revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DE 2º GRAU VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA A PARTIR DE UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.28.427-446

Fernando Francisco Pereira[1]
Marcelo Carlos de Proença[2]

Resumo: O objetivo assumido neste artigo consiste em apresentar uma experiência de uso da Trajetória Hipotética de Aprendizagem no Ensino-Aprendizagem de Equações de 2º grau via Resolução de Problemas. Para isso construiu-se os referenciais teóricos sobre Trajetória Hipotética de Aprendizagem e o Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas, possibilitando traçar na metodologia uma Trajetória Hipotética de Ensino-Aprendizagem de Equações de 2º grau articulada em ambas as teorias. Tal trajetória foi aplicada em grupos de alunos do 9º ano. Os expostos constituíram-se dos registros das atividades desenvolvidas pelos alunos, dos questionamentos, dúvidas e resoluções que surgiram ao longo da proposta em articulação com as hipóteses elencadas *a priori*. Os resultados da articulação revelaram que: grande parte das atividades e incertezas dos alunos pode ser prevista e estabelecida soluções-base que amparam as explicações do professor; o problema como ponto de partida possibilita nortear e dinamizar o ensino de matemática atribuindo significado a aprendizagem do conteúdo articulando-o a um contexto.
Palavras-chave: Educação Matemática. Anos Finais do Ensino Fundamental. Práticas de Ensino.

TEACHING-LEARNING OF 2ND DEGREE EQUATIONS VIA PROBLEM SOLVING: AN EXPERIENCE BASED ON A HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY

Abstract: This paper assumed the objective of presenting an experience of using the Hypothetical Learning Trajectory in the Teaching-Learning of 2nd Degree Equations via Problem Solving. For this, theoretical references were built on Hypothetical Learning Trajectory and Teaching-Learning Mathematics via Problem Solving, making it possible to trace in the methodology a Hypothetical Trajectory of Teaching-Learning of 2nd degree Equations articulated in both theories. This trajectory was applied in groups of 9th grade students. The data consisted of questions, doubts and resolutions that were confronted with the hypotheses listed a priori. The results of the confrontation revealed that: a large part of the students' activities and uncertainties can be predicted and base-solutions established that support the teacher's explanations; the problem as a starting point makes it possible to guide and dynamize the teaching of mathematics, attributing meaning to the learning of the content, articulating it to a context.
Keywords: Mathematics Education. Final Years of Elementary School. Teaching Practices.

Introdução

Estudos como Anjos Filho (2017), Brito R., Branco e Brito E. (2019) e Gonçalves e

[1] Doutorando em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM-PR). Professor da rede particular de ensino de Londrina-PR. E-mail: fermatpereira@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2082-5416
[2] Doutor na área de Ensino de Ciências e Matemática pela Faculdade de Ciências da UNESP, campus de Bauru-SP. Professor Associado do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM). E-mail: mcproenca@uem.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6496-4912

Proença (2020) revelam que o ensino do conteúdo Equação de 2º grau com foco no trato de algoritmos resolutivos e memorização de fórmulas sem a devida compreensão conceitual contribuem para que os alunos apresentem erros relacionados ao reconhecimento de uma Equações de 2º grau e sua diferenciação a outra conceitos, ao uso incorreto de procedimentos algorítmicos e dificuldades na interpretação de situações de matemática contextualizadas.

Isso mostra a importância dos professores planejarem suas aulas a fim de direcionar seus alunos à aprendizagem da matemática (LOPES, 2014). Uma possibilidade para fundamentar esses planejamentos é a teoria das Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA) (SIMON, 1995) que, baseada na perspectiva construtivista, corresponde a um modelo teórico de pensamento pedagógico para o planejamento, criação e implementação de tarefas visando promover a aprendizagem conceitual de Matemática. Neste artigo, utilizamos a THA no ensino de Equações de 2º grau no processo do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP) de Proença (2018), o qual adota o problema como ponto de partida para a atividade matemática em sala de aula.

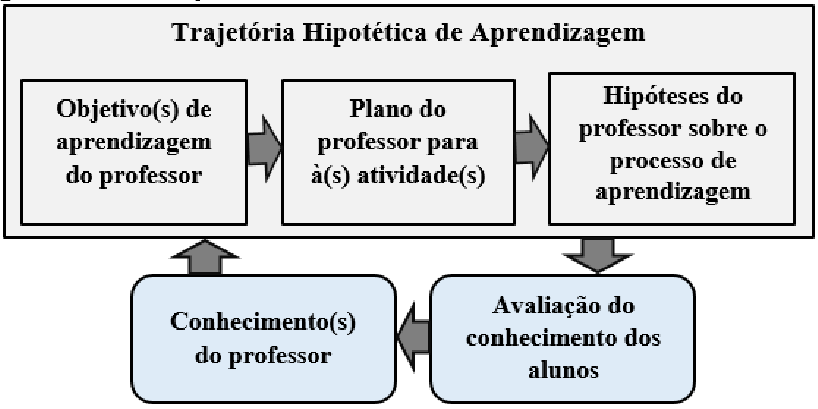
Na literatura científica, não encontramos estudos com uso da THA em meio a metodologias de ensino envolvendo resolução de problemas. Nesse sentido, o objetivo deste artigo é apresentar uma experiência de uso da Trajetória Hipotética de Aprendizagem no Ensino-Aprendizagem de Equações de 2º grau via Resolução de Problemas. O artigo constrói o referencial teórico acerca da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) e do Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP) e em seguida revela a metodologia, os resultados e as considerações finais.

Aspectos-chave da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA)

O conceito inicial de Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) surgiu em meados dos anos de 1990, a partir dos estudos de Simon (1995) sobre a aprendizagem conceitual de matemática a partir de perspectivas construtivistas de conceber o ensino. O autor explicou que o termo trajetória faz referência a um caminho que o professor irá percorrer após definir os objetivos, em outras palavras, o destino. O termo hipotética deriva do fato de que nesse caminho podem ocorrer imprevistos, de modo que há de início hipóteses que poderão ou não se confirmar, visto que a trajetória de aprendizagem efetiva e o que dela será derivado não pode ser conhecido de antemão.

No modelo teórico apresentado por Simon (1995), as THA sustentam-se sobre três componentes: o(s) objetivo(s) de aprendizagem do professor para o conteúdo (conceito) matemático; o plano do professor para a atividade matemática; as hipóteses do professor sobre o processo de aprendizagem dos alunos. Tais componentes constituem parte de um ciclo de ensino da Matemática, sendo que, ao implementar uma THA em sala de aula, podem surgir: novos conhecimentos matemáticos, novos objetivos de aprendizagem e novos conhecimentos sobre o processo de aprendizagem dos alunos. Dessa forma, isso possibilita que o professor revisite sua THA e estabeleça modificações em todos os componentes supracitados, dando origem a uma nova, mas agora revisada, trajetória (SIMON, 2014). Na Figura 1 é apresentada a abreviação do Ciclo de Ensino de Matemática em meio as THA.

