revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÉLEMENTS D'INGENIERIE DE LOGICIELS EDUCATIFS, LE CAS DES MICROMONDES POUR LES MATHEMATIQUES : DIMENSIONS EPISTEMOLOGIQUE, COGNITIVE ET DIDACTIQUE

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.25.80-105

Franck Bellemain[1]

Résumé: Dans ce texte, nous proposons d’aborder la conception de micromondes informatiques pour l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques. Les principes théoriques et méthodologiques mis en œuvre pour cette conception sont puisés d’une part dans l’ingénierie didactique et d’autre part dans l’ingénierie de logiciels éducatifs. Parce que, pour la conception des micromondes, la représentation des connaissances mathématiques dans l’environnement computationnel est centrale, nous abordons la notion de transposition didactique informatique. Celle-ci est considérée pour ce qu’elle identifie, mais aussi comme outil au travers de sa mise en œuvre dans ses dimensions épistémologique, cognitive, didactique et informatique. Cette mise en œuvre nous permet de proposer les premiers éléments de description de fonctionnalités pour la conception et le développement de micromondes pour les mathématiques. Même s’il ne s’agit pas encore d’éléments permettant à un informaticien d’engager un développement effectif, il s’en approche.
Mots-clefs: Micromonde. Ingénierie de logiciels éducatifs. Ingénierie didactique informatique. Transposition didactique informatique.

ELEMENTOS DE ENGENHARIA DE SOFTWARE EDUCATIVOS, O CASO DOS MICROMUNDO PARA MATEMATICA: DIMENSÕES EPISTEMOLÓGICA, COGNITIVA E DIDÁTICA

Resumo: Neste texto, abordamos a concepção de micromundos computacionais para o ensino-aprendizagem da matemática. Os princípios teóricos e metodológicos implementados nessa concepção são oriundos, por um lado, da engenharia didática e, por outro, da engenharia de software educacional. Considerando que para a concepção de micromundos, a representação dos conhecimentos matemáticos no ambiente computacional é central, abordamos a noção de transposição didática informática. Este é considerado pelo que ela identifica, mas também como ferramenta através da sua operacionalização nas dimensões epistemológica, cognitiva, didática e informática. Esta operacionalização permite-nos propor os primeiros elementos de descrição de funcionalidades para a concepção e o desenvolvimento de micromundos para a matemática. Mesmo que estes ainda não sejam elementos que permitam a um engenheiro da computação se engajar em um desenvolvimento efetivo, ele está se aproximando deles.
Palavras-chave: Micromundo. Engenharia de software educativos. Engenharia didática informática. Transposição didática informática.

Introduction

Ce travail s’inscrit dans le cadre d’un projet à long terme qui propose :

- D’une part, de concevoir et de développer des outils informatiques permettant l’organisation et la gestion de situations d’enseignement. Il s’agit plus précisément d’outils pour la construction de situations et de scénarios, leur mise en œuvre ou encore l’évaluation des acquisitions des apprenants.

[1] Doutor em didática da matemática, Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, franck.bellemain@ufpe.br

- D'autre part, de construire les principes théoriques et méthodologiques des ingénieries permettant l'élaboration de tels outils. Il s'agit d'articuler des connaissances d'éducation, d'informatique, de contenus disciplinaires et de la didactique de ces contenus dans une perspective transdisciplinaire pour la production de ces principes.

Ces outils sont conçus pour fournir un support aussi bien pour l'enseignement présentiel que pour l'enseignement à distance. Ce qui nous intéresse c'est que les ressources produites soient partagées et que les interactions avec ces ressources[2] et entre les différents partenaires du système didactique soient « médiées » par l'ordinateur. Bien qu'il ne s'agisse pas d'un cadre qui limite forcément les apports de nos réflexions à d'autres domaines, nous concentrons notre regard sur les mathématiques[3]. Il nous semble difficile de concevoir des ressources pour l'enseignement et l'apprentissage sans que les spécificités des contenus visés, et de la didactique de ces contenus, ne soient considérées. Nous choisissons donc les contenus que nous connaissons le mieux et dont la didactique nous est plus familière.

Dans ce contexte, l'un des moteurs importants de nos recherches et de nos développements est lié au rôle central que nous voulons faire jouer dans les situations d'enseignement aux ressources de type micromonde et simulation, et plus généralement aux artefacts qui permettent qu'une partie de l'activité mathématique de l'apprenant ait lieu dans l'environnement informatique. En fait, les interfaces modernes, notamment les interfaces graphiques de manipulation directe, étendent considérablement les possibilités d'action de l'apprenant, y compris la simulation des actions presque physiques sur les représentations virtuelles, et enrichissent les possibilités de rétroactions de l'environnement computationnel à ces actions. Associées aux capacités de calcul de l'ordinateur, ces interfaces permettent la médiatisation, par l'intermédiaire de représentations dynamiques, des objets formels des mathématiques et offrent ainsi un support à l'apprentissage des objets médiatisés :

> […] as the interface enables one to express mathematical ideas using a communication medium as close as possible to the usual mathematical language, and, importantly, as the interface provides feedback that can be read "directly" in terms of mathematical phenomena (BALACHEFF; KAPUT, 1997, p.470).

Dans ce texte, nous proposons donc de dégager quelques éléments relatifs à la

---

[2] La notion de ressource est à comprendre ici au sens que lui donne Adler (2000), considérant les limites et contributions de l'informatique à la systématisation qu'elle propose. Nous adoptons ici l'approche de la notion de ressource et de sa modélisation informatique selon Bellemain et Trouche (2016).

[3] Nous incluons naturellement la géométrie dans les mathématiques en lui donnant une emphase particulière pour être un domaine de connaissance privilégié pour la conception de micromondes.

conception et au développement de micromondes pour les mathématiques, éléments qui s'inscrivent dans notre projet à long terme en ayant la double fonction :

- D'une part d'amener à la réalisation effective d'outils informatiques pour l'organisation et la gestion de situations d'enseignement,
- D'autre part de participer à la construction de principes théoriques et méthodologiques d'une ingénierie de logiciels éducatifs.

Il est important de préciser que les éléments dont on parle ici ne seront pas décrits avec un détail ou un langage que les informaticiens reconnaitront comme suffisant pour s'engager dans la production effective d'un logiciel. Ce texte est plutôt destiné à une communauté d'éducation mathématique et propose quelques principes théoriques et méthodologiques permettant de s'engager dans la conception d'un logiciel éducatif, et plus précisément d'un micromonde. La suite de ce texte, plus orientée vers une communauté d'informaticiens, est en cours d'élaboration pour une publication future.

Avant de présenter l'émergence de ces éléments, nous reviendrons succinctement sur le parcours qui nous a permis d'arriver à eux. Nous commencerons ainsi par l'un des principes sous-jacents à notre double objectif de réalisation effective d'outils et de construction des éléments théoriques et méthodologiques qui justifient cette réalisation : l'ingénierie de logiciels éducatifs : ILE[4] (TCHOUNIKINE, 2011). Comme dans toute ingénierie, dans l'ILE, les avancées théoriques et méthodologiques et les réalisations effectives se questionnent et se nourrissent mutuellement. Nous reviendrons ensuite sur la notion de micromonde, soulignant l'apport qu'elle peut fournir à l'activité mathématique dans l'environnement informatique, et à l'accompagnement et/ou l'évaluation de cette activité. Nous verrons qu'une question-clef pour la conception et le développement de micromonde est la représentation des connaissances. C'est l'une des questions soulevées par la transposition informatique (BALACHEFF, 1994a) pour laquelle il s'agit justement de considérer qu'un « choix de représentations implique une structuration des données qui détermine des contraintes de traitement » (ibid., p.368). Nous verrons comment la spécificité des mathématiques, abordée du point de vue de la théorie des registres de représentation sémiotique (DUVAL, 2007), fournit des éléments de structuration évoquée para Balacheff (ibid.). Les réflexions sur l'apport des trois dimensions (épistémologique, cognitive et didactique) de la transposition didactique-informatique[5] (TDI) à une possibilité de représentations informatiques de connaissances mathématiques pour la construction de micromondes seront abordées dans un autre texte.

