaries in the development of solutions, although they presented difficulties in activities involving the conversion of numerical tabular registers to symbolic-algebraic registers.
Keywords: Problem Solving. High School. Mathematical Rally. Semiotic representation.

Introdução

No início do século XX, de modo geral, o ensino da Matemática era baseado em atividades de repetição, na qual o recurso à memorização de fatos básicos era considerado

[1] Doutora em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. E-mail: mariliap@alumni.usp.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8037-1095
[2] Doutora em Didática da Matemática pela Universidade Joseph Fourier (Grenoble I, França). Professora do Departamento de Matemática do IME-USP. E-mail: anajahn@ime.usp.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0515-7536

importante. Anos mais tarde, passou-se a defender que os alunos deveriam aprender com compreensão, entender os procedimentos que vinham sendo repetidos. Em nenhum dos casos houve sucesso completo, pois, a maioria dos alunos não aprendia.

Nas décadas de 1960 e 1970, apesar de já se falar em ensino de Matemática por meio da resolução de problemas, o movimento de renovação, conhecido como Matemática Moderna, provocou mudanças significativas nas práticas escolares. Conforme destaca Pinto (2005), essa reforma apresentava a Matemática com excesso de simbolismos e enfatizava a necessidade de uma nova linguagem. Com isso, professores e alunos passaram a conviver com a teoria dos conjuntos e com noções de estruturas algébricas.

> Ao tratar a matemática como algo neutro, destituída de história, desligada de seus processos de produção, sem nenhuma relação com o social e o político, o ensino da Matemática, nesse período parece ter se descuidado da possibilidade crítica e criativa dos aprendizes. O moderno dessa matemática apresenta-se, para os alunos, mais como um conjunto de novos dispositivos e nomenclaturas descolados de sentidos e significados conceituais, uma disciplina abstrata e desligada da realidade (PINTO, 2005, p. 5).

Em reação à maneira como a Educação Matemática vinha sendo caracterizada, no início da década de 70 começaram as primeiras investigações sobre a Resolução de Problemas (RP) no ensino de Matemática e, no fim dos anos 70, as discussões sobre o assunto ganharam espaço no mundo inteiro.

Desde então, segundo Onuchic e Allevato (2004), a utilização da RP como metodologia vem sendo destacada desde meados da década de 80, em todo o mundo, como um dos propósitos do ensino da Matemática. Nas pesquisas referentes ao tema, observa-se uma tendência em considerar que a RP deve proporcionar a descoberta, dar oportunidade de o aluno desenvolver diferentes tipos de raciocínio e estratégias, pensar matematicamente, ampliar seu conhecimento, de forma a dar sentido a conceitos e propriedades matemáticas.

Ao usarmos o termo “problema”, é preciso ter claro seu significado e vários significados podem ser considerados com base na literatura da área. Polya (1985), por exemplo, destaca que temos um problema sempre que procuramos os meios para atingir um objetivo. Segundo o autor, quando temos um desejo que não podemos satisfazer imediatamente, pensamos nos meios de satisfazê-lo e, assim, está colocado um problema.

Van de Walle (2009) considera que problema é qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham algum método ou regra já memorizados. Tal definição, como para diversos outros autores, baseia-se na distinção entre “exercício” e “problema”.

Para Schoenfeld (1985), a realização de uma tarefa matemática nem sempre caracteriza a resolução de um problema. Esse autor define problema, num sentido relativo, como uma tarefa que é difícil para quem está tentando resolvê-la. Nessa perspectiva, ele explica que se alguém já tem acesso a um plano para a solução de uma tarefa matemática, essa tarefa é um exercício e não um problema.

De maneira semelhante, Echeverría e Pozo (1998) entendem que uma situação somente pode ser caracterizada como problema se ela for reconhecida como tal. Ou seja, quando o estudante não dispõe de meios automáticos para resolvê-la de forma mais ou menos imediata, será necessário um processo de reflexão ou uma tomada de decisão sobre a sequência de passos a serem seguidos.

Dessa forma, vemos que a discussão em torno da caracterização de um problema está diretamente relacionada à ação desempenhada por uma pessoa diante de determinada situação. Assim, entendemos, de acordo com Onuchic e Allevato (2011, p. 81), que problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer".

Mais especificamente, destacamos que o termo problema, aqui, refere-se a uma situação matemática para a qual não se dispõe de métodos imediatamente conhecidos para a resolução, mas que possibilita a "invenção" ou elaboração de uma estratégia para experimentar, conjecturar, verificar, justificar sua solução. A resolução de uma situação desse tipo representa uma demanda cognitiva e motivacional maior do que para a realização de exercícios.

Apesar dos estudos e do que se discute sobre o potencial da RP no ensino, fazer com que essa metodologia seja incorporada à sala de aula de forma efetiva, com os objetivos previstos, não é uma tarefa fácil. Para parte dos professores da Educação Básica, conforme aponta Redling (2011), abordar conceitos e métodos sob a perspectiva da Resolução de Problemas ainda se limita a explicar um procedimento que funcione para resolver determinados tipos de problemas e fazer com que seu aluno reproduza tal procedimento. Dessa forma, a resolução de um problema em Matemática se apresenta como algo "estático", restrito à identificação de uma técnica ou estratégia específica, não estimulando nem propiciando o desenvolvimento do pensamento matemático e da criatividade.

Segundo Allevato (2005), a RP favorece um trabalho mais autônomo, em que o conhecimento construído fará mais sentido para o aluno, aumentando a confiança em suas próprias capacidades, por isso as razões para que tal metodologia seja utilizada devem ser consideradas. O ensino baseado numa metodologia de Resolução de Problemas é favorável na construção de novas ideias, que "são formadas pouco a pouco, ao longo do tempo, quando os alunos refletem ativamente sobre elas e as testam através dos muitos diferentes caminhos que o professor pode lhes oferecer” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 240).

Nesse processo de construção de novas ideias através da atividade de resolução de problemas, um aspecto importante a ser considerado são as representações matemáticas. Conforme aponta Carreira (1999), os diferentes tipos de representações de ideias matemáticas são entendidos como ferramentas úteis na busca de soluções aos problemas propostos. A autora destaca a diferenciação entre representações internas, relacionadas às imagens mentais construídas por um indivíduo, e representações externas. No segundo caso, trata-se de organizações simbólicas “materializáveis” que têm por objetivo traduzir uma determinada situação. Dessa forma, considera representações matemáticas os objetos formais utilizados para construir representações externas que se enquadram num conjunto de estruturas matemáticas ou fazem apelo a um universo conceitual de natureza matemática.

