revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 10 ANOS

TRINCAS PITAGÓRICAS E NÚMEROS FIGURADOS: UM ENFOQUE HISTÓRICO PARA O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.24.505-526

Augusto Mendes Duarte[1]
Fábio Seidi Osiro Yamamoto[2]

Resumo: Objetivando articular História da Matemática, Resolução de problemas, uso de materiais manipuláveis e de recursos digitais, foi construída uma proposta didática em torno da origem aritmética do Teorema de Pitágoras. O projeto ocorreu em quatro turmas do nono ano do Ensino Fundamental de uma escola particular de São Paulo, durante quatro aulas ministradas ao longo de uma semana. Cada turma continha em torno de 20 alunos com aproximadamente 14 anos. Por meio de uma exposição dialogada sobre o contexto histórico em que se encontravam os pitagóricos, os discentes experienciaram um processo de investigação análogo ao da doutrina pitagórica. Dispostos em grupos e utilizando fichas coloridas, investigaram os números figurados e resolveram problemas direcionadores. As conclusões foram discutidas em plenária e os novos conceitos foram formalizados e contextualizados historicamente. Para facilitar a visualização de situações históricas e conceitos recém descobertos, animações previamente desenvolvidas pelos professores foram utilizadas. Considera-se que a articulação dos recursos utilizados favoreceu o aspecto motivacional da aprendizagem bem como a formação de conceitos e de procedimentos relativos ao Teorema de Pitágoras. Tais resultados positivos foram evidenciados tanto pelas resoluções e interações em plenária quanto através das soluções apresentadas por escrito.
Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; História da Matemática; Resolução de Problemas; Materiais Manipuláveis.

PYTHAGOREAN TRIPLES AND FIGURATE NUMBERS: A HISTORICAL APPROACH TO TEACHING THE PYTHAGOREAN THEOREM

Abstract: Aiming to articulate History of Mathematics, Problem Solving, manipulative materials and digital resources, a didactic project revolving around the arithmetical origin of the Pythagorean Theorem was applied in four Year 9 classes of a private school in São Paulo. The whole itinerary was completed in a week, during which each class had four lessons. Each group was composed of 20 students by the age of 14. By means of an expository class in dialogue fashion, students got in touch with the historical context in which the Pythagoreans existed. In the following activity, an investigation process analogous to the original Pythagorean thought was applied by letting the students solve figurate number problems through the use of colored chips. Conclusions were discussed with the whole class and newly learned content was formalized and historically contextualized. In order to make it easier to grasp historical situations and new figurate contents, animations previously developed by the teachers were used. The articulation of different resources seemingly favored the motivational aspect of learning as well as the formation of concepts and procedures regarding the Pythagorean Theorem. Positive results were evidenced both by group interactions as well as by written solutions.
Keywords: Pythagorean Theorem; History of Mathematics; Problem Solving; Manipulative Materials.

[1] Licenciado em Matemática e Bacharel em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal do ABC (UFABC). E-mail: augusto-md@hotmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4952-6073
[2] Bacharel em Física, Universidade de São Paulo (USP). E-mail: fabioseidi.yamamoto@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7727-2552

Introdução

A constatação do frequente desinteresse de muitos alunos pela Matemática nos motivou a elaborar uma proposta didática direcionada a alunos do nono ano do Ensino Fundamental para introduzir o Teorema de Pitágoras, objetivando a aprendizagem de conceitos e o desenvolvimento de atitudes favoráveis à disciplina. Entre várias opções metodológicas e de recursos didáticos, selecionamos a História da Matemática, a Resolução de Problemas, a utilização de materiais manipuláveis e tecnologias digitais; fez-se ainda uso constante da exposição dialogada para apresentar e discutir os conteúdos na sala de aula.

Estudos de autores como Miguel (1997) e Saito (2012) mostram que o uso da História da Matemática pode ajudar a desmistificar a visão estática e perene que permeia esta ciência. Segundo Bazzo (2003), o cidadão tende a ver as ciências como empreendimentos metódicos capazes de alcançar verdades inquestionáveis alheias à compreensão da pessoa comum[3], o que é uma visão atualmente contestada por acadêmicos do âmbito filosófico.

Tal discussão tem origem nos empreendimentos de grandes filósofos da ciência como Francis Bacon (1561-1626) ou John Stuart Mill (1806-1873). Conforme narra Bazzo (2003), antes deles, a tendência acadêmica era manter uma unívoca reverência aos escritos antigos como fonte última de conhecimento. Seus empreendimentos ocasionaram a adoção de uma nova máxima: a observação da Natureza deveria ser a origem suprema do conhecimento. No entanto, pensadores de séculos seguintes como Karl Popper (1902-1994) e Thomas Kuhn (1922-1996) perceberam que entre o homem e o conhecimento havia muito mais fatores interpostos: sejam nossos conhecimentos prévios, inclinações, expectativas ou relações sociais, de maneira que nossa percepção de ciência transcende a observação do nosso entorno.