[4] ILE ou ESE pour Educational Software Engineering ou Engenharia de Software Educativos.
[5] Dans le texte, nous défendons l'importance de la dimension didactique de la transposition informatique.

Ingénierie de logiciels éducatifs

Comme pour toute technologie, concevoir et développer des environnements informatiques pour l'enseignement et/ou apprentissage (CBPS[6]) des mathématiques exige l'élaboration et la mise en œuvre d'une ingénierie spécifique dans laquelle il s'agit d'exploiter le dialogue entre la recherche (dans le sens de la compréhension et la modélisation de phénomènes d'apprentissage) et le développement (dans le sens de la création de technologies et applications). En fait, que ce soit pour la conception de matériels éducatifs en général ou pour le développement de logiciel, nous défendons l'importance d'un travail d'ingénierie dans les recherches en éducation. Cette ingénierie[7] spécifique est déjà réalisée depuis longtemps par le chercheur en éducation ou l'enseignant lorsqu'ils élaborent une séquence d'expérimentation ou d'enseignement, un manuel scolaire, une formation, ou encore un logiciel. De la complexité et la richesse croissante des ressources matérielles, logicielles, intellectuelles pour l'enseignement et l'apprentissage, et aussi de l'augmentation du niveau d'abstraction des théories sur l'éducation, émerge avantage la nécessité de formaliser les principes de cette ingénierie.

La nécessité de formaliser les principes de l'ILE vient aussi du fait que les équipes qui la mettent en œuvre s'élargissent de plus en plus de domaines de connaissances et de professionnels d'horizons différents. En plus des éducateurs, on pourra trouver des designers, informaticiens, linguistes, anthropologues, sociologues, etc. Mais plus que la multiplicité des profils engagés dans une réalisation, c'est la façon dont les questions doivent souvent être abordées qui incite à construire une ingénierie spécifique : il ne s'agit pas de juxtaposer les compétences, mais de les articuler (CHEVALLARD, 1992). On peut ici reprendre l'exemple de la transposition informatique (BALACHEFF, 1991) qui, en plus de la transposition didactique sous-jacente, doit considérer et intégrer les limites, les potentialités et les modes de représentations spécifiques de l'ordinateur dans la transformation des objets de savoir en objets à enseigner. Pour cette transposition, il s'agit d'articuler les domaines des mathématiques, de l'informatique, de la didactique, de la psychologie co8gnitive, etc.

L'exemple de la transposition informatique montre que l'approche des différents domaines de connaissances impliqués dans la conception et le développement d'un CBPS n'est

[6] "Computer-Based Pedagogical Setting (CBPS), which may be defined as a pedagogical setting involving some software that is meant to play a role in relation to the considered pedagogical objectives" (Tchounikine, 2011, p.6). Même s'il y a des différences en ce qui concerne les environnements concernés, on pourra rapprocher CBPS de l'acronyme EIAH (Environnements informatiques pour l'apprentissage humain).
[7] On devrait parler d'ingénieries (au pluriel), le processus de conception dépend de la nature du produit à concevoir.

pas « multi » ou « inter », mais transdisciplinaire : de nouvelles notions sont souvent formulées. Tchounikine (2011) va même plus loin en considérant que la conception et le développement de CBPS ne sont pas qu'une question d'ingénierie, mais qu'ils constituent pleinement un champ scientifique:

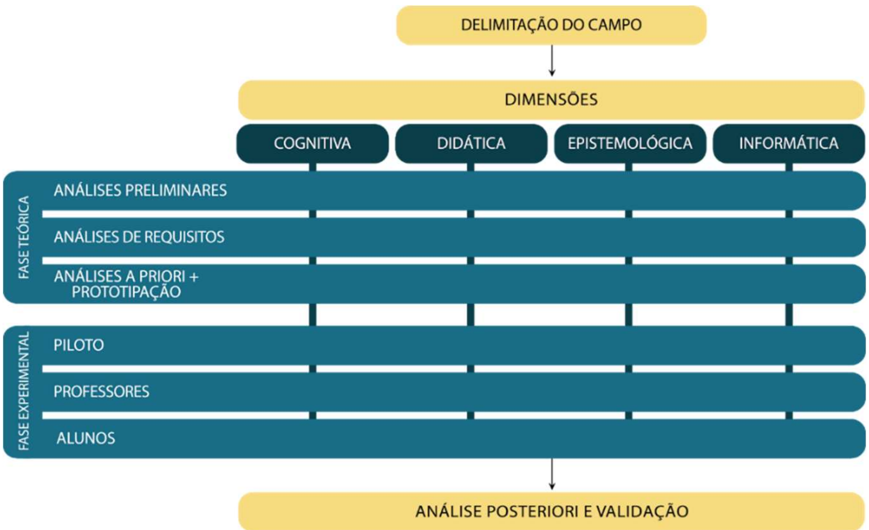
> Educational Software Engineering is the scientific field the objective of which is to study the issues related to educational software design and implementation (ibid., p.113).

Dans ce contexte d'approche transdisciplinaire des différents domaines de connaissances impliqués, nous développons une *ingénierie didactique informatique* (BELLEMAIN & AL., 2015 ; TIBÚRCIO, 2016) comme résultat de l'articulation entre l'ingénierie logicielle et l'ingénierie didactique :

> A escolha teórico-metodológica é a de integrar os princípios da Engenharia Didática à ESE. A intenção nessa integração é de contribuir para a elaboração de uma Engenharia Didática Informática como resultado de uma abordagem transdisciplinar da ED (RAMOS, 2015, p.58).

Une première version de cette *ingénierie didactique informatique* (EDI) (Figure 1) a été formulée dans le master de Tibúrcio (2016), après une esquisse de Ramos (2015), puis mise en œuvre par da Silva (2016), et par Silva (2019) et Siqueira (2019) dans leur thèse de doctorat. Pour en savoir plus sur l'EDI, sa mise en œuvre et son évolution, nous suggérons la lecture des travaux cités ci-dessus et de Tibúrcio (2020) proposant une nouvelle version de l'EDI.

Figure 1: Ingénierie didactique informatique.



Source: Tibúrcio (2016, p.56)

Les résultats de la mise en œuvre de cette première version de l'EDI sont de natures diverses. Il y a évidemment des apports aux deux extrémités du processus:

- À l'une d'elles, un retour expérimental sur les choix et réflexions théoriques à propos de l'EDI conduisant notamment à une reformulation de celle-ci.
- À l'autre, la production de micromondes fondés, offrant à la fois des moyens de validation de l'EDI et un support à l'enseignement et à l'apprentissage de certains contenus de mathématiques.

Entre les deux, cette version de l'EDI a permis, notamment par l'importance qu'elle accorde aux analyses préliminaires et par la prise en compte d'une dimension informatique en plus des dimensions épistémologique, cognitive et didactique (Figure 1), de rendre opérationnelle la transposition didactique informatique (TDI) pour la conception de logiciels pour l'enseignement des mathématiques. C'est ce point particulier que nous abordons dans ce texte, mais avant cela, revenons sur le type de logiciels qui nous intéresse : le micromonde.

Micromonde

Même si la notion de micromonde peut avoir un intérêt dans d'autres domaines de connaissances, c'est dans le contexte des mathématiques que nous allons discuter cette notion.

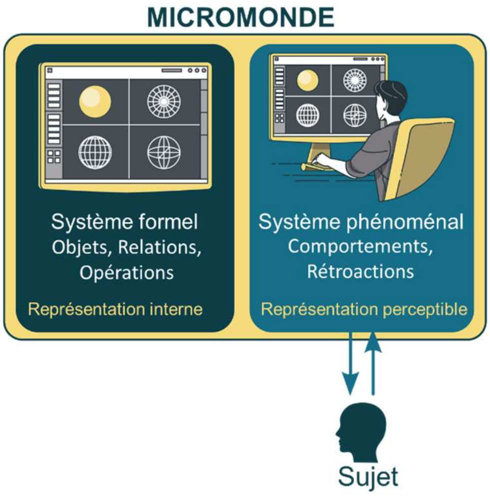
Dans l'histoire de l'informatique éducative, la notion de micromonde est déjà ancienne et on en fait remonter l'origine à la tortue LOGO (première version en 1967) et au livre « *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas* » de Papert (1980). Depuis, de nombreux logiciels que l'on peut catégoriser comme micromonde ont été conçus.