Figura 1: Abreviação do ciclo de ensino de Matemática em meio as THA.



Fonte: Adaptado de Simon (1995).

Acerca dos três componentes constituintes de uma THA, Tzur (2019) afirma que: combinados, esses dois componentes, o(s) objetivo(s) de aprendizagem do professor para o conteúdo (conceito) matemático e as hipóteses do professor sobre o processo de aprendizagem dos alunos, constituem a transição conceitual hipotética, pois requer uma ligação que, antecipadamente, articule os objetivos da atividade aos resultados previstos, baseado na premissa de que novos conceitos matemáticos emergem através da reorganização de conceitos previamente disponíveis.

O segundo componente, o plano do professor para a atividade matemática, fornece orientação para interações professor-aluno na promoção dessa transição. Sintetizando, uma THA especifica um plano para promover a aprendizagem de um determinado conceito ou conjunto de conceitos relacionados, partindo de um objetivo de aprendizagem - o conceito a ser aprendido - uma sequência de tarefas instrucionais e um processo de aprendizagem hipotético (SIMON *et al*., 2018; ULFA; WIJAYA, 2019).

Quanto à seleção e articulação da(s) tarefa(s) na constituição de uma THA, Simon e

Tzur (2004) explicam que: 1) começa com a identificação de um objetivo de aprendizagem baseado no conhecimento do professor sobre o conhecimento matemático atual dos alunos. Esse objetivo pode ser visando uma parte conceitual elementar de um conteúdo mais amplo ou para sustentar novos objetivos que possibilitem continuidade com uma sequência de tarefas; 2) a escolha da(s) tarefa(s) de aprendizagem é a primeira hipótese a ser considerada pelo professor e exige uma reflexão sobre os efeitos que as atividades dos alunos ocasionarão na tarefa, visto o objetivo que se quer atingir. Para isso, baseia-se em possíveis estratégias e atividades que os alunos irão recorrer ou desempenhar, que sejam acessíveis ao conhecimento que eles já possuem; 3) após a escolha e preparação da(s) tarefa(s) de aprendizagem, deve-se considerar mais detalhadamente as hipóteses para o processo de aprendizagem. Junto a isso, deve-se discutir o objetivo de cada tarefa à luz de nossa antecipação da atividade dos alunos e de outras maneiras possíveis dos alunos realizarem a(s) tarefa(s).

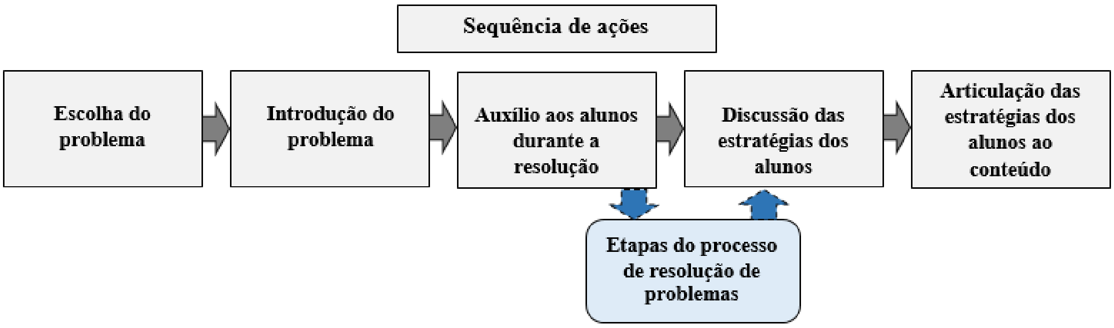
A escolha prévia das tarefas de aprendizagem e antecipação das estratégias dos alunos frente a um objetivo de aprendizagem conceitual faz parte de abordagens de ensino que têm o problema como ponto de partida para a atividade matemática. Tais propostas assumem uma postura construtivista de inserir o aluno no centro da ação. Por tal motivo, optou-se por seguir neste estudo o EAMvRP como cenário da aprendizagem de Equações de 2º grau.

Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas (EAMvRP)

Quanto ao ato de ensinar matemática e a relação com situações problemas, Hatfield (1978) identificou, com terminologias sutis, três distintas possibilidades de abordagens curriculares ou instrucionais, sendo: ensinar *para* resolução de problemas; ensinar *sobre* resolução de problemas; ensinar *via* resolução de problemas. Entretanto, a exploração de tais abordagens ocorreu apenas na pesquisa de Schroeder e Lester Jr. (1989) que as descreveram, respectivamente, com foco no: formar bons resolvedores de problemas, replicando sequentemente a matemática aprendida na resolução de exercícios ou situações de matemática; desenvolvimento de heurísticas, identificação de padrões, elaboração e execução de um plano; problema como ponto de partida para ensinar e aprender Matemática.

Pesquisadores brasileiros como Onuchic e Allevato (2011) e Proença (2018) concordaram com os apontamentos de Schroeder e Lester Jr. (1989) assumindo que o ensino *via* resolução de problemas configura-se como a abordagem mais propícia ao objetivo de ensinar matemática com fim de promover a aprendizagem conceitual significativa, requisitando a reorganização de conhecimentos prévios na construção de novos. Diante de tal abordagem, Proença (2018) propõe uma sequência de cinco ações para auxiliar professores em sala de aula: (1) Escolha do problema; (2) Introdução do problema; (3) Auxílio aos alunos durante a resolução; (4) Discussão das estratégias dos alunos; (5) Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo. A Figura 2 descreve essas ações.

Figura 2: Sequência de ações de ensino na abordagem de EAMvRP



Fonte: Adaptado de Proença (2018)

Na *Escolha do problema*, o professor deve escolher, elaborar ou reelaborar uma situação de matemática que direcione a utilização de conceitos já aprendidos na construção de novos. Junto a isso, deve-se elencar possíveis estratégias de resolução na busca de uma ou mais soluções. Na *Introdução do problema*, deve dividir os alunos em grupos, objetivando a troca de conhecimentos e possibilitar melhores condições de auxiliá-los. Deve entregar a situação e solicitar que resolvam como quiserem, utilizando seus conhecimentos. No *Auxílio aos alunos durante a resolução*, deve observar, incentivar e direcionar a aprendizagem dos alunos a partir do processo de resolução. Deve sanar dúvidas sobre termos desconhecidos ou compreensões matemáticas errôneas. Na *Discussão das estratégias dos alunos*, deve socializar as estratégias de resolução, elucidar equívocos conceituais atrelados à linguagem materna ou matemática e sintetizar o que foi aprendido. Por fim, na *Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo*, buscar articular os pontos centrais das estratégias dos alunos ao conceito que se objetiva ensinar (PROENÇA, 2018).