Kuhn (1962) analisa a tradição dos livros didáticos, que costumam trazer a ciência como algo acabado. Esta tendência parece criar uma cisão entre História e Ciência, reiterando a visão baconiana de que é apenas o contato direto com a natureza que gera o saber científico, sem qualquer influência ou conexão com a sociedade. Se submetidos a um ensino nessa perspectiva, os estudantes podem entender as disciplinas como dissociadas, sendo levados a trabalhar dentro dos limites de cada uma e a não refletir sobre a complexidade das interações humanas no processo de desenvolvimento das ciências.

Sobre as concepções de educação científica, o filósofo Feyerabend considera que:

---

[3] Uma pesquisa de 2019 da Centro de Gestão e Estudos Estratégicos (CGEE) - organização social supervisionada pelo Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações – revela como esta percepção pública de Ciência e Tecnologia se mantém.

> A educação científica tal como hoje a conhecemos [...] simplifica a 'ciência' pela simplificação de seus participantes: primeiro, define-se um campo de pesquisa. Esse campo é separado do restante da história (a física, por exemplo, é separada da metafísica e da teologia) e recebe uma 'lógica' própria. Um treinamento completo em tal 'lógica' condiciona então aqueles que trabalham neste campo; torna suas ações mais uniformes e também congela grandes porções do processo histórico. Fatos 'estáveis' surgem e mantêm-se a despeito das vicissitudes da história. [...] Isso reflete na natureza dos 'fatos' científicos, experiência dos como independentes de opinião, crença e formação cultural (FEYERABEND, 1975, p.33-34).

Contrapondo-se a concepção descrita acima, consideramos que se deva apresentar aos alunos uma Ciência integrada à História e sujeita a forças sociais: distanciando-se das tradicionais menções históricas em simples “notas de rodapé”, a História e a Matemática são mostradas de modo a se compreender a dependência entre elas e como são inseparáveis enquanto constructos humanos.

Miguel (1997) coloca a História da Matemática como um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico, já que apresenta as características dialéticas e sociais do desenvolvimento do pensamento matemático. Além disso, sua aplicação como recurso didático promoveria atitudes e valores nos discentes, já que mostraria o esforço empregado ao longo do tempo para superar problemas e estruturar o pensamento científico. Através de trabalhos como o de Roque (2012), notamos como no decorrer da História da Matemática foram os problemas e investigações diversas que primeiramente levaram pessoas ao desenvolvimento de novas técnicas e raciocínios.

A resolução de problemas surge, desta forma, como uma possibilidade metodológica capaz de remontar a própria História. No Brasil, sabe-se que desde os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), os objetivos da Matemática no Ensino Básico incluem o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, em que se incentivam a engenhosidade e o espírito crítico, além da comunicação em linguagens oral, escrita e gráfica, munida de um transitar através de diversas representações. Segundo o documento, idealmente os problemas deveriam ser um eixo organizador do ensino: elabora-se o conteúdo a partir deles em vez de tomá-los como uma aplicação dos conceitos e procedimentos antes aprendidos. Similarmente, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) aponta:

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p.246).

A metodologia resolução de problemas é de relevância mundial. George Polya (1945) é considerado o primeiro a trazer o mérito da resolução de problemas como método didático, reavendo a antiga heurística. Echeverría e Pozo (1998) diferenciam problemas de exercícios, já que os primeiros exigem um processamento cognitivo que inclui interpretação e tomadas de decisão, enquanto os segundos não passariam de aplicações rotineiras de procedimentos aprendidos por repetição. Isto é, indo além de automatizar técnicas ou aprender por meio das técnicas empregadas, um problema leva o aluno a refletir de modo a tomar decisões sobre os passos a serem realizados, critérios especificados, condições a serem atendidas e quanto a subjetividade inerente a cada situação encontrada.

Como um procedimento heurístico, almejamos também exercitar o reconhecimento de padrões. Devlin (1994) considera a potencialidade de atividades que envolvem o reconhecimento de padrões para a formação de conceitos e desenvolvimento de competências. A importância desta percepção para a maioria das atividades humanas é mencionada também por Popper (1963), ao argumentar sobre como a observação de regularidade está relacionada com teorias acerca de fenômenos; e por Mlodinow (2008) ao evidenciar como a procura por padrões faz parte da natureza humana, que procura sempre estabelecer ordem em meio ao caos.

Para auxiliar no desvendar dos padrões pertinentes aos problemas desta proposta, utilizou-se da representação visual concomitantemente com a algébrica. A visualidade ostenta, conforme Roque (2012), um grande peso no pensamento matemático antigo, mas é também notável seu uso pedagógico. Materiais manipuláveis, de acordo com Lorenzato (2006), embora sejam normalmente utilizados nos anos iniciais, possuem um apelo que transcende a idade. Segundo o autor, o aspecto lúdico serve para auxiliar no desenvolvimento social e de comunicação, melhorando o ambiente de estudo e incentivando o interesse do estudante.