En fait, le caractère éducatif n'est pas intrinsèque à l'artefact « micromondes », comme le montrent les différentes caractérisations ou définitions qui en sont faites. Par exemple, pour Papert (1980), repris par Noss et Hoyles (1996), un micromonde est un environnement qui simule ou reproduit une partie d'un domaine dans le but de permettre d'aborder et de résoudre une certaine classe de problèmes. Après Papert, Thompson (1987), puis Laborde et Laborde (1991), définissent à leur tour:

> I will use "mathematical microworld" to mean a system composed of objects, relationships among objects, and operations that transform objects and relationships (THOMPSON, 1987, p.85).
>
> Et ayant « un rapport plus ou moins net au concept de manipulation directe. (LABORDE; LABORDE, 1991, p.159)

Nous préciserons ici que quand Thompson considère des objets, relations et opérations, il inclut des moyens de désignation et/ou représentation de ces éléments. Dans le contexte de l'ordinateur, ce sont ces désignations et représentations qui sont « numérisées », un processus qui en l'occurrence conduit à la création de nouvelles représentations, pour permettre l'accès aux objets, relations et opérations. Balacheff (1994b), pour mieux prendre en compte les questions de représentation et d'interface, considère le micromonde comme formé de deux systèmes, celui des désignations et représentations internes, qu'il nomme système formel, et celui des désignations et représentations à l'interface, qu'il nomme système phénoménal. Selon lui, ce deuxième système produit les rétroactions aux actions de l'utilisateur, manifestations perceptibles pour le sujet du résultat des opérations sur les représentations internes (Figure 2).

Figure 2: Schéma de micromonde.



On peut caractériser un micromonde par l'articulation d'un système formel et d'un domaine de phénoménologie :
- le système formel est constitué d'objets primitifs, d'opérateurs élémentaires et de règles exprimant comment peuvent être manipulés objets et opérateurs ;
- le domaine de phénoménologie détermine le type de feedback que le micromonde peut produire comme conséquence des décisions et des actions de l'utilisateur (BALACHEFF, 1994b, p.33).

Source de l'auteur.

Cette caractérisation a ensuite été complétée par Bellemain (2002) par un troisième système pour considérer la question de l'acquisition des actions significatives de l'utilisateur à l'interface et leur description en représentations internes ("le rapport plus ou moins net à la manipulation" directe de Laborde et Laborde):

> (iii) a system of interpretation which determines the possible actions of the user. This system has a set of interfaces which interprets the subject actions and transforms these actions into operations on the elements of the formal system. The representations of the phenomenal system can be artifact for the subject to act on the elements of the formal system which they represent. In short, this system implements the principle of direct manipulation (ibid., p.41).

Sans nécessairement considérer une dimension éducative, la conception d'un micromonde a pour but d'offrir un support computationnel (à travers le système formel) et d'interfaces (par les systèmes d'interprétation et phénoménal) à la résolution de problèmes mathématiques, en général, en:

- Numérisant les actions du sujet au travers du système d'interprétation pour les exprimer dans les représentations internes du système formel,
- Produisant, par le système phénoménal, des rétroactions cohérentes, et interprétables par le sujet, par rapport aux objets, relations et opérations internes.

Aussi, même si le micromonde n'est pas pour essence éducatif, par ce support à l'activité mathématique qu'il propose, il peut constituer un milieu (BROUSSEAU, 1998) dans lequel peuvent être créées des situations :

- Qui favorisent l'activité de l'apprenant, en particulier par la résolution de problèmes mettant en œuvre les éléments du système formel.
- Qui sont a-didactiques et pour lesquelles les rétractions du micromonde aux actions de l'apprenant, rétroactions construites sur la cohérence interne des objets, relations et opérations, lui fournissent des éléments de validation pragmatique (BALACHEFF, 1987) de ses actions et qui ne dépendent pas d'intention didactique.

C'est ce qu'il se passe, par exemple, avec le tableur qui même n'étant pas développé avec des fins éducatives, est utilisé avec succès dans l'enseignement et l'apprentissage de divers domaines : mathématiques, informatique (CAPPONI, 1990), statistiques, etc.

Pour résumer, même si la notion de problème n'apparait plus dans les définitions ci-dessus, elle reste au centre de la notion de micromonde: celui-ci offre un support (représentations, interfaces etc.) à la résolution de problèmes. C'est par ce biais qu'il a un apport à l'enseignement et l'apprentissage en fournissant à l'enseignant un milieu pour la formulation de situation-problèmes (MARGOLINAS, 1995), et à l'apprenant un support à l'exploration et résolution de ces situations.

Les définitions et descriptions ci-dessus restent assez générales et ne sont pas opérationnelles si l'on cherche à concevoir un micromonde pour l'enseignement et l'apprentissage. Considérer la dimension éducative dans cette conception est important. Cependant, on observe que les fondements de l'utilisation éducative de micromonde sont plutôt construits a posteriori à partir de micromondes déjà développés: *LOGO Turtle* pour la caractérisation de Papert, *MOTION* pour celle de Thompson et *Cabri-géomètre* (BAULAC; BELLEMAIN; LABORDE, 1988) pour celle de Laborde et de Balacheff. Il ne s'agit pas ici de remettre en cause la dimension éducative de la conception des logiciels cités ci-dessus, mais plutôt de souligner la difficulté d'une prise en compte apriori et surtout explicitée de cette dimension. Tout se passe comme si la réalisation des micromondes cités s'engageaient sur quelques « bonnes idées », fruits d'une articulation transdisciplinaire implicite et plutôt réussie, entre l'informatique et les sciences de la cognition comme la psychologie cognitive, pour

Papert, ou la didactique des mathématiques, pour Laborde et Bellemain. L'évolution d'un prototype initial réalisant ces bonnes idées se poursuit ensuite dans des équipes multidisciplinaires et en interaction avec des utilisateurs, chercheurs et enseignants, et des utilisations sur le terrain, processus rappelant les méthodes de conception *agile*[8].

Certainement aidé par une volonté de protection des idées et l'aspect un peu mystique de la création, la conception et le développement des micromondes « à succès » ressemble donc à une boite noire. Nous avions nous-mêmes, dans notre thèse (BELLEMAIN, 1992), décrit et justifié Cabri-géomètre a posteriori et peu, sinon pas du tout, parlé de son émergence. Il est clair que le contexte pluridisciplinaire, bien qu'insuffisant, est nécessaire, mais l'ingénierie sous-jacente aux choix des problèmes, objets, relations, opérations, représentations et interfaces garde un aspect très « génie ».

Dans la recherche d'une démarche apriori de conception, il paraît évident que les contributions effectives d'un micromonde à l'enseignement et apprentissage dépendent des objets, relations et opérations qui le composent et des problèmes qu'il va permettre de résoudre, et des interfaces de manipulation de ces objets, relations et opérations et de visualisation de ces manipulations. Ce que Balacheff et Kaput (1997, p.477) soulignent :

> … students' knowledge is an emergent property of a dialectic relationship between perception and conceptualization during interaction at the system's interface, which in turn depends on the structure of the internal computer formalisms, the choice of phenomenology that these are linked to, and details of the interface implementation ultimately determine the educational potential of the technology (BALACHEFF; KAPUT, 1997, p.477).