Carreira (1999) enfatiza o uso de representações como ferramentas matemáticas que os alunos devem mobilizar corretamente perante uma situação concreta. Segundo ela, se o aluno estiver em condições de desenvolver códigos gráficos ou simbólicos que lhe permitam representar uma situação, ele terá mais poder matemático para lidar com um problema.

Ainda com relação às representações externas, Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês, fornece um referencial estruturado de análise do funcionamento cognitivo do pensamento em Matemática. Primeiramente, Duval (2009) destaca que, em Matemática, os objetos não são acessíveis perceptiva ou instrumentalmente aos nossos sentidos e o acesso a eles passa necessariamente por representações semióticas.

Desta forma, entendemos ser válido considerar um estudo sobre o papel das representações nos processos de Resolução de Problemas. Neste artigo, apresentamos o desenvolvimento de um experimento baseado em Resolução de Problemas realizado em uma escola pública da cidade de São Paulo com estudantes da 1ª série do Ensino Médio. Com a pesquisa, buscamos responder a seguinte questão: em que medida o uso de determinados registros de representação subsidiam as atividades de resolução de problemas de estudantes do Ensino Médio?

A seguir, trazemos com mais detalhes a questão das representações semióticas à luz da teoria de Duval (2003, 2009, 2012). Na sequência, o percurso metodológico do estudo e, por fim, os principais resultados obtidos a partir das análises.

A questão das representações semióticas

Durante a busca da solução de um problema, as ideias precisam ser organizadas a partir da representação de relações e objetos matemáticos. Para Duval (2009), o acesso a objetos matemáticos é obtido por meio de representações semióticas. O papel fundamental específico das representações semióticas é o uso de um sistema particular de signos – por exemplo, língua natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos – não apenas como simples meios de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação – ou seja, para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem – mas são igualmente essenciais à atividade cognitiva de pensamento. As representações semióticas são, assim, produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema semiótico que tem suas condições próprias de significação e de funcionamento. São representações conscientes, inseparáveis da visão que se tem de algo.

Do ponto de vista do ensino, possibilitar a apropriação desses diferentes registros implica em criar condições para a apreensão de conceitos matemáticos pelos alunos, pois a distinção entre um objeto e sua representação é um ponto estratégico para a compreensão da Matemática, uma vez que, de acordo com Duval (2012), quando se confunde o objeto com sua representação, há uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem. Para o autor, o pensamento está fortemente relacionado às operações semióticas e, consequentemente, não haverá compreensão possível sem o recurso às representações semióticas.

Assim, ele considera que as representações mentais dependem da interiorização das representações semióticas e somente as representações semióticas permitem preencher algumas funções cognitivas. Para explicar esse fato, o autor utiliza os seguintes termos: semiósis, a apreensão ou produção de uma representação semiótica; noésis, a apreensão conceitual de um objeto.

Segundo Duval (2009), para que ocorra a apreensão de um objeto matemático é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semiósis* (representações). Ou seja, não há *noésis* sem *semiósis*. Porém, não se trata de determinar várias representações de um mesmo objeto, mas, de coordenar diversos registros de representação semiótica para sua apreensão conceitual.

Logo, entendemos que é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar diferentes registros de representação semiótica e, em uma atividade matemática, poder escolher um registro no lugar de outro.

Nesse sentido, um registro é entendido, então, como um sistema semiótico que tem funções fundamentais no funcionamento cognitivo consciente. Em Matemática, são considerados principalmente quatro tipos de registros: Língua natural, associações verbais com argumentações e deduções; Figural, figuras geométricas planas ou espaciais, com apreensão operatória, perceptiva, sequencial e discursiva; Sistemas de escritas e cálculo, numéricas, algébricas, simbólicas; Gráfico, mudanças de sistema de coordenadas, interpolação e extrapolação.

Há três atividades cognitivas fundamentais ligadas à *semiósis* para que um sistema semiótico possa constituir um registro de representação: Formação, Tratamento e Conversão.

A Formação ocorre a partir de uma seleção de características e de dados do conteúdo a ser representado. Por se tratar de uma tarefa que pode ser comparada a uma descrição, a formação de uma representação deve respeitar regras, cujas funções são assegurar as condições de identificação e reconhecimento da representação e a possibilidade de utilização. Pode ocorrer através da enunciação de uma frase (compreensível em determinada língua natural), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula.

O Tratamento é a transformação de uma representação no mesmo registro em que ela foi formada, ou seja, é uma transformação interna a um registro. O cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional).

A Conversão é a transformação de uma representação em uma interpretação em outro registro, conservando total ou parcialmente o conteúdo da representação inicial. Trata-se de uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter). Temos, por exemplo, uma ilustração como a conversão de uma representação em língua natural em uma representação figural.

Para exemplificar a diferença e independência do tratamento em relação à conversão, Duval (2012a) utiliza o seguinte exemplo: alunos podem efetuar a adição de dois números com sua expressão decimal e com sua expressão fracionária, que necessitam o uso de tratamentos diferentes, e podem não pensar em converter, se isto for necessário, a expressão decimal de um número em sua expressão fracionária (e reciprocamente), ou mesmo não conseguir efetuar a conversão.

Os registros figurais, em especial, aparecem na resolução de problemas de Geometria como auxiliares, por vezes permitindo acesso mais fácil à ideia da solução. Para Duval (2012), as atividades de construção de figuras podem “ensinar a ver”, isto é, permitem descobrir, mobilizar ou controlar a produtividade heurística delas.

A heurística de problemas de Geometria está relacionada a um registro de representações que originam formas de interpretações autônomas, entre elas, a apreensão operatória de figuras. Esse tipo de apreensão consiste na divisão de uma figura e a análise de suas partes – combinando-as e recombinando-as – e permite a operação de reconfiguração.

Para Duval (2012), a reconfiguração é um tratamento que possibilita a comparação e, eventualmente, o reagrupamento de subfiguras de uma figura a partir de sua divisão e/ou decomposição. Quando for o caso, pode-se, ainda, incluir certo número de partes da figura, fazendo a divisão de suas unidades elementares. Assim, obtém-se uma figura diferente daquela dada inicialmente. Portanto, as reconfigurações possibilitam o uso de figuras com sua função heurística na resolução de problemas. Para um estudo mais completo sobre apreensão operatória de figuras, ver Jahn e Bongiovanni (2019).