Um outro recurso visual inestimável é oferecido pelas tecnologias digitais. Conforme afirma Sanderson (2020), animações – como as utilizadas nesta proposta – podem se mostrar grande utilidade no meio computacional para expressar conceitos que não são tão visíveis através de imagens estáticas. Baseando-se em sua utilidade e no interesse expressivo dos alunos por tecnologia, orientamos nossas exposições sempre por imagens ou animações, almejando evitar, enquanto possível, representações demasiadamente textuais, algébricas ou aritméticas.

Para além do aspecto procedimental, Onuchic e Allevato (2011) destacam que a metodologia resolução de problemas pode desenvolver "a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam" (p. 82). As autoras afirmam que, apesar de não existir forma fixa para se trabalhar com resolução de problemas, existem etapas sugeridas como: a entrega da atividade a grupos; o registro dos resultados e a discussão em plenária; análise e formalização. A presente proposta didática foi elaborada levando tais concepções em conta: constitui-se em torno de problemas de reconhecimento de padrões, sendo que os grupos de alunos são guiados a alcançar, conforme solucionam os problemas, uma compreensão sobre o fenômeno matemático estudado, posteriormente o elucidando e formalizando em plenária com o restante da turma.

Enquanto estes argumentos justificam a escolha da resolução de problemas como eixo organizador do aprendizado, não excluímos a apropriação prática dos procedimentos. Coll e Valls (1998) reúnem diferentes definições do que seria um procedimento, diferenciando aqueles de natureza algorítmica, possuidores de passos fixos para se chegar a um resultado; dos heurísticos, que somente indicam o caminho a ser tomado sem especificar ações. Os PCN propõem que o ensino de conteúdos procedimentais seja deste caráter heurístico. Os problemas e procedimentos desta proposta se encaixam nesta natureza, uma vez que os questionamentos apresentados aos discentes exigiram formulação de estratégias, interpretações e reflexões.

Coll e Valls (1998) também argumentam que procedimentos são efetivamente aprendidos por reconstrução da prática na forma do resultado de uma reflexão sobre o que fazer e como fazer, manifestado na capacidade de interpretar, representar e resolver problemas. Segundo Baddeley (1999), ainda, pode-se adquirir tal destreza no manejo de procedimentos que se diz que foram automatizados: a memorização permite que se alcance resultados antes cognitivamente custosos sem o emprego de demasiados recursos de atenção. Com o objetivo de incentivar a aprendizagem significativa de procedimentos, além dos problemas, propomos posteriormente exercícios versando sobre os conteúdos e procedimentos aprendidos.

Articulando as ideias anteriores acerca da participação discente, procuramos valorizar durante todo o processo suas opiniões e colocações como construtivas para a discussão empreendida. Assim, informações não foram meramente apresentadas, mas sempre discutidas: trata-se da estratégia de aula da "exposição dialogada". Tal alcunha se refere à quebra do papel passivo que é costumeiramente relegado aos estudantes, tantas vezes contrapostos a um suposto detentor de conhecimento absoluto, o docente. Nas palavras de Anastasiou e Alves:

> A aula expositiva dialogada é uma estratégia que vem sendo proposta para superar a tradicional palestra docente. Há grandes diferenças entre elas, sendo que a principal é a participação do estudante, que terá suas observações consideradas, analisadas, respeitadas, independentemente da procedência e da pertinência das mesmas, em relação ao assunto tratado. O clima de cordialidade, parceria, respeito e troca são essenciais (ANASTASIOU; ALVES, 2009, p. 86).

A proposta didática

O projeto constituiu de uma sequência de atividades aplicadas em quatro turmas do nono ano do Ensino Fundamental de uma escola particular de São Paulo, durante quatro aulas ministradas ao longo de uma semana, conforme mostra o Quadro 1. Cada turma continha em torno de 20 alunos com aproximadamente 14 anos.

Quadro 1: Planejamento das Aulas

Atividades	Objetivo	Metodologia e Recursos
1.Introdução: História da Matemática – os Pitagóricos	Fornecer uma contextualização histórica da Matemática Grega, compreendendo suas peculiaridades metodológicas e inserção cultural	Exposição dialogada e animações digitais
2. Números quadrados e suas propriedades	Levar os alunos a construírem um pensamento figurado análogo ao dos pitagóricos enquanto estudam os números quadrados	Uso de fichas de diferentes cores como material manipulável; exposição dialogada e animações digitais
3. Trincas Pitagóricas	Através de perguntas orientadoras, investigar o porquê da junção de alguns quadrados resultarem em outro quadrado	
4. Exercícios de Trincas Pitagóricas	Aplicar o que se aprendeu sobre trincas pitagóricas resolvendo exercícios sobre o tema	
5.Fechamento: Teorema de Pitágoras	Descrever a versão geométrica do teorema e como esta se relaciona com as trincas pitagóricas dentro do contexto da Matemática Antiga	Exposição dialogada e animações digitais

Fonte: elaboração dos autores.