Au-delà des problèmes que le micromonde permet d'aborder, ses contributions vont aussi dépendre de ce que l'enseignant trouve comme moyens, pour le mettre en œuvre et pour orchestrer et évaluer cette mise en œuvre dans son enseignement. Ces questions, bien qu'importantes pour que le micromonde offre un support effectif à l'enseignement, ne seront pas abordées dans ce texte, nous restons en amont de la spécification de telles fonctionnalités pour l'orchestration instrumental (TROUCHE, 2005) et la documentation du professeur (GUEUDET; TROUCHE, 2010). De tels éléments d'ingénierie relatifs au choix et à

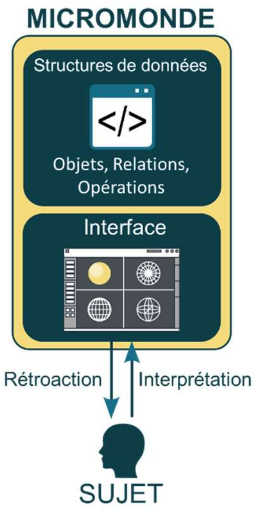
---

[8] « Nous découvrons comment mieux développer des logiciels par la pratique et en aidant les autres à le faire. Ces expériences nous ont amenés à valoriser :
- Les individus et leurs interactions plus que les processus et les outils.
- Des logiciels opérationnels plus qu'une documentation exhaustive.
- La collaboration avec les clients plus que la négociation contractuelle.
- L'adaptation au changement plus que le suivi d'un plan.

Nous reconnaissons la valeur des seconds éléments, mais privilégions les premiers. » (https://agilemanifesto.org/iso/fr/manifesto.html, consultée le 30/04/2021) l'articulation de ressources (ADLER, 2000) ont été abordés par Bellemain et Trouche (2016).

Aussi, utilisant notre expérience pour avancer dans la description d'une ingénierie de conception et de réalisation de micromondes, nous finirons ce paragraphe par une approche plus technique (Figure 3).

Figure 3 : Micromonde dans l'environnement informatique



Le micromonde serait finalement formé :

i. D'une structure de données interne modélisant les objets, relations et opérations.

ii. D'une interface :

   a. Interprétant les actions effectuées avec les dispositifs d'interface (souris, clavier, tablette, etc.) pour la définition et manipulation des données internes.

   b. Représentant les données internes aux interfaces de visualisation.

Source de l'auteur

L'interprétation des rétroactions par l'utilisateur est faite par l'interprétation de la cohérence entre l'objectif d'une action et son résultat aux interfaces.

Cette esquisse de structuration des données s'inspire de ce que nous avions fait pour Cabri-géomètre (BELLEMAIN, 1992), et de la définition de micromonde donnée par Balacheff (1994b). En effet, pour la conception des structures de données du logiciel, nous nous étions intéressés à la classe des problèmes de construction de figure géométrique dans le plan et avions considéré qu'un objet géométrique était défini en interne par une structure OBJET (figure 4) contenant des valeurs numériques : VALEUR (représentation analytique), des éventuels « parents » (*constits*) et caractérisée par deux autres structures :

- Une structure CLASSE[9] (le terme n'avait pas été choisi judicieusement) relative aux relations et opérations géométriques définissant l'objet (objet, relation, opération).
- Une structure TYPE relative à l'interface de saisie et manipulation graphique de l'objet (interface graphique).

[9] En informatique, une CLASSE est une structure, et l'association avec un entier dans l'exemple prête à confusion. Néanmoins, dans le cas de Cabri-géomètre, cet entier est un index dans un tableau regroupant les instances d'une structure de données représentant les différentes catégories d'objet : point, droite, médiatrice, etc.

Figure 4 : Structure OBJET de Cabri-géomètre

```
typedef struct objet {
        int type;
        int classe;
        VALEUR val[4];
        struct objet *constits[4];
        } OBJET, *objetptr;
```

Source : Bellemain (1992, p.146)

Considérant la construction d'un triangle, par exemple, elle demandera la construction de trois points ({**type** : point, **classe** : point libre, **val** : coordonnées du point, **constits** : aucun}) et du triangle ({**type** : polygone, **classe** : polygone, **val** : aucune, **constits** : [p1, p2, p3]}).

Pour aller plus loin dans la conception et le développement de micromondes pour les mathématiques et la géométrie, nous proposons maintenant de reprendre le processus de transposition informatique relatif à la modélisation des objets, relations et opérations et à la définition des interfaces.

La transposition informatique et l'EDI

La transposition informatique désigne la transformation de connaissances en structures, représentations et programmes informatiques pour la conception et le développement de logiciels éducatifs. Il est important de rappeler que les logiciels éducatifs dont on parle ici, sont ceux qui permettent à l'apprenant des activités relatives aux connaissances implémentées, les micromondes étant un cas particulier. Même si la transposition informatique n'est pas exclusive de ce type de logiciel, celle-ci dépend des besoins relatifs aux connaissances implémentées. Elle ne sera probablement pas la même pour la conception d'un micromonde ou d'un tuteur intelligent, par exemple.

La transposition informatique, selon Balacheff et Kaput (1997), est aussi importante que la transposition didactique, au moins pour ce qui est de la transformation des connaissances qu'elle nécessite :

> So, knowledge is transformed in the process of implementing educational software because of computational constraints as much as it is transformed under the didactical constraints. Necessary decisions to be taken for the design of a software, such as the choice of a knowledge structure and representation, or of the algorithms to apply, or of a grain for the description of the objects, imply a computational transposition which consequences on knowledge are as crucial as the already known didactical transposition. (ibid., p.477)

Mais au-delà de comparer ces deux transpositions, Balacheff et Kaput les articulent dans le sens où ils considèrent que les connaissances construites par l'apprenant au travers de l'utilisation d'un logiciel éducatif sont fonctions de la façon dont ces connaissances ont été transformées dans l'implémentation, transformation qui doit être prise en compte dans le processus didactique :

> At the intersection of didactical transposition and computational transposition stands the problem of the relationships of the knowledge taught as it results from the behaviour of the system with the knowledge its designer intends it to teach. What is the experienced epistemological content of the software? Might there be new mathematics as a result of its computational embodiment? (ibid., p.477)

Plutôt que de considérer une articulation entre les deux transpositions, nous préférons parler d'une transposition didactique informatique (TDI), transposition à double dimension. Nous comprenons que, pour la conception de logiciels éducatifs, il est nécessaire de :

- Considérer les constructions relatives à la transposition didactique du point de vue des contraintes informatiques pour leur implémentation.
- Prendre en compte les contraintes et contributions des dispositifs informatiques dans la transformation des savoirs en objets d'enseignement, modélisés en vue de leur implémentation informatique.

Jusqu'à présent, nous avons surtout discuté la TDI du point de vue de la transformation des connaissances en représentations internes pour les besoins de l'implémentation de logiciels éducatifs. Aussi, pour évaluer et valider cette transformation, Balacheff (1994a) introduit la notion de domaine de validité des représentations, la préférant à celle de fidélité proposée par Wenger (1987) :

> Le problème de la représentation des connaissances est posé dans la littérature d'I.A. en termes de "fidélité". Une telle problématique conduit à ignorer les limites autant que la réalité des bénéfices que l'on peut tirer des spécificités des représentations dans les dispositifs informatiques […] Faire face à ce problème de transformation des connaissances dans le processus de représentation est d'autant plus essentiel que les phénomènes associés sont susceptibles de se combiner de façon complexe à ceux de la transposition didactique. A la problématique de la fidélité nous proposons de substituer celle du domaine de validité des représentations (BALACHEFF, 1994a, p. 369).

Dans le cas particulier des micromondes, le domaine de validité des représentations est notamment défini par la classe de problèmes que le micromonde permet d'aborder et de résoudre. La définition de ces problèmes est importante du fait du rôle central que ceux-ci jouent, comme moteur de son activité, dans la construction des connaissances de l'apprenant.

Notre approche actuelle de la TDI nous a permis d'avancer dans la construction d'une ingénierie de micromonde. Cependant, pour aller plus loin, il nous paraît que le regard de la TDI sur des classes de problèmes, des objets, des relations et des opérations implémentées pourrait être approfondi par la prise en compte d'éléments de la théorie anthropologique du didactique (TAD) (CHEVALLARD, 1991). Nous n'aborderons pas cette question mais cette voie, étudiée dans la thèse en cours de Oliveira (2020), nous semble fertile: questionner d'un point de vue praxéologique les choix de transposition didactique informatique, dans la conception et le développement de micromondes. Il s'agit à la fois d'interpréter du point de vue de la TAD les choix faits dans des micromondes qui existent et d'apporter des éléments pour la construction de praxéologies « informatiques » aidant à la conception de micromondes et à leur intégration dans l'enseignement.