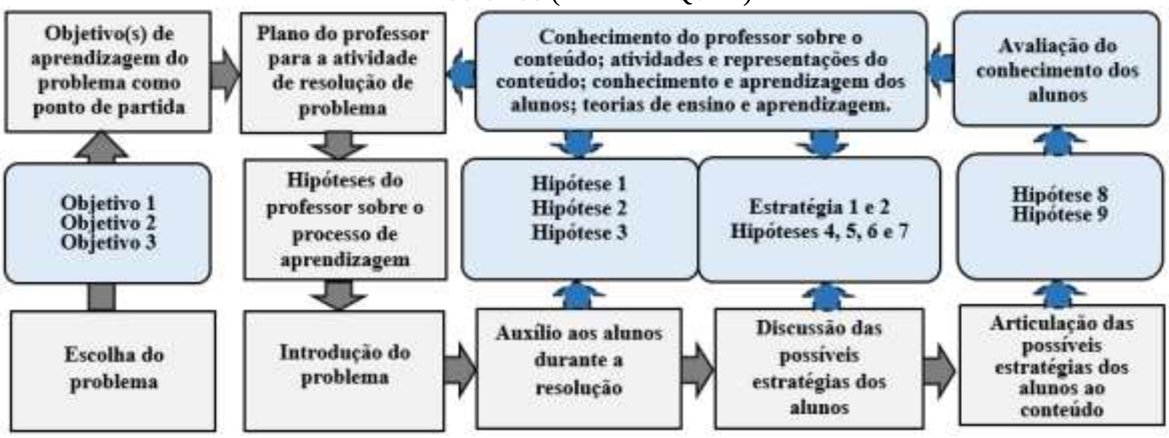
De acordo com a sequência de ações proposta por Proença (2018), conforme a Figura 2, nas terceira e quarta ações do EAMvRP, o processo de resolução seguido pelos grupos refere-se às etapas do pensamento dos alunos ao resolverem problemas. Proença (2018) apresenta quatro etapas, a saber: *Representação*, é a interpretação da pessoa da linguagem materna, da linguagem matemática e da natureza de conteúdo matemático envolvido (conhecimentos linguístico, semântico e esquemático, respectivamente); *Planejamento*, é a organização da representação do problema, estabelecendo um caminho lógico, verbal ou viso-pictórico que ao ser percorrido chegará na solução (conhecimento estratégico); *Execução*, é a execução do planejamento, o que implica no uso de procedimentos estratégicos - manipulação de termos algorítmicos, estabelecimento de relações quantitativas e espaciais (conhecimento procedimental); *Monitoramento*, é a verificação da coerência da resposta apresentada ao contexto do problema, identificação de equívocos e revisão da resolução (PROENÇA, 2018).

Diante do EAMvRP, verificamos que, ao escolher, elaborar ou reelaborar uma situação de matemática, o professor deve fazer o levantamento das possíveis estratégias dos alunos, consistindo de uma tarefa de suma importância. Essas e outras tarefas do professor ao longo das cinco ações requisitarão previsões que se configuram em hipóteses que o professor deve levantar durante a definição do objetivo de ensino-aprendizagem e planificação da atividade matemática, conforme já mencionado por meio de Simon (1995), Simon e Tzur (2004) e Tzur (2019).

Relato da abordagem em sala de aula

A abordagem em sala de aula, sustentando-se na estruturação de uma THA no contexto do EAMvRP como abordagem de ensino, articulou o conteúdo e aprendizagem a partir da nossa proposta de Trajetória Hipotética de Ensino-Aprendizagem de Equações de 2º grau via Resolução de Problemas (THEAE2GvRP), conforme revelado na Figura 3.

Figura 3: Trajetória hipotética de ensino-aprendizagem de Equações de 2º grau via Resolução de Problemas (THEAE2QvRP)



Fonte: Adaptado de Simon (1995) e Proença (2018)

A implementação da trajetória ocorreu em uma escola da rede privada de Londrina, Paraná, com cerca de noventa alunos do 9º ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental, divididos em três turmas, durante três horas/aula. Na análise e discussão, serão articulados os registros coletados da prática com as hipóteses levantadas durante a elaboração da THA, levando em consideração as cinco ações do EAMvRP de Proença (2018).

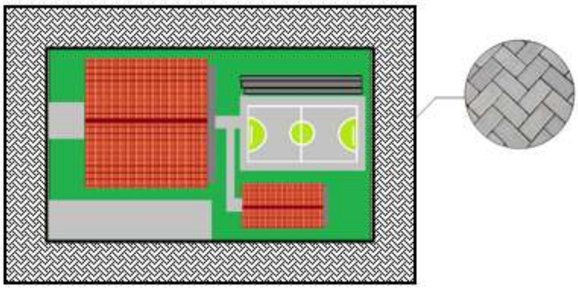
Escolha do problema

Quanto à escolha do problema, foi pautada nas recomendações da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), incumbindo ao professor propor uma prática de ensino que possibilite ao aluno "resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$" (BRASIL, 2018, p. 313). Portanto, o Quadro 1 apresenta o problema empregado como ponto de partida para a THEAE2GvRP.

Quadro 1: Problema empregado como ponto de partida.

"*Contra as enchentes, calçadas e praças com pisos permeáveis*" – Carlos Alberto Tauil, arquiteto.
Portal AECWeb - https://www.aecweb.com.br/cont/a/contra-as-enchentes-calcadas-e-pracas-com-pisos-permeaveis_2297

A manchete afirma que uma das causas de enchentes é a falta de impermeabilidade do solo nas cidades. Cada vez mais sem lugares para escoar e infiltrar, as águas das chuvas acabam por invadir residências e comércios causando caos e prejuízos. Pensando em formas simples, econômicas e que mantenham a acessibilidade, tem surgido a tendência de trocar o concreto tradicional das calçadas e praças por blocos de concretos intertravados, também conhecidos por *pavers*, os quais possibilitam, entre seus encaixes, o acréscimo de areia que por sua vez permitirá a impermeabilização da água.
Agora, imagine que você esteja no lugar de um engenheiro que foi contratado por uma escola. Essa escola pretende instalar *pavers* ao longo de toda a calçada externa que a rodeia com o objetivo de amenizar o risco de enchente e melhorar a acessibilidade.



Analisando a planta com vista superior da escola, sabe-se que o terreno ocupado por ela é de 8000m², cujas dimensões estão numa proporção de 4 para 5, e que a calçada em todo o terreno dista 5m entre o muro e o meio-fio (sarjeta). Que quantidade de *pavers* em m² será necessária para revitalizar o calçamento ao redor dessa escola?

Fonte: os autores.

A definição dos *Objetivos de aprendizagem específicos do problema como ponto de partida* baseou-se de forma geral nas recomendações da BNCC (2018), entretanto foram adaptados de acordo com as requisições do problema, vindo a constituírem em: 1º - Explorar diferentes formas de resolver uma situação problema em um contexto diverso; 2º - Resolver uma situação problema que possa ser representada por uma equação de 2º grau; 3º - Discutir e articular as diferentes resoluções ao conceito inicial de equação de 2º grau.

Quanto ao *Plano do professor para a atividade de resolução de problema*, baseou-se nas recomendações de Proença (2018), de ações subsequentes, resultando em: 1) Dispor os alunos em grupos, apresentar a situação e solicitar que resolvam como quiserem; 2) Observar, incentivar, direcionar e, se necessário, sugerir caminhos de resolução; 3) Discutir as resoluções buscando elucidar dúvidas e clarificar os erros cometidos; 4) Estabelecer a articulação da estratégia ao conteúdo matemático.

Embora Simon e Tzur (2004) inferem que a escolha da tarefa de aprendizagem é a primeira hipótese a ser considerada pelo professor, não foram previstas hipóteses para a ação de escolha do problema, visto os objetivos determinados.

Introdução do problema

Considerando a descrição feita por Proença (2018) quanto à introdução do problema, os alunos foram divididos constituindo ao todo quinze grupos. As atividades impressas foram entregues aos grupos e solicitado que resolvessem conforme achassem conveniente. A *priori* não foram previstas hipóteses para a ação de introdução do problema junto a THA, visto a característica descritiva dessa ação conforme já apontado por Proença (2018), entretanto, questionamentos e dificuldades que suscitam hipóteses foram tecidos pelos alunos e tiveram que ser respondidos pelo professor sem previsão.

- **Questionamento dos alunos:** *Cada grupo tem que fazer a mesma resolução?*
- **Resposta do professor:** *Não, vocês devem discutir em grupo e a resolução deverá ser feita de acordo com o conhecimento de todos.*
- **Questionamento dos alunos:** *É uma competição então?*
- **Resposta do professor:** *Não, mas vocês devem se esforçar para resolver, pois os outros grupos farão o mesmo.*
- **Questionamento dos alunos:** *Pode cada um fazer sozinho e depois juntar as resoluções?*
- **Resposta do professor:** *Seria interessante que vocês resolvessem em grupo, mas se vocês preferem, podem fazer separado e discutir as resoluções depois até chegar em uma resolução final, do grupo.*
- **Questionamento dos alunos:** *É de algum conteúdo que a gente já estudou? Pode*

utilizar algum cálculo do caderno?

- **Resposta do professor:** *Não sei, depende, será que você consegue resolver utilizando tudo que conhece? Se conseguir, então é porque já estudaram. E é preferível que não use o caderno, mas vocês podem consultar uns aos outros.*
- **Questionamento dos alunos:** *Vai valer nota? Como que vai ser a avaliação? Cada um tem que fazer a resolução numa folha diferente?*
- **Resposta do professor:** *Não, vocês devem discutir em grupo e a resolução deverá ser feita de acordo com o conhecimento de todos. Se vai valer nota ainda não sei, pode ser que em algum momento sim, mas de qualquer forma vou avaliar o que fizerem e a participação de vocês.*

Alguns pontos centrais dos questionamentos dos alunos durante essa ação possibilitam levantar hipóteses *a posteriori* que certamente auxiliarão o professor a refletir e promover a avaliação de práticas futuras. Diante dos questionamentos, o professor recorreu a conhecimentos da prática relacionados aos alunos e suas aprendizagens. Portanto, na ação de *Introdução do problema*, há a necessidade de se levantar hipóteses sobre a dinâmica do trabalho em grupo em atividades de resolução de problemas, considerando desde a leitura da situação até estratégias de resolução e tomadas de decisão em consenso.

Auxílio aos alunos durante a resolução

Conforme descrito na THEAE2GvRP (Figura 3), foi previsto para essa ação três hipóteses sobre as possíveis resoluções, dificuldades, dúvidas e a aprendizagem dos alunos. Nesta ação, segundo Proença (2018), o professor, como incentivador e direcionador, deve auxiliar os alunos em suas dúvidas referentes à interpretação dos dados fornecidos e na construção de estratégias que possibilitem uma solução. Nela, os alunos se desempenham nas etapas de resolução de problemas – Representação, Planejamento, Execução e Monitoramento – as quais requisitam os conhecimentos linguísticos, semânticos, esquemáticos, estratégicos e procedimentais. Diante da conexão com a teoria de Simon (1995), hipóteses relacionadas aos conhecimentos mobilizados foram construídas a partir das estratégias previstas.

No Quadro 2, tanto hipóteses quanto soluções-base apresentadas subsequente referem-se a dúvidas ou dificuldades atreladas aos conhecimentos linguístico e semântico dos alunos que eram esperados na prática.

Quadro 2: Hipóteses 1, 2 e 3 e suas respectivas soluções-base.

Hipótese	Solução-base
Hipótese 1: Os alunos podem não compreender que a expressão "instalar *pavers*" trata-se da ação de cobrir uma determinada área compreendida através das expressões "ao longo" e "rodeia" como o contorno envolta do terreno da escola (Conhecimento linguístico).	O professor pode auxiliá-los recorrendo ao significado de cada palavra, sinônimos ou exemplificações frente à ação requisitada no contexto da situação.
Hipótese 2: Os alunos podem não compreender que a expressão "as dimensões estão numa proporção de 4 para 5" trata-se de uma região retangular em que a medida da largura equivale a quatro quintos do comprimento (Conhecimento semântico).	O professor pode auxiliá-los recorrendo à lousa e apresentado um exemplo de segmentos de retas ou figuras retangulares que sejam semelhantes retomando o conceito de proporcionalidade, assim como as frações e porcentagens como exemplos de razões proporcionais.
Hipótese 3: Os alunos podem compreender que a expressão "terreno ocupado" trata-se da área retangular externa e não apenas a interna onde a escola está inserida, além de não compreenderem que "dista" caracteriza uma distância ou medida com origem e extremidade (Conhecimento semântico).	O professor pode realizar uma leitura explicativa aos alunos da sentença de modo a caracterizar quando estaria referindo-se à área da escola e quando a referência seria à área externa à escola (geral). Quanto a expressão dista o professor poderia utilizar uma representação através de um segmento de reta que represente uma certa distância.

Fonte: os autores.

Quanto às dúvidas relacionadas ao conhecimento linguístico, de modo geral, foram:

- **Questionamento dos alunos:** *O que é sarjeta? Onde é a distância entre o muro e a sarjeta? Calçamento é perímetro?*

Conforme previsto na hipótese 1, Quadro 2, o professor sustentou-se na solução-base de recorrer ao significado da palavra sarjeta como sendo o meio fio ou a divisa entre o muro e a rua, e que essa área é o que conhecemos como calçada. Tal justificação se mostrou solução para dúvidas correlatas às três supracitadas.

Quanto às dúvidas acerca do conhecimento semântico, de modo geral, na prática foram:

- **Questionamento dos alunos:** *Proporção é o quê? Porque acho que estou confundindo com porcentagem? O que significa 5 para 4? Significa que um é múltiplo de 4 e outro de 5? Descobrir a área da escola vai ajudar na resolução? Área ocupada pela escola inclui a área de fora? Essa área de 8000 m² é do retângulo de fora, o grande, ou do de dentro?*

Conforme previsto nas hipóteses 2 e 3, Quadro 2, o professor já estava munido de algumas soluções-base que poderiam auxiliá-lo na resposta aos questionamentos. Assim, recorreu-se à apresentação de exemplos de duas medidas, como as paredes da sala, que estariam em uma determinada proporção. Salientou que as porcentagens são exemplos de proporcionalidade e que poderiam sim fazer parte do contexto do problema. Fez a leitura explicativa e salientou que atrelassem a leitura ao desenho, observando qual é a área ocupada pela escola e a área geral e a relação de ambas na solução do problema.

Para previsão de dúvidas relacionadas aos conhecimentos esquemático, estratégico e procedimental, não foram criadas soluções-base, pois considerando os apontamentos de Simon e Tzur (2004), diante do objetivo a ser atingido baseou-se nos efeitos que as atividades dos alunos ocasionariam na tarefa e nos conhecimentos que eles já possuíam, para basear as possíveis estratégias e procedimentos que eles recorreriam ou desempenhariam. Portanto, dois processos de resolução foram previstos como hipóteses e detalhados. Na Figura 4, encontra-se o detalhamento do processo de resolução 1 que se considerou como uma hipótese.

Figura 4: Hipótese do processo de resolução 1 a ser realizado pelos alunos.

Estratégia de resolução: fazer um quadro com possíveis valores para as dimensões (tentativa e erro).

i. Área retangular = Largura x Comprimento → 8000 = Largura x Comprimento

ii. A largura equivale a 4/5 do comprimento ou 80% (80/100) do comprimento

Largura	**x**	**Comprimento**	**=**	**8000**	**Justificativa**
200	x	40	=	8000	Não está na proporção
40	x	200	=	8000	Não está na proporção
100	x	80	=	8000	Não está na proporção
80	x	100	=	8000	Está na proporção

Se as dimensões da área ocupada pela escola são 80 x 100 e a calçada ao redor tem 5m, então as dimensões do quarteirão serão: 80 + 5 + 5 = 90m e 100 + 5 + 5 = 110m, fornecendo uma área de 90 x 110 = 9900m².

Resposta: A quantidade de paver em m² necessária será de 9900 – 8000 = 1900m².

Fonte: os autores.

O processo de resolução 1 envolve o reconhecimento da área de uma região retangular (conhecimento esquemático), portanto, comprimento x largura, assumindo a estratégia de elaborar uma tabela ou lista com possíveis valores para as dimensões. A partir daí, conduzir o procedimento de multiplicá-los, resultando no valor das dimensões que auxiliarão na determinação da solução.

Da sala de aula, possibilitou solucionar dúvidas como:

- **Questionamento dos alunos:** *Como é área então basta eu fazer a raiz quadrada de 8000 para descobrir o valor do lado? (Conhecimento esquemático e conhecimento estratégico).*
- **Questionamento dos alunos:** *Se eu falar que é 200 por 40, seria desproporcional não é? Então é só diminuir o 200 e aumentar o 40! (Conhecimento estratégico).*

- **Questionamento dos alunos:** *Se nós ficarmos chutando valores que multiplicados deem 8000, então uma hora a gente vai achar os dois lado não é? Podemos pegar um valor menor e ver se vai funcionar. Tipo o 80 ou 800 ao invés de 8000? (Conhecimento procedimental).*

Os questionamentos tecidos pelos alunos foram solucionados pelo professor a considerando o detalhamento do processo de resolução 1 (Figura 4) como hipótese que previa o cerne dos conhecimentos a serem desempenhados pelos alunos.

Do mesmo modo, na Figura 5, encontra-se o detalhamento do processo de resolução 2 que se considerou como uma hipótese.

Figura 5: Previsão do processo de resolução 2 a ser realizado pelos alunos.

Estratégia de resolução 2: estabelecer um sistema de equações com duas incógnitas envolvendo soma e produto.

i. Área retangular = Largura x Comprimento → $L \times C = 8000$

ii. A largura equivale a 4/5 do comprimento → $L = \frac{4}{5}C$

Substituindo ii em i temos,

$(\frac{4}{5}C)C = 8000$

$\frac{4}{5}C^2 = 8000$ → aplicando o princípio multiplicativo

$4C^2 = 5(8000)$

$4C^2 = 40000$ → aplicando o princípio multiplicativo

$C^2 = 10000$ → aplicando a propriedade da radiciação, $\sqrt{a} = b, \text{então } b^2 = a$

$C = \pm\sqrt{10000}$

C = 100m → substituindo C em i temos,

$L \times 100 = 8000$ → aplicando o princípio multiplicativo

$L = \frac{8000}{100}$

L = 80m

Se as dimensões da área ocupada pela escola são 80 x 100 e a calçada ao redor tem 5m, então as dimensões do quarteirão serão: 80 + 5 + 5 = 90m e 100 + 5 + 5 = 110m, fornecendo uma área de 90 x 110 = 9900m².

Resposta: a quantidade de *paver* em m² necessária será de 9900 – 8000 = 1900m².

Fonte: os autores.

Da sala de aula, apenas um grupo entre todos os outros realizou procedimento semelhante ao esperado pelo professor no processo de resolução 2 (Figura 5). O grupo representou as duas sentenças informativas do problema como equações e assim formou um sistema que envolvesse a soma e produto de dois valores, ou seja, as dimensões da área. Procederam com os princípios aditivos e multiplicativos e com a propriedade da radiciação na determinação dos valores das dimensões que os auxiliaram na determinação da solução.

Durante o processo resolutivo, não realizaram questionamentos, embora foram constatadas dificuldades em algumas manipulações operatórias que serão discutidas na próxima ação.

Discussão das estratégias dos alunos

Na ação de *Discussão das estratégias dos alunos*, as estratégias previstas pelo professor nos processos de resolução 1 e 2, Figuras 4 e 5, e as hipóteses abaixo apresentadas serão confrontadas com as estratégias realizadas pelos alunos em sala de aula. Sequentemente, no Quadro 3 são apresentadas as hipóteses e soluções-base consideradas para ambos os processos resolutivos.

Quadro 3: Hipóteses 4, 5, 6 e 7 e suas respectivas soluções-base.

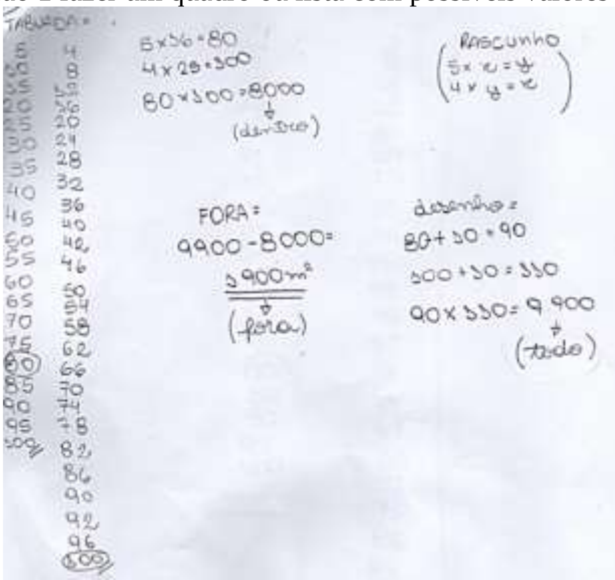
Hipótese	Solução-base
Hipótese 4: Os alunos podem não compreender que a proporção 4/5 é equivalente a 80/100.	Caso os alunos que recorram a ambos os processos de resolução 1 e 2 (fazer um quadro ou lista com possíveis valores para as dimensões - tentativa e erro; estabelecer um sistema de equações com duas incógnitas envolvendo soma e produto) não compreendam a proporção 4/5 como equivalente a 80/100, o que facilitaria a resolução, o professor pode questioná-los através de exemplos correlatos de equivalência entre frações.
Hipótese 5: Os alunos podem não compreender que o valor de 9900m² refere-se a área retangular externa e acreditar que se trata da solução da situação problema.	Caso os alunos que recorram ao processo de resolução 1 apresentem como solução da situação problema o valor de 9900m², o professor poderá estimulá-los a refletir sobre a indagação final do enunciado perguntando: O que a situação problema deseja que respondemos? Assim esperamos que os alunos atentem a expressão “ao redor” e associem a ação matemática de subtração de áreas.
Hipótese 6: Em ambos os processos de resolução, os alunos podem erroneamente acreditar que a largura de 100m e o comprimento de 80m estão corretos, por satisfazem a sentença matemática e solucionarem parcialmente a situação problema.	Caso os alunos que recorram a ambos os processos solucionem parcialmente a situação problema a partir das medidas de 100m e 80m respectivamente para a largura e o comprimento, o professor deve orientá-los que embora tenham apresentado uma solução para a situação, matematicamente, atentando para o conhecimento semântico, tais valores não satisfazem paralelamente a sentença expressa por “cujas dimensões estão numa proporção de 4 para 5”, logo têm-se uma compreensão equivocada.
Hipótese 7: Os alunos que recorrerem ao processo de resolução 2 (estabelecer um sistema de equações com duas incógnitas envolvendo soma e produto) podem apresentar dificuldades na aplicação do princípio multiplicativo logo na	Caso os alunos que tenham recorrido ao processo de resolução 2 apresentem as dificuldades levantadas na hipótese, o professor poderá recorrer à apresentação de exemplos que esclareçam o princípio multiplicativo como uma

primeira passagem, visto tratar-se de uma fração (4/5), além de esquecer de efetuar a substituição da primeira incógnita descoberta em uma das equações iniciais com objetivo de determinar a segunda incógnita.	divisão de frações. Além de relembrá-los quanto ao algoritmo do método da substituição empregados nos anos anteriores em sistemas lineares.

Fonte: os autores

Da sala de aula, ocorreram ambos os processos de resolução previstos pelo professor, entretanto apenas um grupo conduziu a resolução recorrendo à definição de incógnitas e o equacionamento das sentenças verbalmente apresentadas no problema. Todas as resoluções, após auxílio do professor aos grupos, foram registradas na lousa para que pudessem ser socializadas, conforme aponta Proença (2018). A Figura 6 mostra a resolução de um dos grupos que conduziu o processo semelhante ao previsto pelo professor.

Figura 6: Resolução 1 fazer um quadro ou lista com possíveis valores para as dimensões.

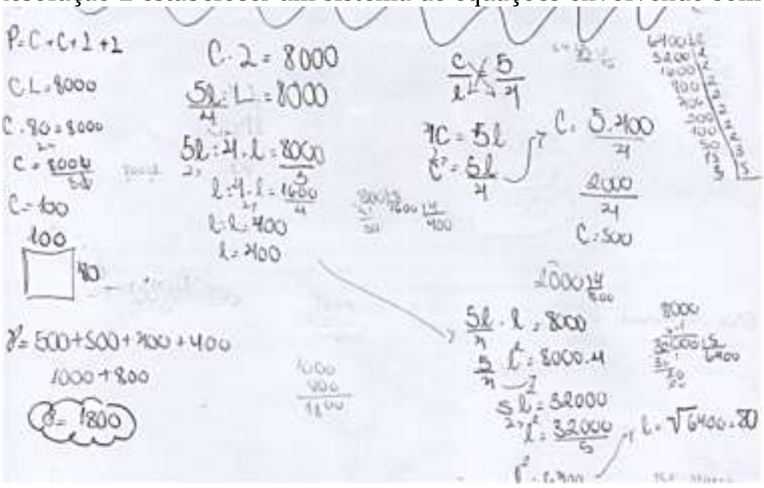


Fonte: os autores.

Nota-se que, embora os alunos compreendam que há outros valores para as dimensões que os tornam proporcionais, ao elaborar a lista com os possíveis valores do comprimento e da largura, respectivamente, os alunos circulam o 80 para a primeira dimensão e o 100 para a segunda, apenas por satisfazer o produto 8000. Esse fato foi previsto pela hipótese 6, assim o professor recorreu à solução-base que consistia em orientá-los que embora tenham apresentado uma solução parcial para a situação da área da escola, matematicamente, tais valores não satisfazem paralelamente a sentença que corresponde à proporção de 4 para 5, mas sim a de 5 para 4 e isso não seria possível visto a representação visual da situação. Os alunos e os demais grupos com resoluções semelhantes compreenderam e realizaram um registro evidenciando a troca dos valores.

Na Figura 7 encontra-se a resolução do grupo que seguiu processo semelhante ao previsto pelo professor.

Figura 7: Resolução 2 estabelecer um sistema de equações envolvendo soma e produto.



Fonte: os autores.

Nota-se ao centro que os alunos definiram por C o comprimento e L a largura, equacionaram as duas sentenças verbais presentes no problema (C × L = 8000 e C = 5/4 L) e realizaram a substituição da incógnita C. Entretanto, ao realizarem a manipulação fracionária que requisitava a multiplicação pelo inverso de 5/4, os alunos não realizaram corretamente, culminando nos valores de 500 e 400 para as dimensões. Ao perceberem que não solucionava a situação final, requisitaram ajuda. Tal fato era esperado pela hipótese 7, o professor recorreu à solução-base correspondente e apresentou exemplos correlatos envolvendo o princípio multiplicativo e a divisão de frações. Assim o grupo pôde reorganizar o processo e concluir a resolução correta que chegou nos valores de 100 e 80. Já os demais grupos observaram que havia outra possibilidade de resolução distinta da planejada pela maioria.

Articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo

Diante dos pressupostos de Simon (1995) e Tzur (2019), baseando na premissa de que novos conceitos matemáticos emergem através da reorganização de conceitos previamente disponíveis e compreendendo que esse é o momento em que o professor, segundo Proença (2018), deve atentar para pontos centrais das estratégias dos alunos e estabelecer conexões com o conteúdo, foram previstas para a *Articulação das estratégia dos alunos ao conteúdo* duas hipóteses e suas respectivas soluções-base que são apresentadas no Quadro 4.

revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

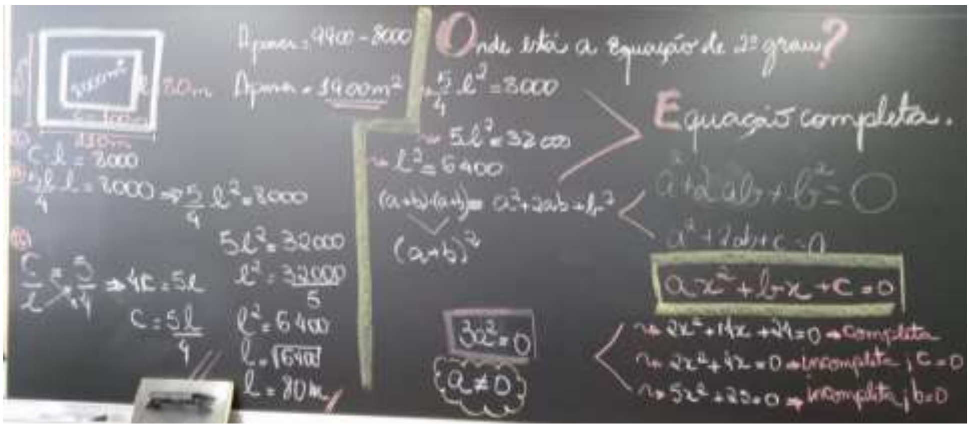
Quadro 4: Hipóteses 8 e 9 e suas respectivas soluções-base.

Hipótese	Solução-base
Hipótese 8: os alunos que recorrerem ao processo de resolução 1 (fazer uma lista ou quadro com possíveis valores para as dimensões - tentativa e erro) podem não compreender que no esquema de lista ou quadro esteja expresso duas equações matemáticas e que atribuir valores que satisfaçam ambas equivaleriam a uma sistematização, culminando em uma equação incompleta do 2º grau do tipo $ax^2 = b$.	O professor poderá utilizar-se da tabela ou da lista e representar as informações de modo simbólico, atribuindo letras representativas ao lugar das palavras (comprimento c e largura l) definindo a primeira e a segunda condição através de equações de duas incógnitas, sistematizá-las recorrendo ao conhecimento prévio dos alunos sobre sistemas lineares e o método da substituição, para então apontar que a situação pode ser representada simbolicamente como uma equação de 2º grau incompleta em uma única incógnita.
Hipótese 9: caso os alunos não recorram ao processo de resolução 2 (estabelecer um sistema de equações com duas incógnitas envolvendo soma e produto) ou apresentem indícios de uso da estratégia, mas não reconheçam tratar-se de uma equação de 2º grau incompleta (conforme visto no 8º ano ao estudar os polinômios e produtos notáveis).	O professor poderá seguir articulação conforme explicado na hipótese 9, atentando para a expressão $(C + 100)(C - 100) \Rightarrow C^2 - 10000 = 0 \Rightarrow C^2 = 10000$ e questioná-los quanto ao sentido da igualdade para representar uma equação e a incógnita (letra) com expoente 2 para representar o grau dessa equação, conforme visto ao estudar os polinômios e produtos notáveis, portanto trata-se de um equação de 2º grau incompleta, visto faltar o termo cuja incógnita possui expoente 1.

Fonte: os autores.

Decorrente da implementação em sala de aula, serão apresentadas duas distintas articulações das estratégias dos alunos ao conteúdo. Na Figura 8, é apresentada a primeira articulação, onde os grupos recorreram a estratégias semelhantes ao processo de resolução 1 (fazer uma lista ou quadro com possíveis valores para as dimensões).

Figura 8: Articulação da estratégia de fazer uma lista ou quadro com possíveis valores para as dimensões do conteúdo.



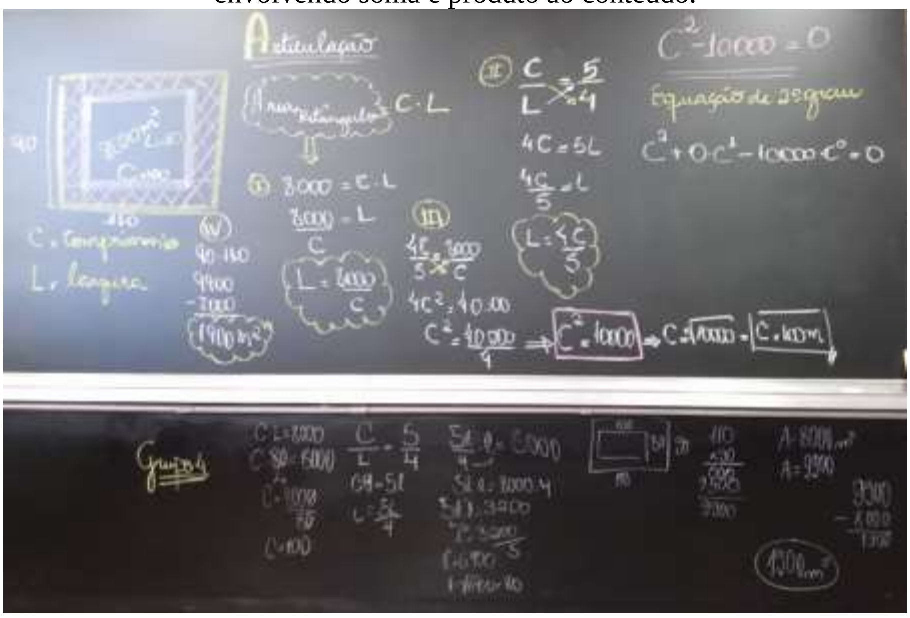
Fonte: os autores.

Observa-se que a estratégia recorrida para a articulação é a prevista pela hipótese 8, Quadro 4, e sua solução-base como forma de condução. O motivo resulta do fato dos grupos terem recorrido à estratégia de elaborar uma tabela e atribuir valores para ambas as dimensões, compreendendo-a e desenvolvendo-a corretamente, entretanto, após socialização, não compreenderam que o esquema empregado poderia ser equacionado e resolvido de outra forma. Assim, atribuiu-se letras C e L às dimensões e definiu-se a primeira e a segunda condição através de equações de duas incógnitas, sistematizou-se considerando os conhecimentos prévios de sistemas lineares e o método da substituição. Ao fim, os alunos foram indagados a responderem onde encontravam-se as representações de uma Equação de 2º grau. Foram apontadas três representações equivalentes ($5/4\ L^2 = 800$; $5\ L^2 = 32000$; $L^2 = 6400$) alegando serem incompletas.

Sequencialmente, alguns alunos se propuseram a apresentar a representação simbólica de uma Equação de 2º grau completa ($a^2 + 2ab + b^2 = 0$; $a^2 + 2ab + c = 0$, *representação dos alunos*), de modo que o professor articulou ambas as expressões incorretas ao conceito de produto notável (produto da soma), visto aspectos semelhantes, e ao que seria a representação correta ($ax^2 + bx + c = 0$). Na sequência, para verificar a aprendizagem dos alunos, solicitou que ditassem exemplos de equações completas e incompletas para compreenderem que o coeficiente a deve ser diferente de zero para efetivamente ter uma Equação de 2º grau.

A Figura 9 mostra a segunda articulação, que ocorreu com outra turma, em outra sala de aula, onde um dos grupos seguiu uma estratégia semelhante ao processo de resolução 2 (estabelecer um sistema de equações com duas incógnitas envolvendo soma e produto).

Figura 9: Articulação da estratégia de estabelecer um sistema de equações com duas incógnitas envolvendo soma e produto ao conteúdo.



Fonte: os autores.

Na segunda articulação, mesmo após socialização os alunos não evidenciaram compreensão de que haviam acabado de resolver um problema de Equação de 2º grau, conforme era previsto na hipótese 9, Quadro 4. Portanto, procurou-se manter na lousa a resolução feita pelo grupo e então resolvê-la com procedimento semelhante para evidenciar dois aspectos: o primeiro, que indiferente da incógnita ou equação que é feita a substituição, os resultados serão os mesmos; e o segundo que foi atribuir ênfase nos procedimentos finais onde fica evidente a representação de Equações de 2º grau. Embasado na solução-base da hipótese 9, atentou-se para o fato de que expressão $(C + 100)(C - 100) \Rightarrow C^2 - 10000 = 0 \Rightarrow C^2 = 10000$ e então os alunos foram questionados se a expressão final tratava-se de uma Equação de 2º grau, esperando que observassem o maior expoente da incógnita (letra). Ao questionarem o porquê de a equação parecer "pequena", o professor solicitou que ditassem a forma como ela ficaria se ela fosse "grande", aproveitando para representá-la na forma geral sem recorrência a incógnita x, conforme conceituação usual.

Algumas considerações

Como considerações pertinentes, salientamos que, conforme afirmam Simon (1995) e Tzur (2019), as hipóteses são previsões feitas pelo professor antes de adentrar no cenário da prática de sala de aula, por isso não é possível antever todos os imprevistos associados à aprendizagem dos alunos. Entretanto, o confronto entre as hipóteses levantadas em nossa trajetória e os questionamentos dos alunos, oriundos da sala de aula, mostrou que é possível antecipar um número considerável de dúvidas e elencar soluções-base que auxiliarão o professor a conduzir os alunos à aprendizagem de conceitos de forma clara, bem planejada e eficaz.

Para isso, ressaltamos que os conhecimentos do professor quanto ao conteúdo, suas representações, os processos de aprendizagem específicos dos alunos e conhecimentos curriculares do conteúdo – o que de modo geral Shulman (1986) chama de Base de Conhecimento para o Ensino, Ball, Thames e Phelps (2008) de Conhecimento Especializado para ensinar Matemática, Carrillo *et al*. (2013) de Conhecimento Matemático Especializado para Ensinar Matemática – estão intrinsecamente relacionados ao processo de determinar os objetivos da aprendizagem, planificá-la e levantar hipóteses sobre ela, constituindo uma trajetória.

Quanto à abordagem de EAMvRP, baseado em Proença (2018), notou-se que a organização em ações possibilita nortear o professor pela trajetória, apresentando aportes descritivos para que a proposição inicial do problema trilhe um caminho bem definido até a articulação com o conceito ou conteúdo que desde o início objetivou-se ensinar. Entretanto, cabe ressaltar, a partir da experiência vivida e a ausência de previsão para os questionamentos encontrados, que é imprescindível a construção de hipóteses para as ações iniciais de *Escolha do problema* e *Introdução do problema*, principalmente em relação ao trabalho em grupo, compreendido desde a leitura e resolução da situação até o consenso da solução. Quanto ao conteúdo, acreditamos que sua exploração inicial por meio de um problema, em sala de aula, ao contrário do que ocorre no ensino tradicional, contribuiu para que os alunos compreendessem o sentido de algumas articulações possíveis entre o contexto e o conteúdo, por exemplo uma situação de área, envolvendo o uso de *pavers* e impermeabilidade do solo na prevenção de enchentes, e as Equações de 2º grau.

Referências

ANJOS FILHO, O. C. dos. **Propostas de aulas na educação básica de alguns conceitos matemáticos visando seu contexto histórico e aplicações nos dias atuais**. 2017. 119 f Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of teacher education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é base. Brasília, 2018.

BRITO, R. G. S. de; BRANCO, M. N.; BRITO, E. M. S. de. Dificuldade de estudante em resolver equação quadrática no ensino médio: uma pesquisa quantitativa. **Science and Knowledge in Focus**, v. 2, n. 1, p. 05-17, 2019.

CARRILLO, J. *et al*. Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In: UBUZ, B.; HASER, C.; MARIOTTI, M. A. (Eds.), **VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 8**, 2013. p. 2985-2994.

GONÇALVES, B. M.; DE PROENÇA, M. C. Análise dos conhecimentos conceitual e procedimental de alunos do primeiro ano do Ensino Médio sobre equação do 2º grau. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 5, n. 2, p. 209-228, 2020.

HATFIELD, L. Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: Rationales and research. In: **Mathematical problem solving**: Papers from a research workshop. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, 1978. p. 21-42.

LOPES, A. O. Planejamento de ensino numa perspectiva crítica da educação. In: VEIGA, I. P.

A. (Coord.). **Repensando a didática**. Campinas: Papirus, 2014, p. 55-66.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

PROENÇA, M. C. **Resolução de Problemas**: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. Maringá: EdUEM, 2018.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing understanding in Mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Org.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard educational review**, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

SIMON, M. A. Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. **Encyclopedia of Mathematics Education**, 2014, p. 272–275.

SIMON, M. A.; TZUR, R. Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 6, n. 2, p. 91-104, 2004.

SIMON, M. A. et al. Towards an integrated theory of mathematics conceptual learning and instructional design: The Learning Through Activity theoretical framework. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 52, p. 95–112. 2018.

TZUR, R. Hypothetical learning trajectory (HLT): A lens on conceptual transition between mathematical “markers”. In: SIEMON, D.; BARKATSAS, T.; SEAH, R. **Researching and using progressions (trajectories) in mathematics education**. Brill, 2019. p. 56-74.

ULFA, C.; WIJAYA, A. Expanding hypothetical learning trajectory in mathematics instructional. **Journal of Physics**: Conference Series. v. 1320, n. 1, p. 012091, 2019.

Recebido em: 13 de julho de 2022
Aprovado em: 12 de fevereiro de 2023