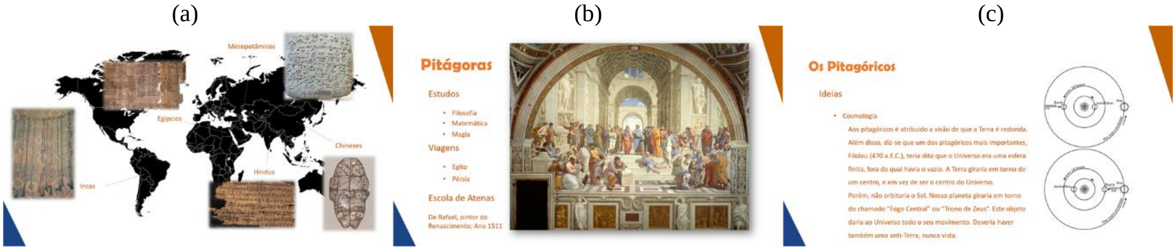
Apresentamos a seguir um resumo das atividades aplicadas.

1. Introdução: História da Matemática – os Pitagóricos

Para atrair a atenção dos alunos foram utilizados *slides* contendo imagens e animações conforme mostra a Figura 1.

Figura 1: Exemplos de telas do início dos slides.[4]

(a) (b) (c)



Fonte: Elaborado pelos autores.

Um dos itens tratados na História da Matemática foi referente a sistemas de numeração e sua relação com a escrita. A BNCC orienta que o aluno reconheça o nosso sistema como o que prevaleceu no mundo ocidental e que saiba destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas construídos por outras civilizações, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero). Nessa perspectiva, já que as atividades foram aplicadas em uma turma do nono ano – e considerando que o assunto já fora tratado em anos anteriores – fizemos uma breve revisão sobre o tema, na forma de uma exposição dialogada em conjunto com a apresentação de *slides* com animação.

A Figura 1(a) é um *slide* contendo um mapa interativo de civilizações pioneiras em sistemas de escrita e numeração, inicialmente apresentado em branco. Questionando os alunos acerca do que se lembravam e oferecendo dicas quando necessário, completamos juntos seu conteúdo. A cada clique sobre partes selecionadas do mapa se revelavam informações específicas sobre as civilizações antigas daquela região, sendo que esta simples interatividade já acarretou animação na turma, dado o entusiasmo que demonstram por tecnologias digitais.

Como continuidade, algumas questões foram colocadas aos alunos: Por que motivo surgiu a escrita? A numeração veio antes ou depois dela? Qual a diferença entre os diversos sistemas de escrita e numeração? Tais perguntas nos permitiram reforçar conceitos matemáticos junto de fatos históricos, além de reiterar informações acerca de pesquisas recentes.

Tomando por base os estudos de Raven (2020), foram discutidas algumas informações: que a escrita teria surgido por motivos distintos em cada lugar do mundo; que a escrita da Mesopotâmia foi precedida pela contagem – esta era feita utilizando *tokens* e posteriormente marcas em argila, culminando na escrita cuneiforme; que os Incas são responsáveis por um sistema de escrita e contagem único no mundo (os nós *quipu* feitos em

[4] A apresentação se encontra em domínio público e pode ser acessada pelo *link* que consta em Anexo.

cordas amarradas) etc.

Nessa apresentação, foram abordadas culturas que herdaram sistemas de escrita em vez de criá-los; assim, focamos a civilização grega, que introduziria a vida do matemático Pitágoras. Em lugar de trazer uma biografia fixa como é costume em livros didáticos, houve a preocupação em expor a História em suas nuances historiográficas, incentivando o exercício de um raciocínio crítico acerca da disciplina. Servimo-nos, por exemplo, de uma citação de *A Vida Pitagórica* de Jâmblico (245 – 325 EC):

> Após sua visita ao Egito, Pitágoras estava ansioso para implementar os métodos de ensino que presenciara, mas o povo de Samos não lhe dava ouvidos. Decidido para que seus saberes não morressem junto de seu corpo, escolheu um jovem pobre de ótimo desempenho atlético para ensinar. Fez uma promessa a ele que o pagaria um dinheiro para cada proposição aritmética ou geométrica que aprendesse. Isso continuou até que o garoto criasse interesse pela Matemática, quando Pitágoras supôs que ele continuaria mesmo sem o pagamento. Foi então que o próprio sábio lhe contou que era pobre, e que não teria sempre tempo para ensinar. O jovem, em vez de desistir de aprender, se voluntariou para pagar Pitágoras por cada uma de suas proposições (HEATH, 1921, p.31, em tradução livre).