Le plus souvent, la TDI est observée et étudiée à partir d'environnements déjà réalisés, ou est parfois évoquée, en amont, dans la conception et le développement d'un environnement, mais plus pour désigner les éléments d'un processus que comme principe méthodologique de cette conception. La difficulté évoquée ici d'utiliser la TDI comme méthodologie est simplement conséquence de l'absence d'une ingénierie, d'une articulation entre logos et praxis, la concernant. Comme indiqué précédemment, nous pourrions utiliser la TAD pour élaborer cette ingénierie, mais nous proposons plutôt d'utiliser ici l'ingénierie didactique et son adaptation informatique faite par Bellemain *et al* (2015) et Tibúrcio (2016), l'EDI. Nous proposons en particulier de considérer les analyses préalables de l'EDI aux dimensions épistémologique, cognitive, didactique et informatique comme éléments méthodologiques de la TDI :

> - la dimension épistémologique associée aux caractéristiques du savoir en jeu,
> - la dimension cognitive associée aux caractéristiques cognitives du public auquel s'adresse l'enseignement,
> - la dimension didactique associée aux caractéristiques du fonctionnement du système d'enseignement (ARTIGUE, 1988, p.289).

- Et la dimension informatique associée aux contraintes et contributions des dispositifs informatiques à la représentation et aux traitements des connaissances.

Plutôt que de décrire comment les analyses préalables peuvent être mises en œuvre dans ces quatre dimensions, nous présenterons comment nous les avons effectivement utilisées pour la conception informatique de micromonde pour les mathématiques. Dans ce texte, nous nous limiterons à la présentation des réflexions relatives aux trois premières dimensions (épistémologique, cognitive et didactique), soulignant les éléments de ces réflexions pour lesquels nous proposons d'explorer l'apport de l'ordinateur.

Analyses préalables pour la conception de micromonde

Même si nous présentons ici notre démarche de conception de façon a priori, elle bénéficie a posteriori de la conception et réalisation de plusieurs logiciels et prototypes, commençant par *Cabri-géomètre* auquel nous avons contribué jusqu'à 2003 : Cabri-géomètre en 1988 (BAULAC; BELLEMAIN; LABORDE, 1988), Cabri II en 1994 (BELLEMAIN; LABORDE, 1994) et Cabri II plus en 2001 (LABORDE; BELLEMAIN, 2001), mais aussi *Forma* (SIQUEIRA; BELLEMAIN, 2012), *Vetores* (ANDRADE, 2010; ANDRADE; BELLEMAIN, 2015) et plus récemment *Function Studium* (TIBÚRCIO, 2016; SILVA, 2016; SILVA *et al*, 2019). Ces logiciels et prototypes pourront fournir des éléments illustratifs à notre mise en œuvre de la TDI.

Plus que le fait d'avoir effectivement participé à ces logiciels et prototypes, c'est le contexte de la didactique des mathématiques dans lequel ils ont été conçus qui, de notre point de vue, nous a le plus permis d'avancer sur les quelques principes de conception et développement de micromonde que nous présentons.

Dimension épistémologique

La caractérisation de micromonde comme offrant un support à la résolution de problèmes est déjà le résultat d'une réflexion épistémologique sur les mathématiques et leurs rôles: la résolution de problèmes comme moteur de l'évolution. Hilbert (1902) avait, par exemple, proposé 23 problèmes qui devaient faire avancer les mathématiques au siècle dernier. Il décrivait ainsi ces « bons » problèmes:

> Moreover a mathematical problem should be difficult in order to entice us, yet not completely inaccessible, lest it mock at our efforts. It should be to us a guide post on the mazy paths to hidden truths, and ultimately a reminder of our pleasure in the successful solution (ibid., p.438).

De la même façon, le fait de considérer, dans le contexte de l'enseignement et de l'apprentissage, le micromonde comme un élément du milieu (BROUSSEAU, 1998) dans lequel l'apprenant peut avoir une activité se rapprochant de l'activité du mathématicien qui est celle d'utiliser (ou construire et utiliser) des modèles pour résoudre des problèmes, est aussi résultat d'une réflexion épistémologique sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : la résolution de problèmes comme moteur de l'apprentissage. Comme

RPEM, Campo Mourão, PR, Brasil, v.11, n.25, p.80-105, maio.-ago. 2022.

souligne Vergnaud (1981, p.220), « La solution de problèmes est la source et le critère du savoir ».

Pour la conception d'un micromonde particulier, pour qu'il ait un apport à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, il s'agit de choisir quels « bons » problèmes, il doit permettre d'aborder. Même si les critères proposés par Hilbert pour ce choix ont du sens, ils ne s'adresseront évidemment pas aux mêmes problèmes lorsque ceux-ci sont destinés à l'apprenant. Au-delà des questions de pertinence et d'accessibilité, on cherchera aussi à créer un environnement qui soit suffisamment générique pour permettre d'aborder des classes de problèmes, plutôt qu'un problème particulier. C'est ainsi, par exemple, que la tortue LOGO et Cabri-géomètre, sans entrer dans le détail des moyens que chacun propose pour le faire, accordent une place centrale à la construction d'objets graphiques qui représentent des figures géométriques.

Pour aller plus loin dans la caractérisation des classes de problèmes qui nous intéressent, revenons sur une particularité des mathématiques décrites par Duval (2007, p.9). Selon lui, elles se distinguent des autres sciences :

- Par l'importance des systèmes de représentations : « toute activité mathématique implique le recours à des représentations sémiotiques parce que les objets étudiés n'y sont pas accessibles perceptivement ou instrumentalement, comme dans les autres domaines de connaissance scientifique » (ibid.).
- Par le rôle que jouent ces systèmes dans l'activité mathématique : « On ne les utilise pas d'abord pour évoquer des objets, ou pour communiquer, mais pour pouvoir effectuer des traitements, c'est-à-dire des raisonnements, des calculs, etc » (ibid.).
- Par la grande variété de ces systèmes : « on recourt à des types très différents de représentations sémiotiques, car tous les systèmes sémiotiques n'offrent pas les mêmes possibilités de traitement » (ibid).
- Et par l'importance que jouent les conversions entre ces différents systèmes de représentation : « le point fondamental dans l'activité mathématique n'est pas l'utilisation nécessaire de représentations sémiotiques mais la capacité à passer d'un registre de représentation sémiotique à un autre registre » (ibid.).

Mais plus encore que d'être capable d'effectuer des conversions entre représentations, c'est le fait d'y avoir recours qui est important. Les conversions sont nécessaires à l'activité mathématique:

> Les conversions sont toujours effectuées par rapport aux traitements à mettre en

> œuvre pour résoudre un problème. Autrement dit, la conversion des représentations constitue l'un des ressorts heuristiques majeurs dans résolution des problèmes mathématiques (ibid., p.27).

L'ordinateur, par son propre fonctionnement, met constamment en œuvre des conversions entre les données internes et des représentations aux interfaces. Dans le cas plus particulier du micromonde, il a recours de façon systématique à des conversions pour la communication entre les représentations internes du système formel et les représentations externes des interfaces, les phénomènes du système phénoménologique étant en fait résultat de l'observation des conversions effectuées par le micromonde. Finalement, plutôt que de chercher des classes de problèmes à aborder avec un micromonde, nous cherchons à spécifier une architecture permettant d'élaborer des micromondes offrant un support informatique général à l'utilisation de divers systèmes de représentation, aux traitements et aux conversions entre ceux-ci.

Dimension cognitive

Les conversions entre les systèmes de représentation sont un élément essentiel de l'activité mathématique et sont nécessaires à la compréhension et la construction des connaissances chez l'apprenant, « il n'y a pas de compréhension en mathématiques sans la capacité de changer de type de représentation. » (Ibid., p.17). L'accès aux objets des mathématiques n'est possible qu'au travers de leurs représentations et, pour ne pas les confondre avec leur représentation et les rendre plus accessible, l'utilisation de plusieurs représentations est nécessaire.

Pourtant, bien qu'étant fondamentales, il semble difficile de connaitre les mécanismes mis en œuvre dans les conversions, et donc finalement encore plus difficile de les enseigner. Duval (ibid.) met en évidence que les systèmes de représentations, objets de conversion, sont souvent hétérogènes, qu'il n'existe pas de codage ou de traduction entre eux et que la distance cognitive qui les sépare est variable, tout ceci conduisant au fait qu'il y a rarement des correspondances directes entre les traitements qui s'effectuent dans chaque système. Finalement, la meilleure façon de savoir effectuer des conversions entre les systèmes de représentation, serait de connaitre les objets représentés, pourtant, la connaissance des objets passe par ces changements de systèmes qui…

> … loin d'être la conséquence de l'acquisition d'un concept mathématique, ils en sont la condition. Le premier seuil de compréhension, souvent infranchissable, est le changement de registre de représentation (Ibid., p.17).

Mais,

> … il ne suffit pas d'une multi représentation, même expliquée en classe, pour que les élèves y reconnaissent un même objet représenté avec des contenus différents (Ibid., p.17).

Sans entrer dans le détail des mécanismes conscient et subconscient qui régissent les changements de registres de représentation comme le fait Duval, essayons de comprendre comment ces changements de registres peuvent se faire pour mieux dégager quels supports l'ordinateur peut fournir à ceux-ci.

En fait, les conversions ne peuvent pas être assimilées à des codages (par l'absence en général de règles de décodage) ou traductions (à cause de l'hétérogénéité des systèmes de représentations). Duval souligne même qu'il n'y a « pas de règles de conversion, seulement des correspondances à discriminer » (ibid., p.22). Dans ce contexte, il pose deux questions centrales (ibid., p.24 et p.27): comment discriminer les unités signifiantes des représentations et comment passer de l'hétérogénéité des représentations à l'unité d'une connaissance.

Les unités signifiantes sont associées aux correspondances qui peuvent s'établir entre des éléments de chaque représentation. Par exemple, Duval (1988, p.240) propose un tableau de correspondance (Tableau 1) entre les coefficients de l'équation y=ax+b, représentation symbolique, d'une droite et sa représentation graphique. Il est important de souligner, relativement à ce tableau et aux correspondances entre unités signifiantes de chaque représentation, qu'il ne s'agit pas d'établir un lexique (comme pour une traduction) ou un répertoire de règles de codage.

> La conversion ne se fait ni en appliquant des règles ni en suivant des tables de correspondances terme à terme, ou terme à image, comme s'il s'agissait de codage ou de traduction, mais en entrant dans une exploration quasi expérimentale de variations (DUVAL, 2007, p.24).

Il ne s'agit pas de comparer les représentations d'un même objet dans deux registres différents, mais plutôt d'effectuer une exploration expérimentale de variations, ou plus précisément de covariations.

> La comparaison n'est plus entre la représentation de départ dans un registre et la représentation d'arrivée dans un autre registre. Elle est entre une variation introduite dans la représentation de départ et une covariation éventuelle dans la représentation d'arrivée (DUVAL, 2007, p.24).

Tableau 1: Correspondance entre variables visuelles et unité symboliques

Variables visuelles	Valeurs	Unités symboliques correspondantes	
– sens d'inclinaison :	trait montant trait descendant	coefficient >0 coefficient < 0	absence du symbole – présence du symbole –
– angles avec les axes :	partage symétrique angle *plus petit* angle *plus grand*	coefficient = 1 coefficient < 1 coefficient > 1	pas de coefficient écrit
– postion sur l'axe y :	coupe au dessus	on ajoute une constante	signe +
	coupe au dessous	on soustrait une constante	signe –
	coupe à l'origine	pas de correction additive	

Source: Duval, 1988, p.240

Relativement à cette covariation, on imagine assez facilement l’apport d’un micromonde informatique et ces représentations dynamiques.

Un autre élément important à souligner relativement aux unités signifiantes est qu’elles ne sont pas indépendantes et ne peuvent pas être explorées sans considérer la représentation à laquelle elles appartiennent dans sa globalité. Pour revenir à l’exemple des équations de droites du tableau 1, le coefficient a de x n’a pas la même signification suivant que l’équation considérée est y=ax+b ou ax+by+c=0. De plus, dans le cas de l’expression ax+by+c=0, les coefficients a et b correspondent aux coordonnées d’un vecteur directeur de la droite, alors que l’inclinaison pourra être associée au rapport entre a e b. Il en est de même pour la représentation graphique pour laquelle les unités relatives à la position des éléments ne peuvent être considérées indépendamment de l’orientation du système de coordonnées choisi pour la représentation de la droite. Pour prendre en compte différentes « granularités » des unités signifiantes, on parlera de groupes signifiants d’unités signifiantes, le grain le plus gros étant la représentation globale de l’objet considéré.

Dans ce contexte, Bellemain (2004) souligne que la notion de « forme » peut être considérée comme un élément de signification de la représentation en tant qu’unité (ou groupe d’unités) signifiante. Nous ne chercherons pas à définir ni surtout pas à discuter la notion de forme avec détails dans ce texte. Il s’agit d’une discussion longue et complexe dans laquelle, pour aller au-delà du sens commun de cette notion, il s’agit d‘articuler des éléments relatifs aux questions perceptives telles que celles abordées dans théorie de la gestalt d’une part, et des éléments relatifs aux mathématiques, d’autre part (Pour la science, 2016). En mathématique, le terme « forme » est utilisé pour certaines classes d’équivalence d’objets organisées par une relation d'équivalence définie : on parle de forme linéaire, de forme quadratique, …, mais l'idée de forme s'étend à d'autres classes d'objet: forme canonique, forme factorisée etc. dont la relation d'équivalence peut être décrite par les traitements que chaque forme permet de mettre en œuvre. En fait, ces formes ont plus d'intérêt dans une résolution de problème que comme objet d'étude car au travers de ces dernières, ce qui intéresse dans un processus heuristique, c'est la « reconnaissance de forme ».

La notion de forme est particulièrement importante en géométrie, au point d'ailleurs de suggérer, par les questions qui y sont abordées, de rebaptiser ce domaine de connaissances en « *morphologie* ». Cela n'a pas forcément d'intérêt puisque l'étude de formes est une activité répandue dans de nombreux domaines de connaissances, néanmoins considérer la géométrie comme étant une telle étude est un point de vue épistémologique pertinent et transversal pour la compréhension de nombreux contenus de ce domaine, et leur enseignement. Cependant, cela conduit à une caractérisation de la notion de forme en géométrie plus générale que celle habituellement acceptée. En effet, s'il est communément admis que deux objets ont une même forme s'il existe une similitude qui transforme l'un en l'autre, cette caractérisation ne permet pas de considérer, par exemple, les rectangles, les parallélogrammes, les coniques, les produits de la mise en œuvre d'une grammaire de la forme, comme des formes puisque ces objets ne sont pas semblables au sens des similitudes. Aussi, nous préférons retenir une caractérisation plus large de la notion de forme en la considérant comme une classe d'équivalence d'objets pouvant être mis en relation par une transformation géométrique ou un algorithme.

Dans ce contexte, et revenant aux conversions entre représentations, nous proposons de considérer la reconnaissance de forme comme une discrimination d'une unité signifiante de grain « plus gros » d'une représentation d'un objet pour la faire correspondre à la forme équivalente d'une autre représentation du même objet. Il s'agit par exemple de reconnaitre ou discriminer une équation quadratique dans le registre symbolique que l'on va faire correspondre à une conique dans le registre graphique et vice-versa.

Restant dans ce contexte de la reconnaissance de forme et de discrimination d'unité signifiante, essayons de dégager le rôle du traitement relativement à ces deux notions. Dans le cas des expressions algébriques, le plus souvent un traitement est un calcul dont le but est d'obtenir un résultat. Il s'agit aussi, par un traitement, de changer de forme: forme développée, forme factorisée, forme canonique (dans le cas des expressions du second degré). Ces traitements sont d'ailleurs la source de nombreux exercices (factorisation, développement). Dans ce contexte, un traitement a pour but de changer de forme et ainsi de changer le groupe d'unités signifiantes d'une représentation et leurs correspondances avec les unités signifiantes d’autres représentations.

Un dernier point que nous souhaiterions soulever ici est relatif au sens attribué aux unités signifiantes. La discrimination des unités signifiantes est un processus dans lequel il s’agit en partie de distinguer les unités qui ont du sens (signifiantes) de celles qui n’en ont pas par rapport aux objets représentés, bien que pouvant avoir du sens pour l’apprenant. Grand, petit, horizontal, vertical peuvent, par exemple, avoir du sens pour celui-ci, sans être pertinent dans la résolution d’un problème. Le moteur du processus de discrimination est ainsi dans l’établissement des correspondances entre les unités significatives de chaque représentation, mais aussi dans les situations qui donnent du sens aux unités signifiantes.
Là aussi, nous verrons l’apport de l’ordinateur et des micromondes à la reconnaissance de forme et la discrimination des unités signifiantes des différentes représentations.

Dimension didactique

Duval (ibid., p.16), relativement aux conversions entre les systèmes de représentations, pose les trois questions suivantes, qu’il considère comme très rarement prises en compte dans l’enseignement :

- La plupart des élèves peuvent-ils effectuer d’eux-mêmes ces différents passages?
- Le fait de pouvoir effectuer localement un type de passage a-t-il un effet de transfert sur les autres types de passage?
- Le fait de pouvoir effectuer, dans un sens, le passage entre deux types de représentation, entraîne-t-il le fait que l’on soit capable d’effectuer le passage dans l’autre sens?

L’enseignement des mathématiques, en général, privilégie les traitements, et plus particulièrement le calcul, par rapport aux conversions. Ces dernières sont souvent considérées comme allant de soi et conséquence de la maitrise des traitements dans chaque registre. Les raisons d’une prise en compte insuffisante de l’importance et de la complexité des conversions sont multiples. L’une d’elles est probablement liée aux questions d’évaluation, l’aspect algorithmique d’un traitement en facilite l’évaluation. Une autre raison est dû au caractère « méta » de la conversion, comme c’est le cas de la reconnaissance de forme évoquée plus tôt. Il ne s’agit pas d’un savoir mathématique, mais plutôt d’un savoir-faire implicite à l’activité mathématique dont on considère que la maitrise est simple conséquence de celle des savoirs qui la justifie. Pourtant, comme le souligne Duval, cette maitrise n’est pas conséquence, mais nécessaire à la compréhension en mathématique.

Au-delà de ce caractère « méta » de la conversion qui freine son accès au statut d’objet d’enseignement, il y a aussi le fait qu’elle est difficile à enseigner parce qu’il est difficile d’en comprendre les mécanismes. Bien sûr, la résolution de problème, lorsqu'elle nécessite des changements de registre, est un moteur à la réalisation de conversions parce qu'elle les rend nécessaires. Celles-ci jouent un rôle important dans le processus de résolution, « la conversion des représentations constitue l'un des ressorts heuristiques majeurs dans résolution des problèmes mathématiques » (DUVAL, ibid., p.27). Et de ce point de vue, la géométrie est un terrain privilégié et une source sans fin de situations problèmes nécessitant des conversions : « il faut articuler en permanence au moins deux registres différents : un registre discursif (en langue naturelle ou en écriture symbolique) et un registre de représentations visuelles constructibles instrumentalement » (ibid., p.17).

Dans ce contexte de résolution de problèmes, se pose évidemment la question du contrôle de la validité des conversions effectuées par le sujet. Aussi, la plupart du temps, cette validation des actions de l'apprenant est externe aux situations les nécessitant, et se trouve, en particulier, dans les explications ou les démonstrations de l'enseignant et les implicites du contrat didactique (BROUSSEAU, 1988). On peut chercher à favoriser une validation interne grâce aux rétroactions du milieu:

> Les rétroactions du milieu apparaissent comme objectivement liées à la situation à l'élève et sont moteurs de la poursuite d'une recherche d'une solution plus satisfaisante (CAPPONI ; LABORDE, 1991, p.221).

Les représentations sémiotiques peuvent être utilisées dans ce contexte comme instrument pour la communication. Elles sont utilisées dans des échanges entre pairs et les conversions soumises à des validations, pragmatiques ou même formelles (BALACHEFF, 1987), au travers des réponses aux assertions formulées. Même si la communication est médiée par des interfaces plus ou moins contraintes, les interactions avec l'ordinateur, comme élément du milieu, offrent aussi des moyens de validation par les rétroactions aux actions réalisées à l'interface. Les rétroactions sont produites au travers d'une double conversion : de l'interface vers le système interne au travers de l'interprétation des actions et du système interne vers une ou des interfaces de représentations des éléments du système interne. On reconnaîtra ici des éléments des situations de formulation décrites par Brousseau (1997, p.7):

> La possibilité de formuler une connaissance implicite change à la fois ses possibilités de traitement, d'apprentissage et d'acquisition. La formulation d'une connaissance correspondrait à une capacité du sujet à la reprendre (la reconnaître, l'identifier, la décomposer et la reconstruire dans un système linguistique). Le milieu qui doit rendre nécessaire l'usage par le sujet d'une formulation doit donc comporter (effectivement ou fictivement) un autre sujet à qui le premier devra adresser une information.

Les micromondes peuvent avoir ainsi des contributions importantes, notamment grâce aux interfaces à manipulation directe, en ce qui concerne la richesse de rétroactions aux actions du sujet.

Considérations et perspectives

On comprendra que le lecteur puisse rester quelque peu sur sa faim avec ce texte dans la mesure où la dimension informatique de la TDI n'y est pas abordée. Cette dernière sera présentée dans une autre publication complétée d'éléments de développement relatifs aux spécifications que la TDI nous a permis de dégager. Quoiqu'il en soit, les quatre dimensions de la TDI s'entrelacent et même si elle n'est pas explicitement abordée, la dimension informatique est implicite dans les autres dimensions présentées dans ce texte.

Notre projet est de mettre en œuvre des connaissances de didactique des mathématiques et de psychologie cognitive pour la création de logiciels éducatifs dans une double perspective, celle de construire effectivement des artefacts et celle de construire une ingénierie spécifique de conception. Le cadre théorique et méthodologique choisi est celui en construction de l'ingénierie didactique informatique (EDI) dont l'objectif est précisément d'articuler l'ingénierie didactique et l'ingénierie de logiciel (génie logiciel). Dans l'EDI, nous nous intéressons plus particulièrement à rendre opérationnelle la transposition didactique informatique. L'EDI comme la TDI comme méthodes en sont à leurs premières esquisses et la mise en œuvre est plutôt une mise à l'épreuve dans laquelle on recherche autant les apports de ces principes à la conception de logiciels éducatifs que des possibles évolutions.

Le fer de lance de l'EDI est la production de principes transdisciplinaires qui traversent les domaines de connaissances concernés par la conception de logiciels éducatifs. Le projet est ambitieux et le choix de conception du type de logiciel micromonde pour les mathématiques permet une réduction de la complexité du problème général. Par exemple, les questions de *design*, très importantes pour la production de matériel digital éducatif (SILVA *et al*, 2021), interviennent, pour une grande partie, en aval de la TDI. Même considérant cette réduction de la complexité, les principes pour la conception de micromonde doivent encore avancer pour pouvoir être mise en œuvre par des informaticiens, nous y travaillons.

Références

ADLER, J. Conceptualising Resources as a theme for teacher education. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Kluwer Academic Publishers, v. 3, n. 3, p. 205-224, 2000.

ANDRADE, J. P. G.; BELLEMAIN, F. Interfaces digitais comunicantes e registros de representação semióticos: análise das interações para a aprendizagem colaborativa suportada por computador de objetos de álgebra linear. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis- GO. **Anais** do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília-DF: SBEM, 2015.

ANDRADE, J. P. G. **Vetores**: interações à distância para a aprendizagem de álgebra linear. 2010. f. 125. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v.9, n.3, p. 281-308, 1988.

BALACHEFF, N. Processus de Preuve et Situations de Validation. In: **Educational Studies in Mathematics**, 1987. n. 18, p. 147-176.

BALACHEFF , N. Contribution de la didactique et de l'épistémologie aux recherches en EIAO. **Actes** des 13ème Journées Francophones sur l'Informatique, Formation Intelligemment Assitée par Ordinateur, Genève, p. 9-38, 1991.

BALACHEFF, N. La transposition informatique. Note sur um nouveau problème pour La didactique. In: ARTIGUE, M. et al. (eds). Vingt ans de didactique des mathématiques en France. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. especial. La Pensée Sauvage Editions, 1994, p. 364-370.

BALACHEFF, N. Didactique et intelligence artificielle. **Recherches en didactique des mathématiques**. n. 14 v1.2, p. 9-42, 1994.

BALACHEFF, H.; KAPUT, J. J. Computer – Based Learning Environments in Mathematics. In: nd. ed. **International Handbook in Mathematics Education**. London: Kluwer, 1996. p. 469 – 501

BAULAC, Y.; BELLEMAIN, F.; LABORDE, J.M. **Cabri-géomètre, un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie**. Logiciel et manuel d'utilisation, Cedic-Nathan Paris, 1988.

BELLEMAIN, F. Microworld agent: creating interface for specific object manipulation in multimedia systems, **EARLI SIG Meeting** on "multimedia comprehension". Poitiers (France), p.41-43, 2002.

BELLEMAIN, F. Reconhecimento de formas algébricas no ensino. In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática, 2, 2004, Rio de Janeiro. **Anais** [...] Rio de Janeiro: Editora: IME-UERJ, 2004, ISBN: 85-89498-02, p.155-162.

BELLEMAIN, F. **Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie, Cabri-géomètre**. 1992. Tese (Doutorado em Didáticas das Matemáticas) - Université Joseph Fourier, Grenoble, 1992.

BELLEMAIN, F.; RAMOS C. S.; dos SANTOS, R. T. Engenharia de Softwares Educativos, o caso do Bingo dos Racionais. In: VI SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis. **Anais** do VI SIPEM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2015. v. 1. p. 1-12.

BELLEMAIN, F.; TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor como recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. In: **LADIMA**, Nov. 2016, Bonito, Brasil, 2016.

BELLEMAIN, F.; LABORDE, J- M. **Cabri II**. An interactive Geometry notebook. Texas Instruments, 1994.

BROUSSEAU, G. **Théorie des Situations Didactiques**. Editions La pensée sauvage, 1998.

BROUSSEAU, G. **Théories des Situations Didactiques**. Conférence de Montreal, 1997. Disponível em: http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf. Acesso em: 01 maio 2021.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. n.9 v3 p. 309-336, 1988.

CAPPONI, B. **Calcul algébrique et programmation dans un tableur** : le cas de Multiplan. Modélisation et simulation. Thèse - Université Joseph-Fourier: Grenoble I, 1990.

CAPPONI, B.; LABORDE, C. Cabri-géomètre, un environnement pour l'apprentissage de la géométrie élémentaire. In: GRAS R. ed. **Actes** de la VIème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique, Plestin les grèves, p. 220-222, 1991.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, n.12 v1, p. 73-112, 1991.

CHEVALLARD, Y. Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Contribution à l'ouvrage dirigé par B. Cornu, **L'ordinateur pour enseigner les mathématiques**, p.183-203, 1992.

DOSSIER POUR LA SCIENCE QUAND LES MATHS PRENNENT FORMES, N° 91, AVRIL 2016.

DUVAL, R. **La conversion des représentations** : un des processus fondamentaux de la pensée, Du mot au concept. Conversion, Presses Universitaires de Grenoble, 2007.

DUVAL, R. Graphiques et équations : articulation de deux registres. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, IREM de Strasbourg, v. 1, p.235-254, 1988.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. **Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques**. In: GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Rennes: Paideia, 2010. p. 57-74.

HILBERT, D. Mathematical Problems. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 8(10), p. 437-479, 1902.

LABORDE, J-M.; BELLEMAIN, F. **Cabri Geometre II plus le CAhier de BRouillon Intéractif**. Grenoble: Cabrilog, 2001.

LABORDE, J. M.; LABORDE, C. Micromondes intelligents et environnement d'apprentissage. In: Bellissant C. ed. **Actes** des XIII Journées francophones sur l'informatique, Grenoble: IMAG & Université de Genève, p. 57-177, 1991.

MARGOLINAS, C. **Les débats de la didactique des mathématiques**. La Pensée Sauvage Éditions: Grenoble, p.89-102, 1995.

NOSS, R.; HOYLES, C. **Windows on mathematical meanings, learning cultures and computers**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.1996.

OLIVEIRA, P. B. de *et al*. O micromundo no ensino do teorema fundamental do cálculo: uma análise praxeológica. **Anais** do V CONAPESC. Campina Grande: Realize Editora, 2020. Disponível em: http://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/73056. Acesso em: 22 abr. 2021.

PAPERT, S. **Mindstorms**: children, computers and powerful ideas. Basic Books, New York. 1980.

RAMOS, C. S. **Princípios da engenharia de software educativo com base na engenharia didática**: uma prototipação do Bingo dos Racionais. 2015. f. 111. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

SILVA, A. D. P. R. **Prototipação, Desenvolvimento e Validação de um Micromundo com Suportes para o Ensino de Área e Perímetro**. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

SILVA, C. T. J. da. **A engenharia didático-informática na prototipação de um software para abordar o conceito de taxa de variação**. 2016. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

SILVA, A. R.; BELLEMAIN, F.; LAURENTINO, A. A integração da Abordagem Documental do Didático e um processo de Design para o desenvolvimento de uma plataforma de suporte ao ensino a distância. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23(3), p. 428-454, 2021.

SILVA, C. T. J.; GITIRANA, V.; BELLEMAIN, F.; TIBÚRCIO, R. dos S. Function Studium: concepção, desenvolvimento e validação de um software para abordar funções em uma perspectiva covariacional. **Perspectivas Da Educação Matemática**, v. 12(28), p. 245-271, 2019.

SIQUEIRA, J. E. de M. **Articulando os registros de representação semiótica das curvas cônicas através da integração de recursos computacionais**. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

SIQUEIRA, J. E. M.; BELLEMAIN, F. Articulando as representações algébricas e a geométrica das equações quadráticas a partir da noção de registros de representações semióticas de Duval. **EM TEIA**: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 3, p. 1-26, 2012.

TCHOUNIKINE, P. **Computer Science and Educational Software Design**: a resource for multidisciplinary work in technology enhanced learning. Ed. Springer, 2011.

THOMPSON, P.W. Mathematical microworlds and intelligent computer-assisted instruction. In: KEARSLEY, G. ed. **Artificial Intelligence & Instruction, applications and methods**, Addilson Wesley, p. 83-109, 1987.

TIBÚRCIO, R. S. **Processo de desenvolvimento de software educativo**: um estudo da prototipação de um software para o ensino de função. 2016. f. 112. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

TIBÚRCIO, R. S. **A Engenharia Didático-Informática**: uma metodologia para a produção de software educativo. 2020. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

TROUCHE, L. Construction et conduit des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, n.25 v.1, p. 91-138, 2005.

VERGNAUD, G. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, n.2, v2, p. 215-231, 1981.

WENGER, E. **Artificial Intelligence and Tutoring Systems**. Los Altos: Morgan Kaufmann Pub. Inc. 1987.

Recebido em: 08 de fevereiro de 2022
Aprovado em: 27 de julho de 2022