Consideramos esta discussão a respeito das representações semióticas na concepção e análise das atividades constituintes do experimento em questão. A seguir, evidenciamos o contexto de desenvolvimento da pesquisa.

O estudo experimental

A pesquisa compreendeu um estudo experimental – elaboração, realização e análise de situações de Resolução de Problemas, com ênfase no uso de diferentes representações – cujas análises foram de natureza qualitativa.

O estudo experimental é caracterizado pela "realização de 'experimentos' que visam verificar a validade de determinadas hipóteses em relação a um fenômeno ou problema" (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 104). Dessa forma, "o pesquisador tenta produzir um fenômeno para observá-lo sob controle" (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 104).

Com base nessa perspectiva, nosso estudo envolveu a participação de três turmas de 1ª série do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de São Paulo, totalizando 97 alunos, em três fases, que ocorreram durante as aulas regulares de Matemática. Nesse contexto, a pesquisadora assumiu o papel de professora, enquanto a professora da turma permaneceu, ao longo dos encontros, como observadora.

A inspiração para o planejamento e elaboração dos instrumentos utilizados na experiência veio do trabalho de Fagnant e Vlassis (2013), com as necessárias adaptações, principalmente devido ao nível de escolaridade dos sujeitos da pesquisa. Essas autoras destacam o papel das representações no processo de resolução de problemas. Elas realizaram testes com alunos que não tinham familiaridade com a produção e utilização de representações para resolver problemas, examinando o impacto de dois tipos de representações esquemáticas no desempenho dos alunos na resolução de problemas não rotineiros. Assim, elas analisaram: o efeito da presença de dois tipos de representação esquemática (diagramas e desenhos esquemáticos) na resolução de problemas aritméticos; como os alunos (re)utilizavam cada uma dessas representações esquemáticas na resolução de problemas; em que medida a presença e/ou produção dessas representações esquemáticas têm impacto diferenciado de acordo com o tipo de problema. Os resultados iniciais mostraram que, sem instrução específica, os estudantes não fizeram uso espontâneo de qualquer representação esquemática para resolvê-los.

Em uma das fases do experimento, em que os problemas eram acompanhados por um dos tipos de representação, sugerindo um meio de representá-los, verificou-se um efeito positivo no desempenho geral dos estudantes.

Na última fase, em que os problemas do teste novamente não estavam acompanhados da sugestão de representação, a maioria dos alunos produziu ou tentou produzir uma representação semelhante às sugeridas nas fases anteriores.

Buscando compreender o papel das representações na atividade de resolução de problemas, apoiamo-nos nos estudos de Duval (2009, 2011) que enfatizam a importância e necessidade de um ensino pautado nos registros de representação semiótica para a aprendizagem em Matemática. Segundo esse autor, a compreensão em Matemática supõe a coordenação de, ao menos, dois registros de representação semiótica. Tal coordenação está presente na atividade de conversão que é a transformação de uma representação em uma interpretação em outro registro, conservando total ou parcialmente o conteúdo da representação inicial.

Segundo Duval (2011), a conversão é fundamental do ponto de vista cognitivo, uma vez que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão, e não pode ser reduzida a uma simples "codificação". Trata-se de uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter). Dessa forma, o autor destaca que a compreensão integral de um conteúdo conceitual se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.

Nesse contexto, pretendemos enfatizar o uso de diferentes representações semióticas em atividades de resolução de problemas, visando auxiliar os estudantes na aquisição dessas habilidades. Buscamos, portanto, analisar atividades de conversão na produção dos alunos ao resolverem problemas.

Em relação ao experimento, os alunos, em grupos, resolveram problemas dentro do princípio de trabalho coletivo que é proposto no Rali Matemático[3], uma competição entre classes (de 8 a 16 anos) pautada na resolução de problemas matemáticos. Teve início em 1993 na Suíça e hoje se desenvolve em vários países. Sua última edição (27ª edição) foi realizada em 2019, com a participação de mais de 6 500 turmas.

A escolha pelo Rali se deu, primeiro, pelos tipos de problemas propostos, que admitem diversas representações. Os problemas das provas do Rali são diferenciados pelos domínios matemáticos necessários para sua resolução e pela categoria às quais se destinam. Os referidos domínios considerados são: Aritmética, Álgebra, Geometria e Lógica. Em geral, os enunciados dos problemas solicitam a explicação do raciocínio utilizado nas soluções e não são resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, já que exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que pode levá-lo à solução, de acordo com o que já discutimos sobre a definição de problema.

Dessa forma, os organizadores estabelecem que os problemas propostos devem ser inéditos – uma vez que se os alunos já conhecem a solução, não é mais um problema! – ricos e estimulantes para os estudantes, o que os caracterizam como verdadeiros problemas, de acordo com as definições encontradas na literatura e mencionadas na introdução deste texto.

Além disso, o modelo de resolução coletiva se mostra inclusivo na medida em que permite que todos os estudantes exponham, defendam e discutam ideias. Nesse modelo de trabalho, o papel do professor é fundamentalmente o de observador que analisa o comportamento dos estudantes nos grupos e estimula o trabalho colaborativo, sendo, assim, um mediador que leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias, conforme defendem Allevato e Onuchic (2009).

Com essa escolha, fizemos a hipótese que o Rali fornece um contexto ou ambiente favorável à aprendizagem matemática via Resolução de Problemas. Mais especificamente, as discussões de problemas do Rali permitiriam um tipo de intervenção com ênfase nas representações, nos moldes da pesquisa de Fagnant e Vlassis (2013) citada anteriormente.

O experimento foi realizado em três fases, conforme mostramos no Quadro 1, com as quais buscamos examinar os seguintes aspectos: as principais dificuldades dos alunos na resolução dos problemas propostos, relacionando-as a conhecimentos conceituais ou procedimentais; os tipos de representações com as quais os alunos estão mais familiarizados e as que produzem espontaneamente na resolução dos problemas; o papel das representações

[3] Organizado pela Associação do Rali Matemático Transalpino, para mais detalhes ver: www.armtint.org.

envolvidas nas resoluções, considerando um trabalho efetivo sobre elas; a reutilização das estratégias discutidas em cada fase do experimento.

Quadro 1: Quadro Sinóptico do Dispositivo Experimental

<table>
<tr><th colspan="2">Fases do Estudo</th><th>Atividades</th><th>Instrumentos de produção de dados</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Fase 1</td><td rowspan="3">Relações pessoais dos sujeitos sobre a Resolução de Problemas</td><td>Etapa 1 (duração: 2 x 50 min.)
Atividade inicial: Problema e Exercício (em dupla)
Questionário inicial
Apresentação do Rali Matemático</td><td rowspan="3">- Produções escritas (das duplas ou grupos)
- Respostas ao questionário
- Notas de observação</td></tr>
<tr><td>Etapa 2 (duração: 1 x 50 min.)Prova I: Resolução, em grupo, de 3 problemas do Rali Matemático</td></tr>
<tr><td>Etapa 3 (duração: 2 x 50 min.)
Discussão dos problemas da Prova I com ênfase no uso de diferentes representações</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fase 2</td><td rowspan="2">Exploração de diferentes representações na resolução de problemas</td><td>Etapa 1 (duração: 1 x 50min.)
Prova II: Resolução, em grupo, de 3 problemas do Rali, com indicação de representação a ser utilizada</td><td rowspan="2">- Produções escritas dos grupos (respostas da Prova II)
- Notas de observação</td></tr>
<tr><td>Etapa 2 (duração: 2 x 50min)
Discussão dos problemas da Prova II com ênfase nas diferentes representações possíveis para resolução</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fase 3</td><td rowspan="2">(Re)Utilização de representações na Resolução de Problemas</td><td>Etapa 1 (duração: 1 x 50min)
Prova III: Resolução de 3 problemas do Rali</td><td rowspan="2">- Produções escritas dos grupos (respostas da Prova III)
- Respostas ao questionário
- Notas de observação</td></tr>
<tr><td>Etapa 2 (duração: 1 x 50min)
Questionário final</td></tr>
</table>

Fonte: Prado (2015, p. 63)

Tendo esclarecido o tipo de atividade da qual os alunos participariam, eles resolveram três problemas em grupo extraídos do banco de questões do Rali Matemático – atividade denominada "Prova I".

Como nas demais provas, os dois primeiros problemas envolviam o domínio das Funções e o último, da Geometria. Abaixo, reproduzimos um dos problemas propostos.

Figura 1: Problema da Prova I

Rali Matemático PROVA I ©ARMT

1. TEMPOS DE COLHEITA DE UVA

Nas vinhas do Senhor Bruno, num dia de colheita de uva, com toda uva colhida, enchem-se 18 tanques grandes e 13 tanques médios. Para transportar esses tanques até a adega, o Senhor Bruno dispõe de três tratores:

- o trator A pode transportar, completamente carregado, 3 tanques grandes e 2 médios;
- o trator B pode transportar, completamente carregado, 2 tanques grandes e 1 médio;
- o trator C pode transportar, completamente carregado, 1 tanque grande e 1 médio;

Um dia, o Senhor Bruno utilizou pelo menos uma vez todos esses tratores e sempre completamente carregados.

Quantas viagens o Senhor Bruno pode ter feito com cada um desses tratores para transportar todos os tanques para a adega?

Descrevam todas as viagens possíveis e expliquem como vocês as encontraram.

Fonte: Banco de problemas ARMT[4], tradução nossa.

O enunciado do problema é dado em língua natural, com alguns dados numéricos. Uma das possíveis soluções pode ser obtida por meio de um registro numérico tabular. A utilização da tabela, em termos de registro de representação, caracteriza uma conversão do registro da língua natural do enunciado para o numérico tabular.

A produção de tal registro requer uma interpretação dos dados contidos no enunciado, em língua natural, que examine o número de tanques transportados de acordo com o número de viagens feitas por cada trator. Dessa forma, percebemos que há uma interdependência entre os dados de cada coluna e não se trata de uma atividade de preenchimento de uma tabela pela identificação direta dos dados numéricos no enunciado do problema. Com isso, fazemos a hipótese de que esse tipo de conversão não seja produzida espontaneamente pelos alunos, razão pela qual, foi proposta nesta etapa da Fase 1, quando da discussão das resoluções. Assim, buscamos observar se é compreendida pelos alunos e se pode assumir um papel auxiliar nas soluções.

É possível também encontrar a solução por meio de tentativas. Dessa forma, faz-se uma conversão do registro em língua natural do enunciado para o registro numérico, observando o que é necessário para que as condições propostas na situação sejam satisfeitas. É uma maneira de se chegar à solução que nem sempre ocorre de forma organizada e, por isso, pode tanto inibir a busca por todas as soluções possíveis, quanto levar o aluno a incorrer em erros de cálculo.

[4] Disponível em: http://www.armtint.org/. Acesso em: 20 dez. 2022.

Por fim, é um tipo de problema que admite solução algébrica. Nesse caso, a utilização do registro algébrico exige que, após tratamentos nesse registro, uma nova conversão seja feita para o registro numérico. Deve-se observar que a solução do problema é restrita a números inteiros positivos. Portanto, é preciso considerar, no registro numérico, quais somas de números inteiros positivos são iguais a cinco e, ainda, verificar, numericamente, a quantidade de viagens de C.

Como já mencionado, nos problemas de Geometria de todas as provas, a operação de reconfiguração tem papel fundamental na produtividade heurística das figuras. Reproduzimos na Figura 2 o Problema 3 da mesma prova.

Figura 2: Problema 3, Prova I – 22º RMT, 2014

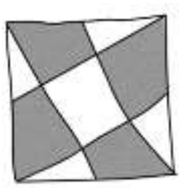
Rali Matemático PROVA I ©ARMT

3. A VARANDA DE JOSÉ

José tem uma varanda quadrada de 10 m de lado. Ele deseja pintar o chão de branco e cinza.

Fez um esboço para seu projeto, traçando um quadrado que representa a varanda e, no seu interior, quatro segmentos de reta que ligam cada vértice ao ponto médio de um lado oposto.

Pintou de cinza quatro partes e deixou as outras cinco em branco.



José observa seu esboço e se pergunta de qual formato serão as diferentes partes e se a área de todas as partes brancas será a mesma das partes cinzas juntas.

Calculem a área total das partes brancas e a das partes cinzas, dando detalhes de como pensaram e dos cálculos realizados.

Fonte: Banco de problemas ARMT[5], tradução nossa.

O enunciado do problema é dado no registro em língua natural e figural. A solução requer visualização, uma vez que a articulação entre a apreensão operatória e a apreensão perceptiva é necessária. A operação de reconfiguração é essencial, pois, após a identificação das partes que formam a figura, elas podem ser decompostas e reagrupadas de diferentes maneiras. A partir da reconfiguração é possível identificar partes equivalentes (de mesma área), por exemplo, a figura pode ser subdividida em triângulos congruentes; ou ainda pode-se

[5] Disponível em: http://www.armtint.org/. Acesso em: 20 dez. 2022.

recorrer a outro tipo de operação para modificação da figura, combinando um triângulo com um trapézio para a formação de quadrados de mesma área.

Ao identificar as partes em uma malha quadriculada, os alunos poderiam utilizar medidas e, numa conversão do registro figural para o registro numérico, calcular as áreas de cada figura. Nesse momento, há a possibilidade de se recorrer ao registro algébrico simbólico ao utilizar, por exemplo, o Teorema de Pitágoras para calcular as medidas dos lados do triângulo menor da figura. Para isso, seria preciso que os estudantes identificassem a relação entre as medidas dos dois catetos, fazendo a conversão do registro figural para o registro algébrico.

A última etapa desta fase tinha o objetivo de colocar em discussão a resolução dos problemas da Prova I, enfatizando as possibilidades de representações. É importante ressaltar que não se tratava de corrigir, ou expor as respostas para os problemas, mas permitir que os participantes expressassem suas ideias e, a partir da análise e discussão com a turma, chegassem a um consenso sobre a resposta.

A Fase 2, também em grupo, consistia na resolução de três problemas do Rali (Prova II), que permitem representações semelhantes às abordadas na fase anterior. No entanto, os dois primeiros problemas foram modificados de modo que, para solucioná-los, os alunos deveriam realizar um procedimento específico indicado no enunciado, como vemos na Figura 3. Tal procedimento é baseado em uma das representações possíveis para a resolução do problema.

Figura 3: Problema 1, Prova II – 16º RMT, 2008

Rali Matemático PROVA II ©**ARMT**

1. DIA DE CHUVA

Toda semana, Max e Leonardo compram na banca o último número da *Super Legal*, a revista preferida deles, e uma "coletânea" que inclui 5 edições antigas juntas.
Numa tarde de chuva, Max lê a última edição publicada, a 5802, e Leonardo, a coletânea das edições antigas 4506, 4507, 4508, 4509, 4510 que acabou de ser publicada.
Num certo momento, Leonardo pergunta: *"Em breve não haverá mais coletâneas porque elas alcançarão o último número da Super Legal! O que eu vou ler então?"*
Max responde: *"Você tem razão! Eu nunca tinha pensado nisso, mas não se preocupe, isso vai demorar muitas semanas para acontecer, até lá a chuva terá parado!"*
Em quantas semanas as "coletâneas" de números antigos coincidirão com o novo número da revista *Super Legal*?
Para responder, utilize a tabela abaixo. Ao final, justifique sua resposta.

Semana	Nº da nova revista	Último nº da coletânea

0	5802	4510
1	5802+1	4510+5
2		
3		
4		
...		
N		

Fonte: Banco de problemas ARMT[6], tradução nossa.

Para o problema de Geometria, a indicação de uma operação a ser realizada para a resolução anularia qualquer pesquisa prévia a ser empregada. Assim, não foi sugerida uma representação específica a ser utilizada pelos alunos, apenas incentivado que relembrassem a discussão da resolução do Problema 3 da Prova I e que explorassem a representação figural.

Na Fase 3, novamente em grupo, os estudantes voltaram a resolver problemas sem qualquer sugestão (Prova III).

Após cada etapa foram feitas intervenções cujo objetivo era colocar em discussão a solução dos problemas com enfoque nas possíveis representações utilizadas para suas resoluções, enfatizando atividades de conversão de representações (DUVAL, 2009). Para isso, buscamos nos basear nas ideias dos próprios alunos e coordená-las com as possíveis maneiras de representar as situações propostas. Assim, visamos analisar o papel das representações envolvidas nas resoluções, considerando um trabalho efetivo sobre elas, e ainda, identificar em que medida a reutilização de estratégias discutidas em cada fase do experimento se faziam presentes e com sentido para os alunos.

Ao final, os alunos responderam um questionário final que permitiu examinar a maneira como eles interpretaram a experiência com Resolução de Problemas e, ainda, a opinião deles em relação ao experimento. A seguir, apresentaremos alguns elementos de análise de episódios da Etapa 2 da Fase 1 e das Fases 2 e 3.

Alguns dos Principais Resultados

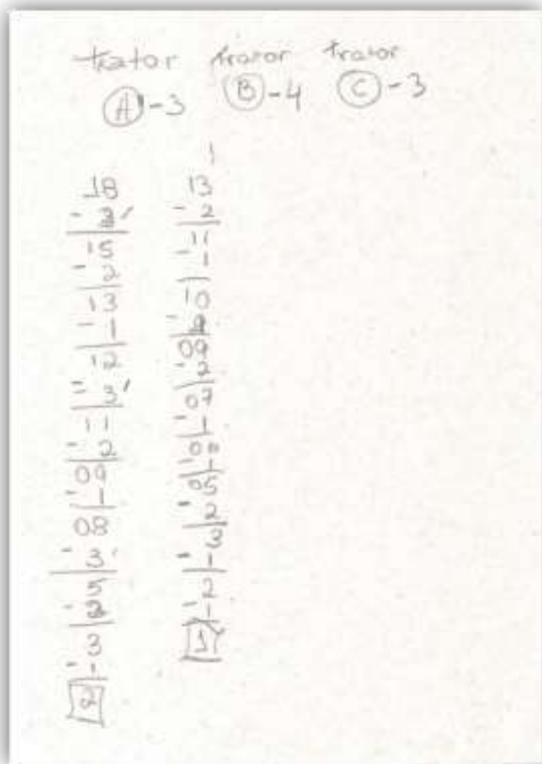
Com a análise dos resultados da Prova I, notamos que, apesar de muitos alunos

[6] Disponível em: http://www.armtint.org/. Acesso em: 20 dez. 2022.

compreenderem as situações propostas, eles tiveram dificuldade em produzir representações adequadas e úteis para resolução de cada problema. Dos 18 grupos que resolveram a prova, nenhum concluiu a resolução, portanto não obtiveram a resposta final dos problemas. Em seus registros, apenas foi possível perceber que a maior parte compreendeu os problemas, porém as representações utilizadas, seja pela desorganização ou por erros no tratamento delas, não auxiliaram na solução. Exemplo disso é a solução exibida na Figura 4. O procedimento utilizado foi o de subtrair a quantidade de tanques transportados à medida em que consideravam uma viagem de determinado trator. No entanto, em umas das subtrações, efetuaram 12 – 3 = 11, o que fez com que precisassem de mais tratores do que previa a resposta.

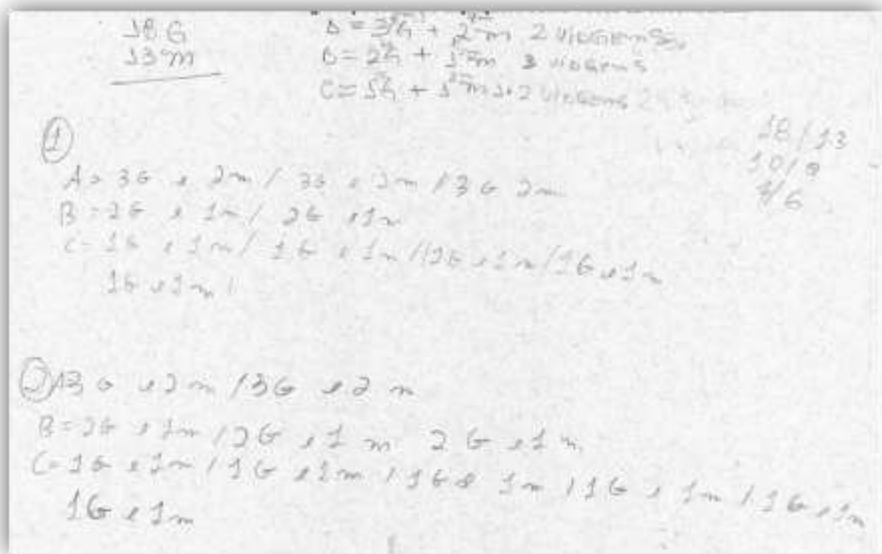
Um outro grupo obteve duas das quatro possibilidades de resposta, realizando, aparentemente, a adição da quantidade de tanques transportados a cada viagem considerada (conforme Figura 5). A cada tentativa, acrescentaram uma viagem para um dos tratores organizando-as em um registro que se assemelha a uma tabela, mas não conseguiram chegar em todas as possibilidades.

Figura 4: Solução do Grupo G1 – Problema 1, Prova I



Fonte: Prado (2015, p. 119).

Figura 5: Solução do Grupo G18 – Problema 1, Prova I



Fonte: Prado (2015, p. 120).

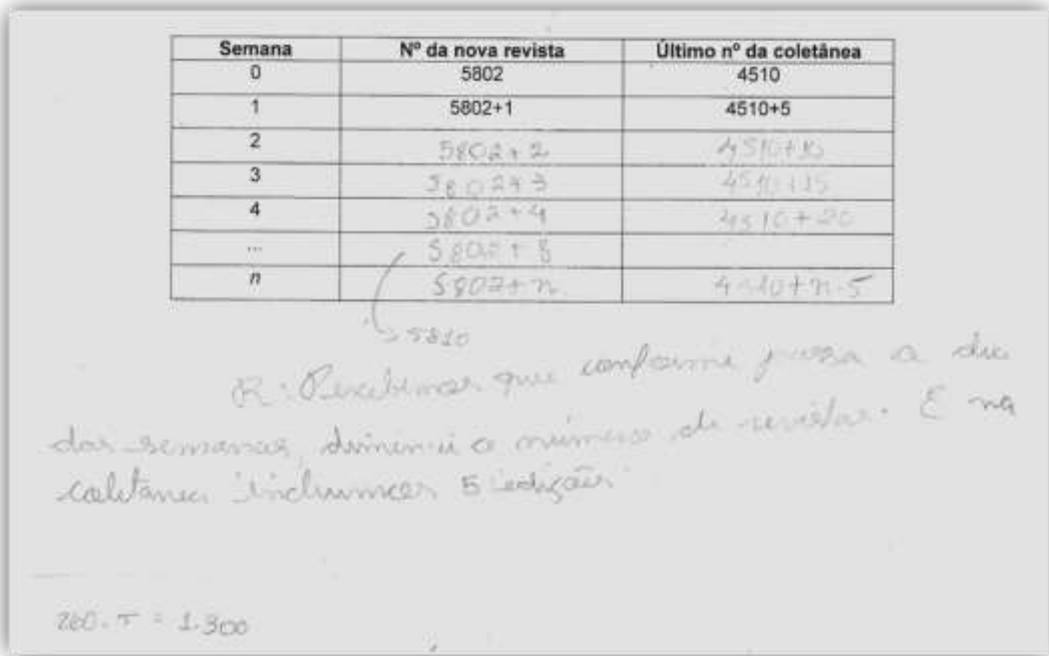
Já na Prova II, identificamos evidências de que a presença do registro de representação teve papel auxiliar na obtenção de informações pertinentes para as resoluções dos dois primeiros problemas. No entanto, no Problema 1 (enunciado reproduzido na Figura 3), por exemplo, a dificuldade para concluir as soluções se revelou a partir do momento em que foi necessária a conversão do registro numérico tabular para o simbólico-algébrico (conforme Figura 6) ou ainda o tratamento do registro algébrico (conforme Figura 7).

Figura 6: Solução do Grupo G15 – Problema 1, Prova II

Semana	Nº da nova revista	Último nº da coletânea
0	5802	4510
1	5802+1	4510+5
2	5802+2	4510+10
3	5802+3	4510+15
4	5802+4	4510+20
...	5802+5	4510+25
n	5802+6	4510+30

Fonte: Prado (2015, p. 132).

Figura 7: Solução do Grupo G8 – Problema 1, Prova II



Semana	Nº da nova revista	Último nº da coletânea
0	5802	4510
1	5802+1	4510+5
2	5802+2	4510+10
3	5802+3	4510+15
4	5802+4	4510+20
...	5802+5	
n	5802+n	4510+n.5

5810

R: Percebemos que conforme passa a dia das semanas, diminui o número de revistas. E na coletânea incluímos 5 edições

260 . 5 = 1.300

Fonte: Prado (2015, p. 133).

De fato, como afirma Duval (2011), a atividade de conversão mencionada é uma atividade complexa e os estudantes nem sempre a realizam espontaneamente, devendo ser objeto explícito de ensino, o que realizamos com base nas discussões das resoluções e na ênfase nos significados das diferentes representações.

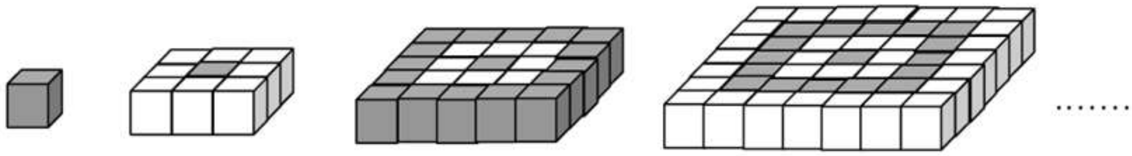
Abaixo, vemos o Problema 2 da Fase 3.

Figura 8: Problema 2, Prova III – 13º RMT, 2005

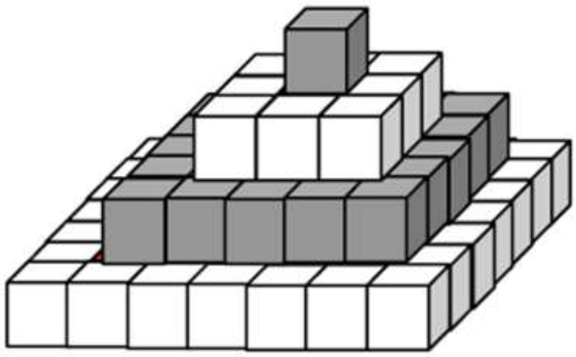
Rali Matemático PROVA III ©ARMT

2. AS PIRÂMIDES DE FELIPE

Felipe quer montar pirâmides com diversas camadas. Começou construindo as camadas a partir de um pequeno cubo cinza, cercando-o alternadamente com uma borda de cubos brancos, depois com uma borda de cubos cinzas. Vejam na figura abaixo.



Com um cubo cinza e a primeira camada, ele constrói uma pirâmide de dois andares. Com o primeiro cubo cinza e as duas primeiras camadas, ele constrói uma pirâmide de três andares. A figura abaixo mostra uma pirâmide de quatro andares.



Felipe percebe que para construir essa pirâmide, ele utilizou mais cubos brancos que cubos cinzas. Ele se pergunta o que aconteceria em uma pirâmide de cinco andares e em uma pirâmide de onze andares.

Para cada um desses dois casos, vocês devem calcular a diferença entre o número de cubos de cada cor. Expliquem como pensaram para chegar à resposta.

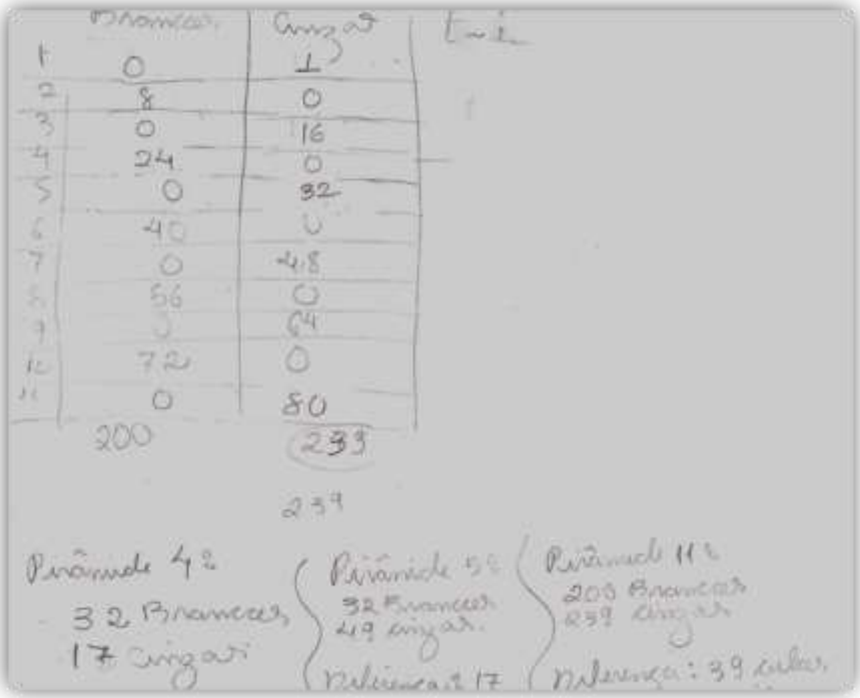
Fonte: Banco de problemas ARMT[7], tradução nossa.

Na Fase 3, vimos que mesmo sem obter respostas completas para os dois primeiros problemas da Prova III, grande parte dos grupos apresentou tentativas de representação de um dos tipos discutido nas etapas anteriores, ou, ao menos, uma maneira mais organizada de apresentar os dados e expor suas ideias.

Um dos grupos apresentou a solução utilizando registro tabular (Figura 9). Os estudantes construíram uma tabela considerando a quantidade de cubos de cada cor acrescentados a cada andar da pirâmide. No entanto, para responder às perguntas sobre a diferença entre a quantidade de cubos, efetuaram a soma dos números de cada coluna, o que resultava na contagem de cubos do último andar e não da pirâmide toda.

[7] Disponível em: http://www.armtint.org/. Acesso em: 20 dez. 2022.

Figura 9: Solução do Grupo G8 – Problema 2, Prova III



Fonte: Prado (2015, p. 133).

Outro grupo também apresentou a tentativa de resolução por meio de uma representação numérica tabular. A partir da análise do registro tabular, vemos que os estudantes exibiram um raciocínio correto, porém, não conseguiram concluir a resolução, que poderia ser obtida efetuando a conversão para o registro simbólico-algébrico.

Figura 10: Solução do Grupo G13 – Problema 2, Prova III

Fonte: Prado (2015, p. 133).

A partir das respostas e com base nos elementos da discussão coletiva, identificamos que os problemas escolhidos para compor as provas foram considerados, pelos estudantes, de um nível de dificuldade acima do que eles estavam habituados. Parte pela dificuldade de compreensão dos enunciados, parte por não reconhecerem de imediato o tipo de estratégia que deveriam utilizar, o que teve como consequência, a falta de tempo para conclusão das resoluções. Isso pode indicar que a atividade de resolução de problemas na forma como temos defendido não é realizada com frequência pelos estudantes participantes.

Além disso, ainda que conseguissem compreender o problema e criassem boas estratégias de resolução, em muitos casos, a conclusão ficou prejudicada pela falta de coordenação entre diferentes tipos de representações semióticas. Exemplo desse fato pode ser notado nos casos em que os estudantes não conseguiram concluir a resolução por não efetuarem a conversão para o registro algébrico e, no entanto, conseguiram explicar, oralmente, durante as discussões um processo de resolução que indicava uma generalização.

Ainda que, especificamente, tenhamos obtido poucas informações sobre o impacto de se trabalhar as representações semióticas de modo efetivo, até pelo lapso de tempo do experimento, podemos concluir que, de alguma forma, houve a apreensão de determinados tipos de representação pelos alunos ao observarmos que eles as utilizaram nas resoluções da Prova 3. Isso também foi evidenciado nas respostas ao Questionário Final.

Com a análise das respostas e, relembrando os encontros no decorrer do desenvolvimento da pesquisa, constatamos que, de maneira geral, a experiência foi válida para os alunos. Eles se mostraram motivados, envolvidos, concentrados em suas próprias ideias e dispostos a discuti-las e defendê-las no grupo, tanto na realização das provas, quanto durante as discussões. Muitos alunos concordaram que a experiência de trabalhar em grupo foi motivadora, pois compartilhavam ideias e podiam avançar nas conclusões. Além disso, de certa forma, compreenderam a ênfase dada às diversas formas de representar os problemas, conforme ilustram as respostas de alguns alunos:

> - *Achei interessante, porque percebi que a matemática nem sempre é baseada em fórmulas e equações.*
> - *Meu grupo sempre esteve disposto a chegar nas resoluções, mesmo com certa dificuldade que depois da apresentação de alguns métodos para resoluções ficou muito mais fácil*
> - *Na minha opinião gostei do Rali e dos problemas que são propostos, até porque nos ensina a pensar por etapas, utilizar tabelas e etc.* (PRADO, 2015, p. 154-155).

Considerações Finais

Iniciamos este trabalho com a motivação de promover uma experiência envolvendo Resolução de Problemas, de modo que essa metodologia fosse incorporada às práticas de sala de aula com seus principais objetivos: proporcionar a descoberta, dar oportunidade de o aluno desenvolver diferentes tipos de raciocínios e estratégias, pensar matematicamente, ampliar seu conhecimento.

Com o desenvolvimento do experimento constituído de três fases, buscamos compreender a maneira como determinados registros de representação subsidiam as atividades de resolução de problemas de alunos do Ensino Médio. Para isso, analisamos as produções dos alunos visando identificar as principais dificuldades, representações utilizadas, bem como, o papel dessas representações na resolução dos problemas propostos. Além disso, procuramos verificar como as estratégias discutidas em sala de aula, ao longo da pesquisa, seriam (re)utilizadas por eles.

Consideramos que os objetivos do trabalho foram globalmente atingidos. Vimos que a implementação da Resolução de Problemas e a maneira como as atividades foram organizadas permitiram que os alunos vivenciassem uma experiência como participantes ativos nos processos de resolução dos problemas. Ainda mais, a escolha do contexto do Rali Matemático favoreceu o trabalho cooperativo e colaborativo, incentivando os alunos na busca por defender e discutir suas ideias, além de redigir explicações de suas resoluções.

Especificamente, obtivemos poucas informações sobre o impacto de se trabalhar as representações semióticas de modo efetivo. Apesar de os alunos reconhecerem o foco e a importância dada às representações, como já mencionado, eles não viram a proposta do Rali e das discussões como integradas às aulas regulares de Matemática. Além disso, as intervenções foram pontuais e as representações trabalhadas muito específicas. Portanto, o experimento não nos permitiu avaliar com clareza até que ponto os sujeitos adquiriram habilidades necessárias para escolher, utilizar, produzir e manipular certos tipos de representação na busca de soluções para problemas diversos. Ainda assim, o estudo possibilitou melhor compreender as potencialidades de nossa proposta.

Para o nosso desenvolvimento profissional, a pesquisa em relação ao tema e à implementação efetiva da experiência em Resolução de Problemas teve grande relevância. Vivenciar tal experiência envolveu dedicação no preparo das atividades e das devolutivas, análise atenta dos dados e cuidado para controlar algumas variáveis de modo que os objetivos fossem atingidos. Todo o trabalho favoreceu, então, uma investigação sobre nossa prática docente e confirmou a motivação inicial de que o ensino de Matemática pode – e deve – ser baseado na Resolução de Problemas.

Referências

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados:** Análise de uma Experiência. 2005. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problema. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, Ano XXXIII, n.55, p.1-19, 2009. Disponível em: http://www.ufrrj.br/SEER/index.php/gepem/article/view/54/87. Acesso em: 6 out. 2022.

CARREIRA, S. P. G. O Papel das Representações na Resolução de Problemas de Matemática Aplicada. *In:* ABRANTES, P. *et al* (orgs.). **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo**. Lisboa: APM, 1999. p. 253-265.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In:* MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática.** Campinas/SP: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** registro semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Matemática**, Florianópolis, v. 07, n. 1, p. 118-138, 2012. Disponível em: www.periodicos.ufsc.br. Acesso em: 30 mar. 2016.

ECHEVERRÍA, M. P. P; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. *In:* POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas:** Aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

FAGNANT, A.; VLASSIS, J. Schematic Representations in Arithmetical Problem Solving: Analysis of Their Impact on Grade 4 Students. **Educational Studies in Mathematics**, 84(1), p. 149-168, 2013.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas/SP: Autores Associados, 2012.

JAHN. A. P; BONGIOVANNI, V. Apreensão Operatória de Figuras em Situações Geométricas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v.12, n.3, p. 245-257, 2019. Disponível em: https://revista.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/7584. Acesso em: 20 dez. 2022.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.C. (orgs.).

Educação Matemática: Pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 213-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro/SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PINTO, N. B. Marcas históricas da matemática moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 5, n.16, p. 25-38, 2005.

POLYA, G. Ensinando por meio de problemas. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 7, p. 11-16, 1985.

PRADO, M. **Resolução de Problemas e Representações Semióticas:** uma experiência no Ensino Médio inspirada no Rali Matemático. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, São Paulo, 2015.

REDLING, J. P. **A Metodologia de Resolução de Problemas:** concepções e práticas pedagógicas de professores de Matemática do Ensino Fundamental. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, Bauru, 2011. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/90928. Acesso em: 12 dez. 2022.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving**. Flórida: Academic Press, 1985.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática do Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Recebido em: 20 de dezembro de 2022
Aprovado em: 22 de fevereiro de 2023