Levantamos indagações como: Seria um relato como este verdadeiro? Sabendo-se que este texto foi escrito meio milênio após a vida de Pitágoras, isto influencia sua credibilidade? Se julgamos que seja falso, qual mensagem será que o autor tentava passar com a anedota?

Ao levantar essas questões, pretendeu-se fazer uma análise do discurso de modo a alcançar as entrelinhas, refletindo de maneira interpretativa. Uma apreciação possível seria que, mesmo com alguma resistência da população em relação ao conhecimento estrangeiro sistematizado, os saberes matemáticos por fim adentraram a Grécia advindos do exterior, dando vazão aos estudos que lá floresceram. Nota-se o papel que passou a ter a Matemática transformada em ensino institucionalizado, grande feito da história da educação tradicionalmente atribuído a Pitágoras.

Não obstante, conforme Roque (2012), entre tantas anedotas, hoje não se pode nem sequer afirmar que Pitágoras tenha de fato existido: o único consenso dos relatos se limita, na verdade, a existência do grupo chamado Pitagóricos.

Figura 2: (a) *Pitágoras Defendendo o Vegetarianismo* (1630) do pintor barroco Peter Paul Rubens, (b) *Os Pitagóricos Celebram o Alvorecer* (1869) do realista Fyodor Bronnikov; (c) ilustração do livro *Theorica musicae* (1492) do músico Franchinus Gaffurius

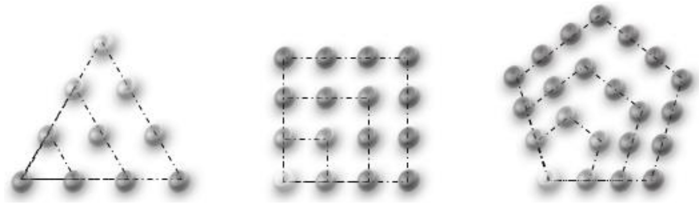
Fonte: Domínio público.

Como ilustrado na figura anterior e vislumbrado pelos discentes nos *slides*, para bem além da Matemática, tal seita mantinha uma religião e filosofia com peculiaridades distintas da grega. Por exemplo, Zhmud (2012) mostra como o escrito mais antigo acerca da doutrina pitagórica expressa sua crença na metempsicose, ideia que influenciou religiões posteriores. Conforme Riedweg (2008), o vegetarianismo também é uma prática atribuída aos pitagóricos, destoante do meio grego em que, segundo Lefèvre (2013), a carne era considerada uma iguaria.

Através da discussão destes e de outros aspectos da doutrina, procurou-se revelar aos alunos seu caráter humano, em vez de simplesmente resumi-los a “grandes contribuições para o *corpus* da Matemática”, como se os abstraíssemos do contexto histórico em que existiram.

A música e a cosmologia, em consonância com Heath (1921), acompanham conhecimentos matemáticos estudados pela doutrina. Notando a presença dos números na harmonia musical e nos céus, sua ideia filosófica central teria emergido como enunciada pelo pitagórico Filolau: “Tudo o que se pode conhecer tem número; tal que não é possível que sem números qualquer coisa possa ser concebida ou conhecida". Notadamente, a maneira característica do estudo da aritmética era lidar com números figurados, como os ilustrados pela Figura 3.

Figura 3: Exemplos de números figurados: arranjos com objetos formando figuras.



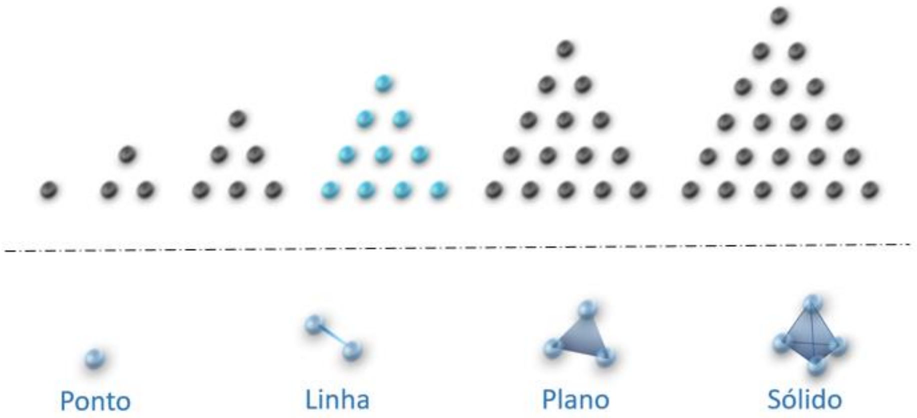
Fonte: Elaborado pelos autores.

Para introduzir o tema, aproveitamos conceitos pontuais explorados pelos pitagóricos para efetuar uma revisão de alguns conteúdos matemáticos dos anos anteriores. Conforme Heath (1921), “números alongados” é o nome geral para os retângulos figurados, que consistem de coleções de pontos alinhados formando um retângulo. Empregando animações em *slides*, mostramos uma carreira de 12 pedrinhas se tornando quatro números alongados diferentes. Perguntamos à classe: “neste caso, qual o conceito retratado?”. Condizente com a maturidade matemática esperada do nono ano, as salas responderam de imediato se tratar de divisibilidade.

Ao enunciar que “números linha” seria ainda o nome dado àquelas fileiras de pedrinhas que não podem formar retângulos, também rapidamente completaram que esta ideia visual correspondia ao nosso conceito de “número primo”. A teogonia pitagórica vai adiante e coloca o número Um como distinto dos demais, sendo o único que é capaz de gerar todos os outros. Discutindo e interpretando tal lenda, os estudantes depreenderam ser uma metáfora para a forma como todos os números (naturais) são divisíveis por um.

A presença de padrões no pensamento pitagórico foi apresentada ao mostrarmos na projeção seis termos da sequência dos números triangulares (Figura 4) para encadear as questões: “como são construídos? Qual é o padrão que rege a sequência?”. Para as salas que apresentaram mais dificuldade, mostramos uma animação do triângulo se formando de cima para baixo, adicionando cada carreira. Ficava expresso, assim, como números triangulares são construídos pela sequência dos números naturais: o padrão de construção é a simples adição sucessiva do número natural seguinte.

Figura 4: Alguns triângulos figurados, destacando o *Tetraktis*. Abaixo, uma interpretação da figura.



Fonte: Elaborado pelos autores.

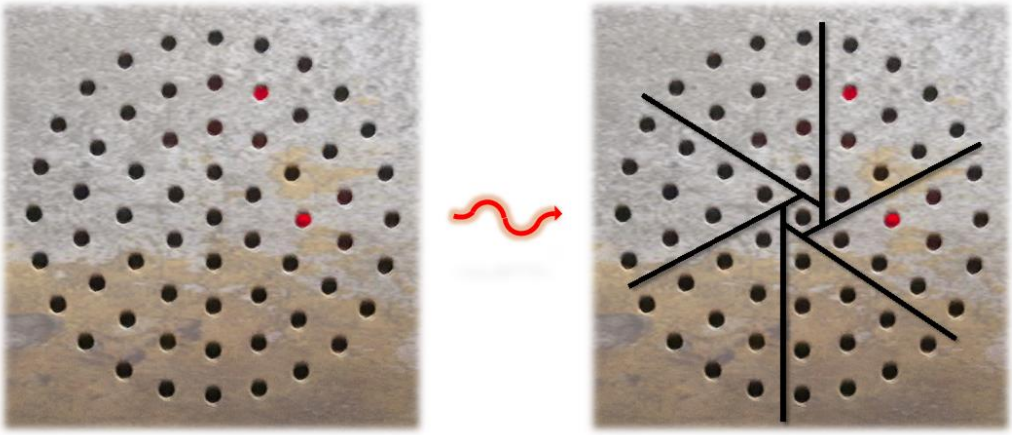
Acrescemos a explicação acerca da importância do triângulo de 10 pontos, alcunhado *Tetraktis*, dentro da filosofia pitagórica. De acordo com Roque (2012) e Heath (1921), tal figura funcionava como um símbolo da escola pitagórica, também conhecido como o "princípio do bem-estar". Os números 1, 2, 3 e 4 que o formam aparecem, por exemplo, nas proporções harmônicas estudadas pela doutrina. Sua soma ainda resulta em 10, o dito "número perfeito". Roque (2012) relata que, historicamente, Aristóteles reinterpreta o *Tetraktis* adicionando uma outra noção: a de que 1, 2, 3 e 4 representam o ponto, a linha o plano e o sólido.

Intencionando aguçar a curiosidade dos alunos, ousamos colocar um problema que tradicionalmente seria pertinente somente ao Ensino Médio: "Dado um triângulo de, por exemplo, 100 de lado, como calcular rapidamente seu número de pedrinhas?". A intenção não era responder à pergunta, e sim somente incentivar o raciocínio abstrato. Contudo, em uma turma do nono ano uma aluna resolveu o problema à moda pitagórica – isto é, notou que dois números triangulares repetidos "encaixam" e formam um retângulo. O total do retângulo pode-se calcular fazendo a base vezes a altura: logo, para encontrar as pedrinhas do triângulo, bastaria cortar o retângulo ao meio, ou seja, dividi-lo por dois.

Mesmo sendo o "teorema de Pitágoras" conhecido como um resultado geométrico, Roque (2012) argumenta que ele teria se originado aritmeticamente. Em seu cerne se encontra o familiar conceito de número quadrado, estudado pelos alunos desde o sexto ano como "números quadrados perfeitos". Relembramos os alunos desta definição mostrando figuras de números quadrados, que na próxima aula seriam explorados para desenvolver o teorema.

Sem deixar de lado o nosso próprio cotidiano, concluímos a exposição dialogada inicial citando e mostrando imagens de números figurados no nosso dia-a-dia. Na própria sala de aula podíamos avistar alguns: a disposição das carteiras, os ladrilhos do chão ou as portas dos armários. Explicamos que existem tanto no mundo microscópico, onde átomos se organizam em figuras para formar moléculas, quanto na constituição do pensamento econômico ao se organizar produtos em caixas para venda. Um pequeno exercício fechou esta seção: pedimos aos alunos que tentassem descobrir uma maneira célere de contar os furos de um alto-falante sem, no entanto, contar um a um (Figura 5). Assim encerrou-se a primeira aula de 45 minutos.

Figura 5: Uma possível resolução do problema, em que se separam seis *Tetraktis* e mais um ponto.



Fonte: Elaborado pelos autores.

2. Números quadrados e suas propriedades

A segunda aula foi aberta deixando que os alunos formassem grupos de 4 ou 5, afastando as carteiras para que trabalhassem no chão. Para a Atividade 1, distribuímos 60 fichas para cada grupo. Orientamos que montassem a sequência dos cinco primeiros números quadrados e que, usando as fichas para raciocinar, respondessem às questões: a) Quanto aumenta de um quadrado para o outro? b) Qual, então, é o padrão que rege o aumento entre os números quadrados? c) Quantas fichas a mais terá o sexto quadrado em relação ao quinto? d) Quantas a mais terá o 17º número quadrado em relação ao 16º?

A intenção era que, seguindo os passos propostos para esta investigação, descobrissem que o aumento de um quadrado para o outro é sempre um número ímpar. Assim, o padrão do aumento pode ser descrito como a sequência dos números ímpares, e tal fato guia a descoberta de quantas unidades aumenta entre qualquer quadrado e seu sucessor.

Todos os grupos concluíram a atividade entre 10 e 15 minutos sem muitas dificuldades. O passo seguinte foi discutir em plenária suas descobertas, resumindo junto das animações de *slides* construídas para este fim. A seguir, foi feito a ligação entre o que os alunos tinham acabado de descobrir com algumas ideias matemáticas importantes na História.

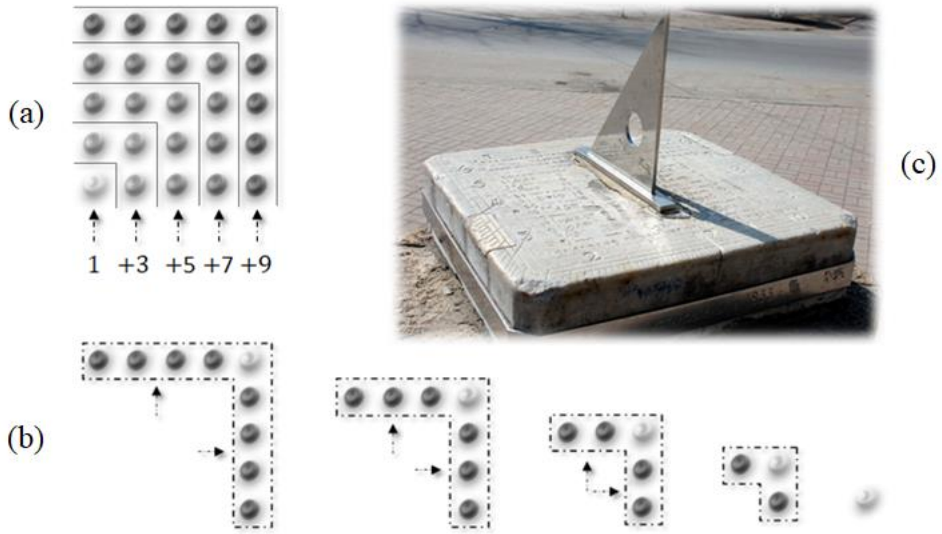
Sobre as peculiaridades da doutrina Pitagórica, o filósofo da ciência Popper enunciou:

revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

> Por muito fantástica que esta ideia fosse, revelou-se fecunda em muitos aspetos. Uma de suas aplicações mais bem-sucedidas foi a aplicação a figuras geométricas simples como quadrados, triângulos retangulares e isósceles, e também a determinados sólidos simples como as pirâmides. O estudo de alguns problemas geométricos baseava-se no chamado gnômon (POPPER, 1963, p.150).

"Gnômon" é uma palavra em grego antigo que significa "aquele que sabe" – tratava-se de um aparato astronômico como um esquadro utilizado para indicar uma posição ou medida. Um de seus usos populares foi nos relógios de sol, como representado na Figura 6(c). Em analogia com seu ângulo reto, cada seção em L acrescida a um quadrado figurado recebeu também o nome de gnômon.

Figura 6: Construções figuradas de um número quadrado e analogia com o dispositivo gnômon.



Fonte: Diagrama figurado elaborado pelos autores. Foto em domínio público por Alexandre Mirgorodski. Disponível em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sundial_Taganrog.jpg

A parte (a) da Figura 6 foi animada de forma que os alunos pudessem ver os gnômons completando um novo quadrado, confirmando suas respostas às questões propostas. Em (b), está representado visualmente o caráter ímpar de todo gnômon: eles são formados por dois "braços" iguais (em preto) e mais uma ficha na "dobradiça" (em branco).

3.Trincas Pitagóricas

A Atividade 2 adentrou, finalmente, a questão principal do teorema: qual o critério para que dois quadrados figurados, quando somados, formem um novo quadrado? Ilustramos com a famosa trinca (3,4,5): o quadrado de lado 3 é capaz encaixar no de 4 e formar o de 5.

A segunda atividade com as fichas foi resolver as seguintes questões: a) Monte a trinca (3,4,5) utilizando duas cores diferentes. b) O que um quadrado precisa ser para que possa se tornar um gnômon? c) Encontre o menor número depois de 3 cujo quadrado pode se tornar um gnômon. d) Monte apenas o quadrado maior desta nova trinca. Escreva qual a trinca.

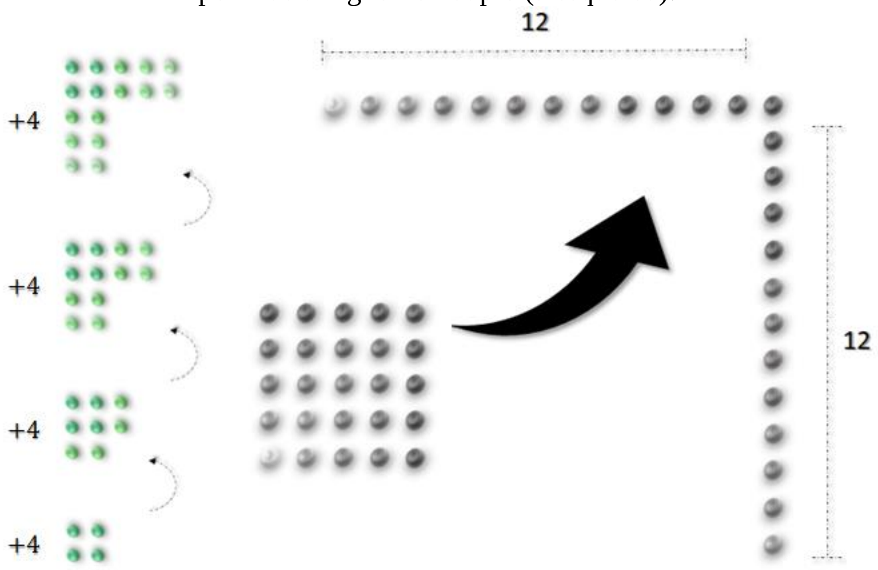
Figura 7: Fotos dos resultados das Atividades 1 e 2.

Fonte: Atividade feita em sala de aula.

Conforme ilustrado na Figura 7, oferecemos 170 fichas a cada grupo para a realização da atividade, sendo no mínimo 25 de uma cor e o restante de outra. Através das perguntas investigativas, os alunos deveriam concluir que um quadrado só pode ser adicionado a outro desta maneira caso ele possa se tornar um gnômon. Em outras palavras, o quadrado deve necessariamente ser ímpar – o que implica que a trinca seguinte é a (5,12,13).

Segundo Roque (2012) e Heath (1921), o próprio Pitágoras seria o inventor desta "fórmula" para construir trincas, que começa sempre com um número ímpar. Explicamos em plenária tal hipótese histórica em conjunto com a discussão do resultado obtido: o número $5^2 = 25$ pode ser transformado em um gnômon de braço 12, dentro do qual acomoda-se o quadrado 12^2. A união de ambos resulta no quadrado maior $13^2 = 169$, como esboçado na seção direita da Figura 8. Enfatizamos o fato de esta trinca e a (3,4,5) serem as que mais aparecem em exercícios de vestibulares, de forma que se lembrar delas pode se mostrar extremamente útil na resolução de exercícios.

Figura 8: O gnômon simples de 25 fichas (à direita) formando dois braços de 12, e a divisibilidade por 4 de um gnômon duplo (à esquerda).



Fonte: Elaboração dos autores.

4. Exercícios de Trincas Pitagóricas

A terceira e última atividade das aulas com material manipulável consistia de questões teóricas, para a resolução das quais os alunos ainda teriam as fichas à disposição. Foram elas: a) Encontre uma trinca pitagórica que possui o número 7. b) Sabemos que uma trinca pitagórica tem a forma (X,40,Y). