revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: PROCESSOS EVIDENCIADOS POR ALUNOS DO 7.º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.27.158-181

Nilva Marcia Dallago Julio[1]
Eliane Maria de Oliveira Araman[2]

Resumo: O presente artigo tem como objetivo investigar processos de raciocínio matemático desenvolvidos por um trio de alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada da cidade de Maringá, no estado do Paraná, ao resolverem problemas, apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A partir do referencial teórico adotado, busca-se definir o que é Raciocínio Matemático, bem como os aspectos principais que o envolvem, por meio de um entendimento organizado por Jeannotte e Kieran (2017). O estudo está inserido em um projeto mais amplo e segue uma perspectiva interpretativa e qualitativa, baseada no método de Investigação Baseada em Design - (IBD). Os dados foram coletados, usando gravação de áudios dos diálogos entre os alunos e o professor, assim como registros escritos feitos pelos alunos ao resolverem os problemas propostos. Os áudios foram transcritos e analisados à luz da fundamentação teórica. Os resultados indicaram que, ao oportunizar situações que envolvem problemas pouco usuais no ensino da matemática, se contribui para mobilizar processos de raciocínio matemático, tais como conjecturar, exemplificar, justificar e validar.
Palavras-chave: Raciocínio Matemático. Resolução de Problemas. Processos de raciocínio matemático.

MATHEMATICAL REASONING THROUGH PROBLEM SOLVING: PROCESSES EVIDENCED BY 7TH GRADE ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS

Abstract: This article aims to investigate mathematical reasoning processes developed by a trio of students in the 7th grade of Elementary School in the city of Maringá in the State of Paraná. During the research, the students solved problems, supported by the Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving. From the theoretical framework adopted, we try to define what mathematical reasoning is, as well as the main aspects that envolve it, through an understanding organized by Jeannotte and Kieran (2017). The study is part of a broader project and it follows an interpretative and qualitative perspective based on the Design-Based Research (DBR) method. Data were collected through audios recording of dialogues between students and the teacher, as well as the records done by students when they solved the proposed problems. The transcribed and analyzed audios considering the theorical foundation. As a result, we found that providing opportunities for situations involving unusual problems in mathematics contributed to the mobilization evidenced mathematical reasoning processes such as, conjecturing, exemplifying, justifying, and validating.
Keywords: Mathematical reasoning. Problem Solving. Mathematical reasoning processes.

---

[1]Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, *campi* Cornélio Procópio e Londrina. E-mail: nilva.dallago@gmail.com - ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9367-2460.
[2] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM), pela Universidade Estadual de Londrina – UEL. Professora Associada do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, *campi* Cornélio Procópio e Londrina. E-mail: elianearaman@utfpr.edu.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1808-2599.

Introdução

Raciocinar, embora não seja exclusividade da Matemática, é um termo muito utilizado na aprendizagem matemática. Para Lannin, Ellis e Elliot (2011, p.7), "o raciocínio matemático é a essência e sem raciocínio matemático não há matemática", e complementam dizendo que "o raciocínio matemático é fundamental para uma compreensão mais profunda da matemática". Para Oliveira (2008, p.3), raciocínio matemático "é um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas (conhecimento prévio)".

A capacidade de desenvolver o raciocínio matemático está relacionada com a escolha de problemas que devem ser desafiadores aos alunos, promovendo a competência, ao interpretar, argumentar e justificar. Ciente da importância de desenvolver o raciocínio matemático ao ensinar matemática, recorremos à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para trabalhar com alguns problemas matemáticos em uma turma do 7.º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada do município de Maringá, Paraná. Como recorte, neste artigo, apresentamos a análise realizada a partir dos dados coletados com um trio de alunos, ao resolverem um dos problemas propostos, em que identificamos e discutimos os processos de raciocínio matemático desenvolvidos por eles.

Raciocínio matemático

Há um consenso da importância de trabalhar com o raciocínio matemático, apontado por vários autores (JEANNOTTE; KIERAN, 2017; LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011), mas é preciso aprofundamento e estudo para compreendê-lo e saber como desenvolvê-lo em sala de aula.

Atualmente, o discurso sobre raciocínio matemático é polissêmico, há várias visões sobre a questão que permeiam a comunidade matemática. Para autores como Jeannotte e Kieran (2017, p.7), o raciocínio matemático "é um processo de comunicação com os outros que permite inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos". Já Carneiro, Araman e Serrazina (2020, p. 36) indicam "que o raciocínio matemático consiste em produzir um enunciado matemático a partir de outros que são assumidos como verdadeiros".

Para Brodie (2010, p. 7), quando raciocinamos, desenvolvemos linhas de pensamento ou argumentação, que podem servir a vários propósitos, como "convencer os outros ou a nós mesmos de uma determinada afirmação e para resolver um problema". O raciocinar vai muito além de uma aceitação, é argumentar acerca de questões aceitas como verdadeiras, desencadeando questionamentos e aprendizagens. Requer se apropriar de conceitos para desenvolver as habilidades e isso se torna possível por meio de tarefas desafiadoras, como por exemplo as tarefas exploratórias e a resolução de problemas (ANJOS *et al*., 2022), que instiguem o raciocinar matematicamente

Jeannotte e Kieran (2017) explicam como a estrutura do raciocínio matemático se apresenta, e salientam "que o objetivo não é construir um modelo que forneça práticas específicas para encorajar o raciocínio matemático" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 4), mas sim, indicar conceitos que podem auxiliar no desenvolvimento do raciocínio matemático nas práticas pedagógicas. Enfatizam a importância de conhecer como os aspectos estruturais e de processo de raciocínio matemático se representam, indicando "duas diferentes formas de olhar para um determinado discurso" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 7). Ambas relacionam-se dialeticamente: "as estruturas são parte do aspecto do processo de raciocínio matemático e os processos contribuem para a construção dessas estruturas" As autoras conceituam separadamente os aspectos estrutural e os de processo O primeiro é composto por três raciocínios lógicos (dedução, abdução e indução) e o aspecto de processo associa-se à busca por semelhanças/ diferenças e validação. Assim, o "aspecto estrutural do raciocínio matemático refere-se em geral a um aspecto mais estático, mais especificamente refere-se à forma como os elementos discursivos se combinam" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 7).

O aspecto estrutural não garante uma compreensão plena do raciocínio matemático na comunidade escolar, porque "enquanto apresenta de forma estática, os elementos narrativos, relações e valores epistêmicos que constituem o raciocínio matemático, ele negligência a temporalidade que são centrais para atividade de raciocínio" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 7). E então Jeannotte e Kieran (2017, p. 9), em seu modelo de raciocínio matemático, conceituam o aspecto do processo de raciocínio matemático "como processos cognitivos que são meta-discursivos, ou seja, que derivam narrativas sobre objetos ou relações, explorando as relações entre objetos".

É no aspecto de processos que está o foco da presente investigação. Assim, foram organizados aqui os processos encontrados na literatura, tendo como base a estrutura apresentada por Jeannotte e Kieran (2017), da seguinte forma: os processos que se relacionam à busca por semelhanças e diferenças, nos quais estão associados os processos de generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar e classificar, e os referentes à validação, que são justificar, provar e provar formalmente. Ainda, temos o exemplificar, que dá suporte aos demais processos.

Para Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12), "raciocinar matematicamente é um processo em evolução de conjecturar, generalizar, investigar o porquê, e desenvolver e avaliar argumentos". Conforme Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), conjecturar, generalizar e justificar destacam-se como processos essenciais do raciocínio matemático e, portanto, devem ser aplicados desde os primeiros anos de escolaridade. Para Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12), "conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras", logo os alunos podem exercitar conjecturas por meio de tarefas propostas em sala de aula, expondo seus argumentos.

A generalização é um processo com características próprias, ou seja, ao fazer conjecturas, os alunos iniciam um processo de identificação, levando à generalização, que permite relacionar um conjunto de dados quanto a um conjunto maior. Stylianides (2008, p. 9) interpreta a generalização como o "transporte de relações matemáticas de conjuntos dados para novos conjuntos para os quais os conjuntos originais são subconjuntos". As generalizações acontecem, muitas vezes, quando os alunos identificam algo em comum com os casos analisados, assim o raciocínio ultrapassa o momento para se elevar a uma outra dimensão, ou seja, a um raciocínio mais vasto.

Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 16) acrescentam que a generalização se dá, quando uma criança se concentra em um problema e pensa sobre "esse aspecto de forma mais ampla". E sob o olhar de Jeannotte e Kieran (2017, p. 9), "generalização é uma relação entre objetos do conjunto de um subconjunto deste conjunto". Mata-Pereira (2018, p. 10) faz uma observação no que concerne à generalização, o que difere, consideravelmente, a Matemática como ciência da Matemática escolar. "Em matemática, uma generalização frequentemente referida como teorema apenas é considerada verdadeira lhe for associada a uma demonstração válida (para os matemáticos)".

Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12) afirmam que "o raciocínio matemático envolve uma investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa".

E, de acordo com os entendimentos de Jeannotte e Kieran (2017, p. 10), a comparação é "um processo de raciocínio matemático que busca por semelhanças e diferenças e infere uma narrativa sobre as relações matemáticas”). Logo este processo é diferente de conjecturas e generalizações, por ser um padrão aplicável a algo dentro de um conjunto menor, não podendo se estender para um conjunto mais amplo. “A comparação pode ocorrer junto com uma infinidade de outros processos de raciocínio matemático: generalização, identificando um padrão e validando” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10). E dentro do modelo de Jeannotte e Kieran (2017), a classificação é um importante processo que viabiliza o desenvolvimento no nível dos objetos, colocando-os juntos ou separando-os, e ademais, pode ser associada a comparação, conjectura e generalização (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 11). O Quadro 1 exemplifica os conceitos definidos no modelo de Jeannotte e Kieran (2017), quanto aos processos de raciocínio matemático na busca por semelhanças e diferenças.

Quadro 1: Processos relacionados à busca por semelhanças e diferenças

Processos	**Conceitos**
Generalizar	Processo, que, pela busca por semelhanças e diferenças, infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos do conjunto de um subconjunto deste conjunto.
Conjecturar	Processo que, pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico provável ou muito provável, e que tem o potencial para a teorização matemática.
Identificar um padrão	Processo que, pela busca por semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas.
Comparar	Processo que infere, pela busca de semelhanças e diferenças, uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas.
Classificar	Processo que infere, pela busca de semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos com base na matemática, propriedades físicas e definições.

Fonte: Elaborado pelas autoras, baseado nas definições de Jeannotte e Kieran (2017)

No que diz respeito aos processos relacionados à validação, Jeannotte e Kieran (2017, p. 11) afirmam que “validar visa alterar o valor epistêmico (ou seja, a probabilidade ou a verdade) de uma narrativa matemática”. Segundo elas, os processos de validação tencionam mudar o valor epistêmico de uma narrativa de uma forma ou de outra, e essa mudança pode ser de provável para verdadeiro, de provável para falso, ou mesmo de provável para mais provável. Para justificar, cabe obter garantias e apoio por meio dos dados coletados, o “que permite modificar o valor epistêmico de uma narrativa” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 11). Conforme Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 35), “uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas e reconhecer se uma justificativa matemática é válida é um componente crítico do processo de raciocínio”.

Mata-Pereira (2018, p. 13) acrescenta que “ainda que se pretenda que os alunos apresentem justificações baseadas em pressupostos matemáticos, nem todas as justificações apresentadas em sala de aula têm na natureza puramente matemática”. A autora aponta que a

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

"justificação" é um conceito muito abrangente que passa por níveis complexos e de formalização de conceitos vastos e, por conta disso, é de extrema relevância oportunizar aos alunos a justificação em todos os níveis.

Para validar, além de justificar, ainda é preciso levar em conta os processos de provar e provar formalmente. De acordo com Araman e Serrazina (2020, p. 122), "provar e provar formalmente (cujo rigor e grau de formalismo é maior do que em provar) também são processos sociais usados pelos indivíduos ou pela comunidade para responder as questões da veracidade de uma afirmação". O Quadro 2 apresenta as definições sobre justificar, provar e provar formalmente, de acordo com Jeannotte e Kieran (2017).

Quadro 2: Processos relacionados à validação

Processos	**Definições**
Provar	Um processo de raciocínio matemático que, ao pesquisar dados, garantia e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável a verdadeira. Este processo é restringido por: i) Narrativas que são aceitas pela comunidade de classe (conjunto de narrativas aceitas que são verdadeiras (do ponto de vista do matemático especialista) e disponíveis sem justificativa adicional. ii) Uma reestruturação final de natureza dedutiva. iii) As realizações que são adequadas e conhecidas, ou acessível, para a classe.
Prova formal	Um processo de raciocínio matemático que, ao procurar dados, garantia e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável a verdadeira. Este processo é restringido por: i) Narrativas que são aceitas pela comunidade de classe (conjunto de narrativas aceitas que são verdadeiras do ponto de vista do matemático especialista) e sistematizadas em uma teoria matemática. ii) Uma reestruturação dedutiva final. iii) Realizações que são formalizadas e aceitas pela classe de matemática e comunidade.
Justificar	Um processo de raciocínio matemático que, ao pesquisar dados, garantia e apoio, permite modificar o valor epistêmico de uma narrativa.

Fonte: Elaborado pelas autoras, baseadas nas definições de Jeannotte e Kieran (2017)

A exemplificação foi definida por Jeannotte e Kieran (2017) como sendo um processo de raciocínio matemático que suporta outros processos, inferindo exemplos que auxiliam na busca por semelhanças, diferenças e validação. Ao exemplificar, é possível entender o processo de raciocínio matemático vinculado aos dados de um problema. "Esses dados podem estar reciclados na busca por semelhanças ou diferenças em padrões e relações, mas também nos processos de validação, gerando elementos que servirão para generalizar, conjecturar e até mesmo validar" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p.13).

As autoras salientam a importância de trabalhar os processos de raciocínio matemático de forma articulada. Mesmo que tenham sido tratados de forma separada, os processos de raciocínio matemático estão implícitos no desenvolvimento das atividades matemáticas e, juntos, desempenham uma estrutura produtiva no desenvolvimento das tarefas matemáticas.

Segundo Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 10), o raciocínio matemático é essencial para os alunos desde o início da escolarização. E ainda, constantemente "o processo de raciocínio começa com o desenvolvimento de uma conjectura ou generalização".

Lannin, Ellis e Elliot (2011) dividem os três aspectos de raciocínio matemático (conjecturar e generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar) em nove entendimentos essenciais, explicitados no Quadro 3. Os autores reconhecem que os entendimentos se inter-relacionam.

Quadro 3: Aspectos do raciocínio matemático e seus entendimentos essenciais

Aspectos do raciocínio matemático	Entendimentos essenciais
Conjeturando e generalizando	1.º) Conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras.
	2.º) Generalizar envolve identificar semelhanças entre os casos ou estender o raciocínio além do intervalo em que se originou.
	3.º) Generalizar envolve identificar a aplicação da generalização, reconhecendo o domínio relevante.
	4.º) Conjecturar e generalizar envolvem o uso e o esclarecimento do significado de termos, símbolos e representações.
Investigando o porquê	5.º) O raciocínio matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa.
Justificando e refutando	6.º) Uma justificação matemática é um argumento lógico, baseado em ideias já compreendidas.
	7.º) Uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa.
	8.º) Justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos.
	9.º) Uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos.

Fonte: Elaborado pelas autoras, baseadas nas definições de Lannin, Ellis e Elliot (2011)

Conjecturar e generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar, ajuda os alunos a compreenderem a essência da matemática e os prepara para a sua futura educação matemática, sendo necessário serem desenvolvidos desde os primeiros anos de escolarização (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Tais entendimentos são relevantes no sentido de que podem apoiar professores de matemática na seleção de tarefas que os contemple, como é o caso da presente pesquisa.

Metodologia ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

A arte de resolver problemas liga-se intrinsicamente ao desenvolvimento humano, desde as mais remotas épocas, quando precisava dividir terras, ou seja, realizar cálculos para satisfazer as necessidades do cotidiano. Para uma melhor compreender como os fatores históricos influenciaram o "estado no qual se encontra, atualmente a Resolução de Problemas na Educação", optamos por apresentar um breve relato histórico. Assim, apoiamo-nos em Justulin (2014, p. 51), que muito bem explica que

> [...] a resolução de Problemas como teoria, faz parte de uma história recente que reporta ao século XX. Polya passou a ser a mais importante referência em Resolução de Problemas como teoria e em seu livro *A Arte de Resolver problemas* (1944) estabeleceu quatro passos necessários para um bom resolvedor de problemas [...]. As décadas de 60 e 70 do século XX foram fortemente influenciadas pela Matemática Moderna. Esse movimento valorizava uma Matemática apoiada na teoria dos conjuntos, destacando as propriedades e as abstrações matemáticas, por meio de uma linguagem precisa e concisa. O ensino da Matemática se distanciava das questões práticas.

Nesse período, a Matemática ainda estava muito presa ao exagero da "formalização de conceitos abstratos". No entanto, em 1980, houve nos Estados Unidos um movimento direcionado para novas propostas, cujas ideias influenciaram todo o mundo. Assim, o National Council of Teachers of Mathematics, – NCTM –, traduzido do inglês por Conselho Nacional de Professores de Matemática, uma organização profissional para professores de matemática nos Estados Unidos, "apresentou recomendações para o ensino da matemática no documento Agenda para a Ação. Nele a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática nos anos 80" (BRASIL, 1998, p. 20). Dentre as discussões que estavam acontecendo havia um consenso de que as reformas deveriam acontecer, mas não se sabia ainda como trabalhar a Resolução de Problemas.

Schroeder e Lester (1989 *apud* Allevato e Onuchic 2021, p. 41) apontam três diferentes formas de realizar um trabalho em sala de aula de Matemática, fundamentadas na resolução de problemas.

> (1) O ensino sobre Resolução de problemas, (2) o ensino para a resolução de problemas e (3) o ensino através da resolução de problemas. Vários trabalhos (Allevato, 2005; 2011) dedicaram-se a explicar detalhadamente as características fundamentais e as implicações pedagógicas de cada uma dessas concepções.

As autoras acrescentam que, no final da década de 1980, a perspectiva de ensino através da resolução de problemas era "bastante incipiente, mas se consolidou a partir de vários trabalhos desenvolvidos pelo NCTM, os quais culminaram com a publicação dos *Standards* 2000 (NCTM, 2000)" (ALLEVATTO; ONUCHIC, 2021, p.43). Acompanhando esse movimento, o Brasil atualizou suas orientações curriculares, "recomendando que a resolução de problemas seja o ponto de partida para as atividades matemáticas em sala de aula, indo ao encontro do que constitui o fundamento do Ensino da Matemática através da resolução de problemas" (ALLEVATTO; ONUCHIC, 2021, p.43). Conforme nos informa Onuchic (1999, p. 203):

> A importância dada à Resolução de Problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização de Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas com um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje a tendência caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos.

Embasados em Onuchic (1999, p. 215), adotamos nesta pesquisa a definição de problema como sendo "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas está interessado em resolver, que o problema passa a ser o ponto de partida".

Allevato e Onuchic (2021, p. 40, grifo do autor) pontuam que a resolução de problemas é "considerada o 'coração' da atividade matemática, a resolução de problemas tem sido a força propulsora para construção de novos conhecimentos e, reciprocamente, novos conhecimentos proporcionam a proposição e resolução de intrigantes e importantes problemas".

Diante disso, Allevato e Onuchic (2021, p.52 e 53) oferecem sugestões para utilizar tal Metodologia em sala de aula, "indicando que as atividades sejam organizadas em dez etapas", expostas a seguir:

Proposição do problema: o professor elabora um problema inicial, chamado de problema gerador, com o objetivo de construir um novo conteúdo, ou seja, o conteúdo mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula.

Leitura individual: o professor entrega uma cópia do problema para o aluno, que, ao lê-lo individualmente, tem a possibilidade de refletir e desenvolver sua própria compreensão.

Leitura em conjunto: os alunos reúnem-se em pequenos grupos, fazem uma nova leitura e iniciam uma discussão do problema. O professor ajuda os grupos, se necessário, na compreensão do problema e na interpretação de termos desconhecidos.

Resolução do problema: os alunos tentam resolver o problema gerador, que lhes conduzirá à construção de conhecimento sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. A ação dos alunos volta-se à expressão escrita, pois, para resolver o problema, precisarão de linguagem matemática ou de outros recursos, como desenhos, tabelas.

Observar e incentivar: o professor, enquanto isso, observa o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizar seus conhecimentos, a trocar ideias.

Registro das resoluções na lousa: os alunos são convidados a fazer o registro de suas resoluções na lousa (certas, erradas, ou feitas por diferentes processos). Diante desse “painel de soluções”, o professor estimula os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, compararem e discutirem as diferentes soluções, isto é, avaliar suas próprias resoluções.

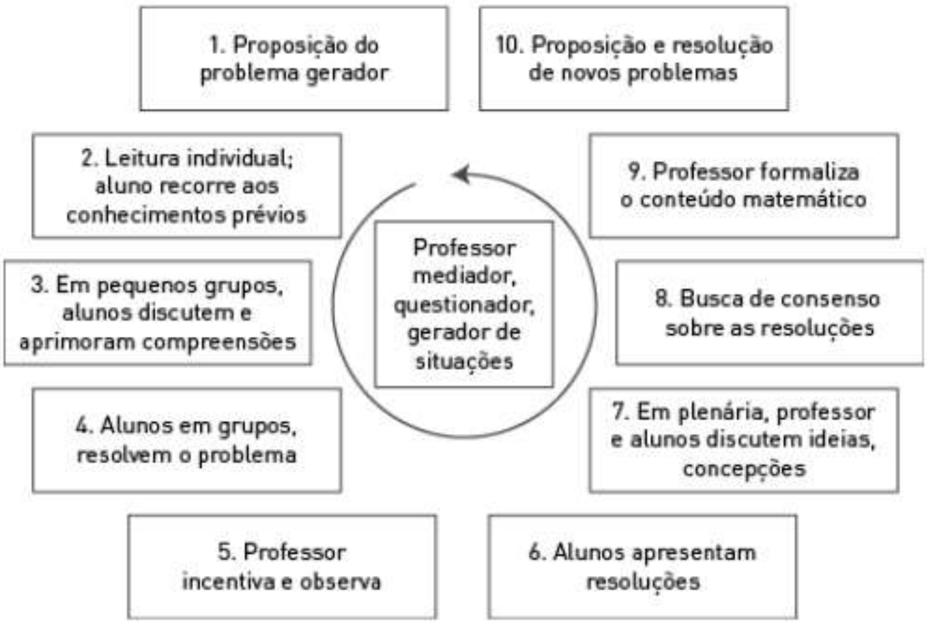
Plenária: o professor e os alunos, em esforço conjunto, tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo.

Busca do consenso: o professor e os alunos, depois da apresentação dos resultados encontrados pelos alunos, procuram chegar a um consenso sobre a resolução correta.

Formalização do conteúdo: o professor registra na lousa uma apresentação “formal”, organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando diferentes técnicas operatórias e construindo demonstrações, se for o caso.

Proposição e resolução de novos problemas: o professor, após a formalização do conceito, sugere novos problemas, que possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula. O esquema a seguir (Figura 1) sintetiza a sugestão das dez etapas para o desenvolvimento da Metodologia.

Figura 1- Síntese das dez etapas para desenvolver a metodologia Resolução de Problemas



Fonte: Allevato e Onuchic (2021)

Justulin (2014, p. 65) pontua que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas ocorre em um “processo espiral, possibilitando que o professor resgate conhecimentos prévios dos alunos, com participação ativa dos mesmos".

Na presente pesquisa, essas etapas foram consideradas, ao serem trabalhados os problemas com os alunos participante da pesquisa. Para este artigo, foi selecionado um problema, pautado no entendimento essencial *7.º – Uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa* –, explicitado no Quadro 3.

Caracterização da pesquisa

Este trabalho está inserido em um projeto amplo – intitulado "Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática" (aprovado pelo comitê de Ética sob o parecer n.º 5 161 835) – desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática-PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Em uma perspectiva interpretativa e qualitativa, este estudo segue o método da Investigação Baseada em *Design* – IBD. Antes, porém, é oportuno entender o objetivo do investigador em uma pesquisa qualitativa, que, de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p.67), "é o de construir conhecimento não o de dar opinião sobre determinado contexto" e "compreender o comportamento e a experiência humana". A compreensão é baseada na construção dos significados. E sob o olhar de Bogdan e Biklen (1994, p. 84), "os investigadores qualitativos partem para um estudo munido dos seus conhecimentos e da experiência, com hipóteses formuladas com o único objetivo de serem modificadas e reformuladas à medida que vão avançando''. Ainda, em investigação qualitativa em educação "o investigador comporta-se mais como viajante que não planeja do que aquele que o faz meticulosamente" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 83).

Por sua vez, consoante indicam Ponte *et al.* (2016), a Investigação Baseada em *Design*-IBD, é um este tipo de investigação muito atrativo para os investigadores, que têm seu principal interesse em encontrar soluções robustas, praticáveis para os problemas educativos. A pesquisa "apresenta um desenvolvimento de maior sofisticação, no sentido relativamente a outras formas de intervenção de base científica na educação. A IBD é muito atrativa para investigadores como uma forte orientação teórica" (PONTE *et al.*, 2016, p. 78).

A Investigação Baseada em *Design* – IBD acontece em ciclos, abrangendo as fases de "preparação, realização e análise retrospectiva". Como ela acontece em ciclos, as investigações vão sendo reforçadas a cada um deles, sendo possível identificar a necessidade de reestruturar cada fase, ou seja, as fases são questionáveis a cada mudança. O Quadro 5 ilustra os aspectos, envolvendo as fases da metodologia de IBD.

Quadro 5: Aspectos, envolvendo as fases da metodologia de IBD

Fases	Aspectos
Preparação	Determinar a sua intenção teórica, bem como as ideias de cunho disciplinar e as capacidades que constituem os objetivos de aprendizagem. Especificar os seus pressupostos, “os pontos de partida intelectuais e sociais para as formas de aprendizagem pretendidas”. Elaborar uma conjectura a ser testada e aperfeiçoada no decurso da investigação. O objetivo não é validar e, sim, elaborar uma conjectura mais forte.
Realização	Encarregar-se em manter uma perspectiva clara dos possíveis percursos de aprendizagem, mantendo os atores do terreno ativos, cultivando uma relação positiva com eles. Não perder de vista os objetivos, sendo necessário momentos de reflexão regulares, em que se analisam e planejam atividades futuras.
Análise retrospectiva	Realizar uma análise retrospectiva no fim de cada ciclo. Colocar e experiência em um contexto mais amplo especificado logo desde o início.

Fonte: As autoras, baseadas em Ponte *et al.* (2016)

Tendo em vista o objetivo deste estudo –investigar processos de raciocínio matemático, desenvolvidos por um trio de alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada da cidade de Maringá, no estado do Paraná, ao resolverem problemas, apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – esclarecemos que as três fases da IBD já se realizaram. Isto é, houve, inicialmente, o momento da *preparação*, quando determinamos o enquadramento teórico e metodológico da pesquisa e, apoiados nessas bases conceituais, elaboramos os problemas a serem trabalhados (no caso deste artigo, apresentaremos apenas um deles). Em seguida, executamos a fase da *realização*, quando os problemas foram trabalhados com os alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental, seguindo as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021). Já na *análise retrospectiva*, a partir da análise dos dados, os resultados foram discutidos e refletidos à luz do referencial teórico utilizado, com a finalidade de implementar melhorias que podem subsidiar um novo ciclo.

A coleta de dados aconteceu no 2.º semestre de 2022 em duas turmas do 7.º ano do Ensino Fundamental de uma escola privada em Maringá O conteúdo matemático envolvido no problema consta dos objetos de conhecimento do Ensino Fundamental, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2018), e estão apoiados no entendimento essencial 7.º (*uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa*), explicitado no Quadro 3. Essa opção se deu por este tipo de problema (Figura 2) ser pouco usual em salas de aula da Educação Básica.

Figura 2: Problema 2

Fonte: Adaptado de Mathias e Gontijo (2021)

Em um primeiro momento, foi entregue um material impresso com o problema (Figura 2) proposto para que os alunos fizessem a leitura individualmente. Após perceber que já haviam feito a leitura e alguns iniciavam a resolução, foi sugerido que formassem trios para realizarem uma leitura coletiva e começarem a resolução do problema. Nesse momento, tiveram início as gravações de áudios. A primeira autora, a professora da turma, nessa ocasião, observou e dirimiu algumas possíveis dúvidas dos alunos. Contudo, é muito importante deixar os alunos caminharem sozinhos, oportunizando a construção de conhecimentos matemáticos Afinal, como muito bem pontua Van de Valle (2009, p.65): “deixar caminhar também significa permitir que eles cometam erros”.

Após a etapa de resolução dos grupos, iniciamos as apresentações dos resultados e o momento da plenária. Os alunos foram convidados a expor suas resoluções na lousa, independentemente de estar correta ou não, indicando as resoluções e as justificativas encontradas pelo grupo. Após a plenária, chegamos a um consenso sobre o problema proposto, ocorrendo, em seguida, a formalização do conceito e sanando as dúvidas que foram surgindo no decorrer da plenária.

Depois da aplicação dos problemas e de posse dos áudios, o material foi organizado. O primeiro movimento foi ouvir os áudios e separar os audíveis. Em seguida, realizar as transcrições para deixar imergir, em todas as discussões realizadas pelos alunos, as estratégias de resoluções e os processos de raciocínio matemático. A transcrição foi realizada na íntegra, mantendo o anonimato dos alunos. No caso deste artigo, o trio selecionado é composto pelos alunos A1, A2 e A3, e as falas foram organizadas em trechos e identificadas entre colchetes por exemplo, [1.2] que é o [trecho 1, fala número 2].

A escolha do trio apresentado nesse estudo se deve à qualidade do áudio e à quantidade de interação entre os alunos enquanto desenvolviam estratégias de resoluções dos problemas.

Os dados foram analisados de acordo com a categorização proposta por Jeannotte e Kieran (2017), organizados nos Quadros 1 e 2.

Resultados

Os resultados estão organizados conforme a transcrição dos diálogos dos alunos (Trecho1, Trecho 2, Trecho 3, Trecho 4, Trecho 5 e conclusão). Nos trechos (1, 2 e 3) a seguir, o trio começou a interagir, de acordo com as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021). Os alunos atuaram ativamente, pois fizeram a leitura em conjunto e elaboraram as estratégias de resolução. Eles iniciaram pelo conjunto dos números naturais, inteiros e racionais. O professor não fez intervenções diretas nas resoluções, atuou tão simplesmente como observador e incentivador, pois, retomando Allevato e Onuchic (2021), esse é o momento em que os alunos vão tentar resolver o problema.

Após as resoluções apresentadas nos trechos (1, 2 e 3), houve um momento de interação, em que o trio começou a organizar as resoluções (trecho 4). Para concretizar as etapas sugeridas, os alunos apresentaram as resoluções na lousa. Esse é o momento da plenária, quando professor e alunos buscam o consenso e a formalização do conteúdo.

Trecho1 - analisando os números naturais

[1.1]: Aluno A1:Fez a leitura do problema para os alunos A2 e A3. "Multiplique dois números quaisquer e você terá um produto maior que os dois números com os quais você começou. A afirmação da professora está correta? Em todos os conjuntos dos números (naturais, inteiros e racionais)? Por quê?"

[1.2]: Aluno A2: *A gente tá falando que pode ser em qualquer número, mas tem que ser do conjunto dos números naturais primeiro então a gente tem que fazer*.

[1.3] Aluno A1: *Os números naturais, assim 1,2,3,4, acima do zero infinitamente*

[1.4] Aluno A2: *Além do zero também.*

[1.3] Aluno A1: *É, mas o zero não é nada.*

[1.4] Aluno A2: *Quanto é 1x1=1.*

[1.5] Aluno A1: *É 1.*

[1.6] Aluno A2: *E 1 é maior ou menor que os um?*

[1.7] Aluno A1: *Ué é igual*.

[1.8] Aluno A2: *Então dá pra ver que a sentença está errada pelos números naturais.*

[1.9] Aluno A1: *Sim. Nos números naturais. E os inteiros?*

Ao iniciar as discussões sobre o problema, os alunos A1 e A2 começaram por conjecturar, elaborando as estratégias de resolução do problema. Conforme Araman e Serrazina (2020), elaborar uma estratégia de resolução pode ser um processo de conjecturar. Eles poderiam iniciar por qualquer conjunto, mas o fizeram pelo conjunto dos números naturais, como se vê na transcrição das falas dos alunos A1 e A2 em [1,2] e [1.3], em que o aluno A1 sugeriu os números,1,2,3, 4... infinitamente, e o aluno A2 acrescentou o zero também. Neste momento, os alunos recorreram à exemplificação, que, segundo Jeannotte e Kieran (2017), é um processo de raciocínio matemático que dá suporte aos demais processos. Utilizando a operação matemática da multiplicação, o aluno A2 perguntou para o aluno A1: "*quanto é 1x1?"* O aluno A1 em [1.5] respondeu: "*é1"*. O aluno A2 em [1.6] continuou questionando o aluno A1 e em [1.6] perguntou: "*é maior ou igual a 1?"*

As perguntas indicam que o aluno A2 quis justificar sua resolução, multiplicando os dois fatores iguais, recorrendo à exemplificação em [1.4]. O aluno A1 elaborou uma conjectura, ao responder em [1.7] que o resultado da multiplicação seria igual a 1. E em [1.8], o aluno A2 validou a conjectura elaborada, por meio da resposta do aluno A1, e argumentou que dava para ver que a sentença estava errada no conjunto dos números naturais, fazendo uma comparação entre dois fatores iguais em [1.4] e justificando que a afirmação da professora estaria errada no conjunto dos números naturais. A1 validou a justificativa do aluno A2, mas, em seguida, desafiou o aluno A2 em relação ao conjunto dos números inteiros. Segundo Lannin, Ellis e Elliot (2011), justificativa em matemática é um argumento lógico, baseado em ideias já compreendidas. A transcrição é apresentada na sequência.

Trecho 2 - analisando os números inteiros

Neste trecho, os alunos A1e A2 dão continuidade aos questionamentos sobre o problema, envolvendo o conjunto dos números inteiros, enquanto o aluno A3 continua observando a discussão e faz anotações no papel de resolução.

[2.1] Aluno 2: *E agora os inteiros? Quanto que é um negativo vezes um?*

[2.2] Aluno 1: *Vezes um positivo? Deixa, eu fazer aqui*. (indicando que vai fazer na folha, figura 4).

[2.3] Aluno 1: *A regra diz que um positivo e um negativo dão negativo, então dá menos 1, porque 1x (-1) dá ele mesmo.*

[2.4] Aluno 2: *E então -1 é maior ou menor que +1?*

[2.5] Aluno 1: *Depende!*

[2.6] Aluno 2: *Não! -1 e maior ou menor que +1? A gente estudou que todo número positivo é maior que o número negativo, então?*

[2.7] Aluno 2: *Então esse aqui está errado.*

[2.8] Aluno 2: *Então esse aqui está errado, mas? Se a gente fizer (-1) x (-1) =1*

[2.9] Aluno 1: *Da positivo, você falou! Você travou também?*

[2.10] Aluno 2: *Não entendi muito bem, é muito ruim fazer cálculo tipo mentalmente e estranho explicar o cálculo mentalmente para outra pessoa.*

[2.11] Aluno 1: *Você quer que eu leia o teu pensamento?* (risos)

[2.12] Aluno2: *Então dá prá ver que a sentença está errada pelos números inteiros.*

[2.13] Aluno 1: *Sim*

[2.14] Aluno 2: *Mas (+1) é maior ou menor que (-1) então esse inteiro é verdadeiro e falso ao mesmo tempo, ou seja, é falso.*

[2.15] Aluno 1: *Calma! É falso ou verdadeiro?*

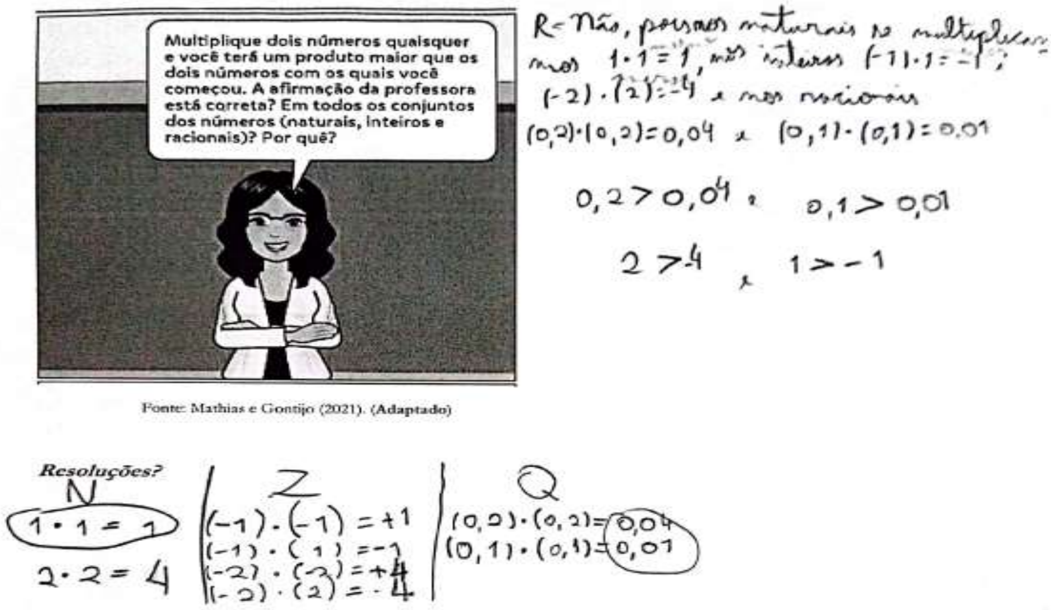
[2.16] Aluno 2: *É falso.*

Neste trecho, os alunos A1 e A2 iniciaram a resolução do problema, valendo-se de exemplos numéricos e, logo no início do diálogo, o aluno A2 desafiou o aluno A1 e perguntou em [2.1]: "*quanto é um vezes menos um?"* E em [2.3] o aluno A1, respondeu que "*é menos um",* de acordo com a regra (um número positivo e um número negativo dá negativo). Evidenciamos que o aluno A1 estava referindo-se à regra da multiplicação entre dois números inteiros com sinais diferentes em que o produto é um número negativo. O aluno A1 elaborou uma justificativa por meio de conhecimentos prévios sobre multiplicação entre dois números inteiros com sinais diferentes. Como nos recorda Van de Valle (2009), o ensino se constrói com as ideias que as crianças possuem, ou seja, com seus conhecimentos prévios.

Para validar o raciocínio do aluno A1 no trecho [2.3], o aluno A2 perguntou ao aluno A1, no trecho [2.4]: "*qual é o maior número, um ou menos 1?"* O aluno A1 disse que dependia. Mas o aluno A2 não aceitou a resposta e utilizou os conhecimentos prévios sobre comparação entre dois números inteiros para justificar que o número positivo é maior que um número negativo [2.6].

Para validar a sua conjectura sobre o problema, no trecho [2.8] o aluno A2 recorreu a mais um exemplo de multiplicação entre dois fatores, sendo um número positivo e outro negativo, indicando que pretendia validar sua resposta, comparando o produto do exemplo no trecho [2.1] com o trecho [2.8]. É possível observar que o aluno A2 organizou vários exemplos, não citados no momento do diálogo, mas que poderiam ser comprovados na Figura 3 e no trecho [2.14], indicando que o aluno se apoiou nas exemplificações para justificar que a professora estava errada em sua afirmação no problema, conforme preconizam Jeannote e Kieran 2017).

Figura 3: Resolução do problema apresentado pelo aluno A2



Fonte: Dados da pesquisa

Trecho 3 - analisando os números racionais

[3.1] Aluno 2: *Agora vamos fazer os racionais. Quanto é (0,1) x (0,1)? Dá quanto?*

[3.2] Aluno 1: *Se você pensar 1x1 dá 1 só que porém., calma tá errado*.

[3.3] Aluno 2: *Faz essa conta aí* ([mostrando o papel, ver figura 4).

[3.4] Aluno 1: *Calma, um décimo tipo mais um décimo*.

[3.5] Aluno 2: *Vezes e não mais.*

[3.6] Aluno 1: *Isso vezes (0,1) x (0,1) = aqui vai da 100 não me pergunte como* (mostrando a resolução no papel na figura 4).

[3.7] Aluno 2: *Então um centésimo?*

[3.8] Aluno 1: *É maior.*

[3.9] Aluno 2: *É maior?? Um centésimo é maior que um décimo?*

[3.10] Aluno 1: *Não, Olha a pressão* [risos].

[3.11] Aluno 2:*Oxi* (risos) *1/100 é menor*.

As transcrições anteriores indicam que o aluno A2 atuou ativamente conduzindo os diálogos, e neste trecho ele iniciou novamente, elaborando uma conjectura. ao pensar na multiplicação entre dois números decimais – como mostra o trecho [3.1] – e conduziu o diálogo, perguntando ao aluno A1, no trecho [3.1], "*dá quanto?*" Ou seja, ele desafiou o aluno A1 a resolver o exemplo proposto por ele no trecho [3.1]. Ele poderia utilizar os exemplos anteriores, mas recorreu a um exemplo com números decimais, indicando dominar o conceito de números racionais, ou seja, números que podem ser representados na forma fracionária. Nesse momento, percebemos que A2 procurou avançar no seu entendimento matemático "baseado em uma mudança de representação", conforme apontam Ponte *et al*. (2020, p.8).

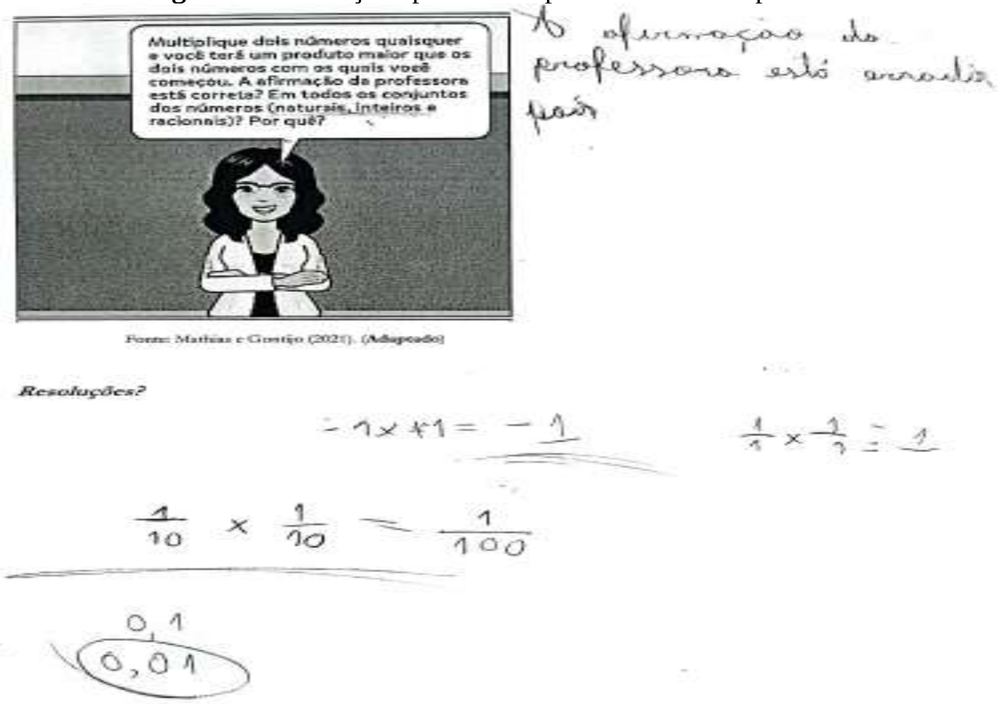
Após realizar a pergunta para o aluno A1, o aluno A2 observou as respostas do aluno A1 e fez algumas intervenções, como no trecho [3.5], dizendo que deveria ser "*vezes*", demonstrando que deveria ser feita a operação matemática da multiplicação e não adição. O aluno A1 fez a multiplicação entre (0,1). (0,1) no trecho [3.6] e confundiu-se ao dar a resposta. Mas na Figura 4, é possível entender que o aluno A1 estava se referindo ao denominador da fração, ou seja, ao centésimo, resultado da multiplicação entre (0,1) x (0,1) = 1/100 que ficou evidenciado, quando o aluno A2 perguntou no trecho [3.9] para o aluno A1, *"um centésimo é maior ou menor que um décimo?"* O aluno A1 não respondeu imediatamente, e o aluno A2, no trecho em [3.11], respondeu que um centésimo seria menor que um décimo, validando a conjectura iniciada por ele, quando sugeriu a multiplicação de (0,1) x (0,1) no trecho [3,1], e que pode ser observada na Figura 5, em que o aluno A2, apresentou exemplos para justificar que a afirmação da professora no problema estava errada. Vemos o processo de validação da conjectura por meio da justificação, como sugerem Jeannotte e Kieran (2017).

Trecho 4 - momento interação

> [4.1] Aluno 3: *Coloquei que é verdadeiro, mas ao mesmo tempo não é verdadeiro, pois funciona com alguns números*.
> [4.2] Aluno 2: *É falso!*
> [4.3] Aluno 3: *Não necessariamente*.
> [4.4] Aluno 2: *É falso, é falso porque aqui está falando todos os números, exatamente todos, todos, ou seja, é verdadeiro ou falso.*
> [4.5] Aluno 1: *Em todos os conjuntos Naturais, Inteiros e Racionais, todos! Ou seja, é verdadeiro ou falso, não pode ser os dois.*
> [4.6] Aluno 3: *É* (risos)
> [4.7] Aluna 1: *É falso, não existe meio termo. É sim ou não*.
> [4.8] Aluno 2: *Aí 1/100 é menor que 1/10 então é muito falsa.*
> [4.9] Aluno1*: Oh ,1/100 vai dar isso aqui* [mostrando no papel, figura4].

Neste trecho, o aluno A3, que não participara dos diálogos anteriores, elaborou uma conjectura em [4.1], ao afirmar ser verdadeiro e, ao mesmo tempo, não ser verdadeiro, pois funcionou com alguns números, mas não conseguiu validar sua conjectura diante dos argumentos apresentados pelos alunos A2 e A1 nos trechos [4.4] e [4.5], os alunos A1 e A2 refutaram a análise do aluno A3, argumentando não ser possível validar a sua resposta, pois o problema proposto referia-se a todos os conjuntos, logo a afirmação seria falsa. O aluno A3 tentou justificar que poderia acontecer com alguns números, mas os alunos A1 e A2 não aceitaram, conforme os trechos [4.7] e [4.8], invalidando a conjectura do aluno A3, por meio dos exemplos numéricos apresentados por eles. O aluno A3 não compreendeu que “em matemática, entretanto, é importante reconhecer que um único contraexemplo pode invalidar a conjectura”. (LANNIN; ELLIS; ELLIOT,2011, p.43).

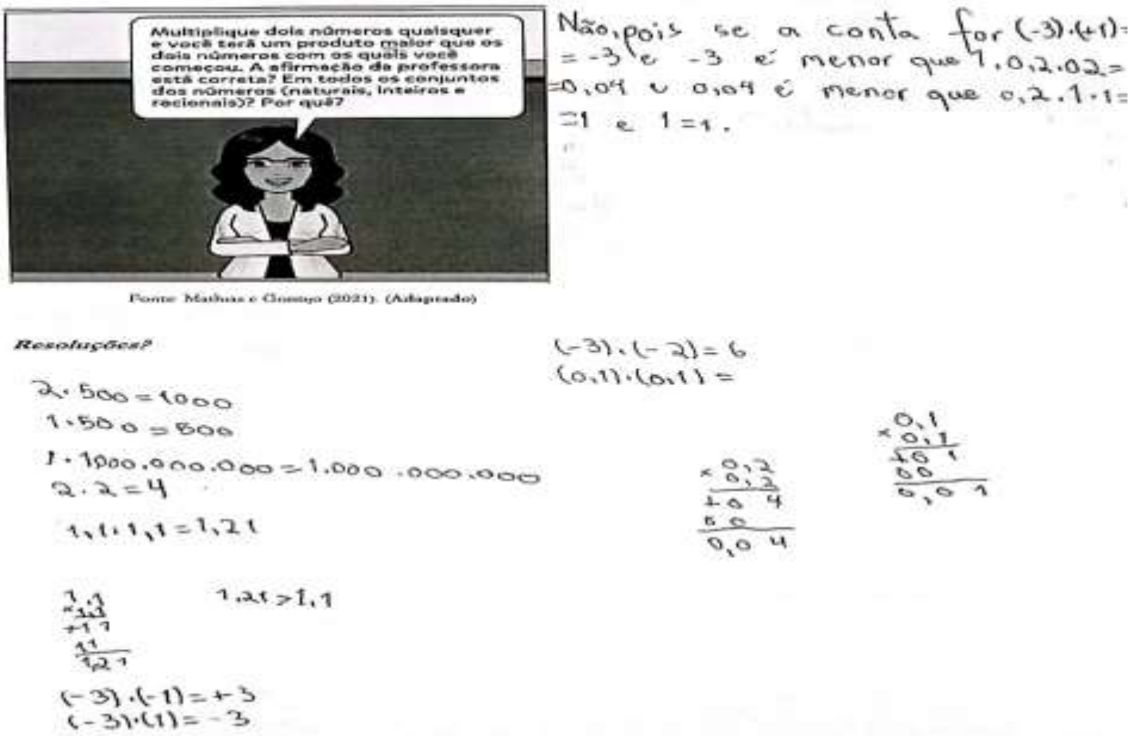
Figura 4: Resolução apresentada pelo aluno A1 no problema



Fonte: dados da pesquisa

revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

Figura 5: Resolução apresentada pelo aluno A3 no problema 2

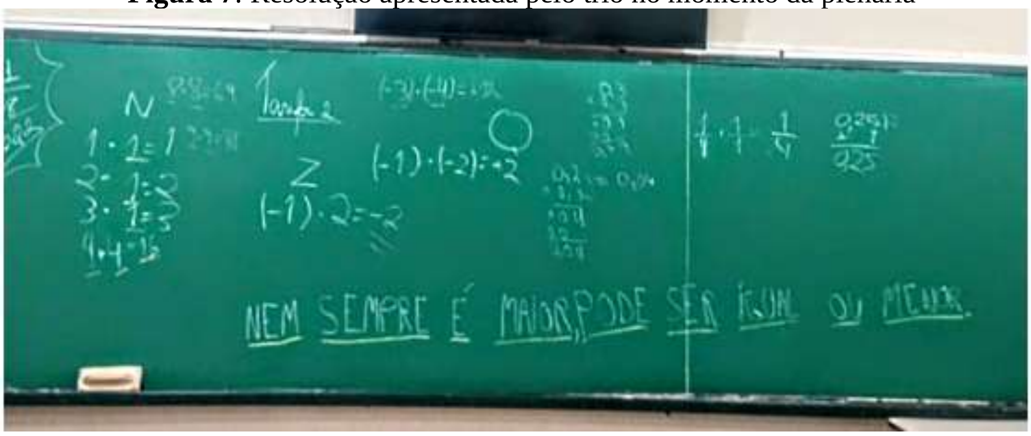


Fonte: Dados da pesquisa

Trecho 5 - momento da plenária

Os alunos foram ao quadro e apresentaram suas respostas para sala, justificando-as por meio de exemplos e colocando ser a afirmação falsa em todos os campos dos números naturais, inteiros e racionais, pois no problema a professora afirmava que o produto seria sempre maior, mas poderia ser menor ou igual, logo a afirmação estaria incorreta. Os alunos mostraram alguns exemplos na lousa para seus pares e concluíram que "*nem sempre é maior, pode ser igual ou menor*" "*logo a afirmação é falsa*". Conforme Figura 7.

Figura 7: Resolução apresentada pelo trio no momento da plenária



Fonte: dados da pesquisa

Conclusão

Diante do objetivo proposto para este estudo, de investigar processos de raciocínio matemático, desenvolvidos por um trio de alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da cidade de Maringá, no estado do Paraná, ao resolveram problemas, apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, destacamos alguns resultados relevantes para as pesquisas em Educação Matemática, direcionadas ao ensino de Matemática no Ensino Fundamental.

Ao trabalhar com contraexemplos, de acordo com o entendimento essencial 7.º, proposto por Lannin, Ellis e Elliot (2011), foi possível identificar indícios de processos de raciocínio matemático como sugere o modelo de Jeannotte e Kieran (2017). Os alunos elaboraram conjecturas, ao estabelecerem estratégias de resolução como aparece no trecho [1.2] e [1.3] em que o aluno A1 sugeriu os números1,2,3.... e o aluno A2 acrescentou o zero. Nesse momento, recorreram a exemplificação, utilizando a operação matemática da multiplicação entre dois fatores iguais.

O aluno A1 elaborou uma conjectura, ao responder em [1.7] que o resultado da multiplicação seria igual a 1. E em [1.8], o aluno A2 validou a conjectura elaborada por meio da resposta do aluno A1 e argumentou dar para ver que a sentença estaria errada no conjunto dos números naturais por meio da comparação entre dois fatores iguais. Estes trechos denotam que os alunos, mesmo de forma inconsciente, elaboraram conjecturas, buscaram alternativas para justificá-las. Lembramos que, de acordo com Araman e Serrazina (2020), ao criar estratégias de resolução para tarefas que ainda não sabem como resolver, os alunos fazem conjecturas, ao concluir que tal estratégia pode conduzir a uma resposta válida.

Em alguns trechos, os alunos valeram-se de conhecimentos prévios, utilizando a exemplificação como em [4.4] o aluno A2 "*é falso, é falso porque aqui está falando todos os números, exatamente todos, todos, ou seja, é verdadeiro ou falso*" e em [4.5] o aluno A1 "*em todos os conjuntos Naturais, Inteiros e Racionais, todos! Ou seja, é verdadeiro ou falso, não pode ser os dois*", argumentando em [4.7] o aluno A1: "*É falso, não existe meio termo, é sim ou não*", para rejeitar uma conjectura elaborada, como aconteceu em [4.1], quando o aluno A3, tentou validar sua conjectura. Ao afirmar *"que é verdadeiro, mas ao mesmo tempo não é verdadeiro pois funciona com alguns números*", os alunos A2 e A1 refutaram a conjectura elaborada, baseados em um processo de exemplificação.

Como pontuam Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 43), "em matemática, entretanto, é importante reconhecer que um único contraexemplo pode invalidar a conjectura". Em outros momentos, ficaram evidentes processos de comparação como denotam as falas para validar o raciocínio do aluno A1 no trecho [2.3]. O aluno A2 perguntou ao aluno A1, no trecho [2.4] "*qual é o maior número, um ou menos 1?"* E o aluno A1 disse que dependia. Mas o aluno A2 "*não aceita a resposta e utiliza os conhecimentos prévios sobre comparação entre dois números inteiros para justificar que o número positivo é maior que um número negativo [2.6]."*

Observamos que o desenvolvimento do trabalho em grupo potencializou a autonomia dos alunos, ao atuarem como sujeitos ativo no uso de estratégias para desenvolver o espírito investigativo, quando precisaram recorrer aos conhecimentos prévios para justificar e validar suas conjecturas, elaborando, mesmo de forma inconsciente, um entendimento essencial que faz parte dos processos de raciocínio matemático, apontado por Lannin, Ellis e Elliot (2011), que é o "Justificando e Refutando", um componente importante, considerado por Lannin, Ellis e Elliot (2011, p.35) "como partes desafiadoras da matemática, porque muitas vezes recebemos regras na escola sem que nos sejam oferecidas oportunidades de raciocinar sobre elas".

Um problema matemático, que desafia o aluno, gera novos conhecimentos, possibilitando desenvolver processos de raciocínio matemático, como justificação. Quando um aluno refuta uma afirmação particular, significa que ele identificou argumentos que vão justificar por que motivo algumas declarações são falsas. Logo uma refutação matemática envolve demonstração e justificativas que venham validar uma declaração, por isso ''uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.41).

A escolha de problemas, que não tenham "nenhum método já estabelecido", propicia ao aluno o interesse em dar sentido à resolução. E esta forma de envolver e dar sentido aos problemas vem ao encontro da ideia de que a "resolução de problemas não é uma aplicação da aprendizagem e sim uma orientação para a aprendizagem" (BRASIL, 1998, p.41).

Ressaltamos o potencial da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, que foi o encaminhamento metodológico para se trabalhar com o problema proposto, ao apoiar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, pois o professor, ao recorrer as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021), concedeu aos alunos autonomia para encontrarem estratégias para solucionar uma situação não usual, tal qual o problema sugerido. Além disso, nos momentos de resolução, os alunos trocaram ideias, discutiram aspectos relevantes da matemática, tiveram oportunidade de argumentar matematicamente, formular e validar (ou refutar) conjecturas, processos normalmente pouco comuns nas abordagens tradicionais de ensino. Enfim, mobilizaram conhecimentos matemáticos.

Os momentos de resolução, interação, plenária e formalização, desencadearam a compreensão da necessidade de justificar o conhecimento matemático, a partir da tentativa de validação da afirmação da professora no problema proposto. De forma particular, os alunos perceberam a importância de um contraexemplo no processo de validação, apoiados por vários processos de raciocínio matemático. Em sendo assim, além dos conteúdos matemáticos que puderam revisitar ao resolverem o problema proposto, a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas proporcionou a capacidade dos alunos refletirem acerca do próprio conhecimento matemático.

Referências

ALLEVATO, N.S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? *In*: ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (org.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p.40-62.

ANJOS, L. Q.; JULIO, N. M. D.; JUSTULIN, A. M.; ARAMAN, E. M.O. Resolução de problemas: uma abordagem sobre o ensino da potenciação e expressões algébricas nos anos finais do ensino fundamental. **ACTIO: Docência em Ciências**, v. 7, n.1, p. 1-21, 2022.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M.L. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3.º ano de escolaridade. **Revista Paranaense de Educação Matemática,** v. 9, n.18, p.118-136, 2020.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora,1994.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (5.º a 8.ª séries): Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. MEC, 2018.

BRODIE, K. **Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms**. Nova Iorque: Springer, 2010.

CARNEIRO, L. F.; ARAMAN, E.M.O.; SERRAZINA, M. L. Processos do raciocínio matemático mobilizados por estudantes de 6.º ano do Ensino Fundamental ao resolverem uma tarefa de Geometria. **JIEEM**, v.13, n.1, p.35-45, 2020.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educ Stud Math**, v.96, n.2, p. 1-16, 2017.

JUSTULIN, A. M. **A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas.** 2014. 254 p. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2014. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/127631. Acesso em: 26 out. 2022.

LANNIN, J.; ELLIS, A.B.; ELLIOTT, R. **Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in Prekindergarten-Grade 8.** Reston: NCTM,2011.

MATA-PEREIRA, J. **As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula**.2018. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2018.

MATHIAS, C.; GONTIJO, C. **Educação Matemática e Criatividade**. (Matemática Humanista). Disponível em: https://youtu.be/94qLQQik5MA,13 de maio de 2021. Acesso em: 13 maio 2021.

OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. **Educação Matemática,** Portugal**,** n.100, p.3-9, nov./dez. 2008.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções &Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-2018.

PONTE, J.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático em sala de aula? **Educação e Matemática**, v.2, n.156, p. 7-11, 2020.

PONTE, J. P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante,** v. XXV, n.2, p.77-98, 2016.

STYLIANIDES, G. Na analytic framework of reasoning-and-proof. **For the Learning of Mathematics**, v.28, n.1, p. 9-16, 2008.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonhese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584 p.

Recebido em: 19 de dezembro de 2022
Aprovado em: 09 de fevereiro de 2023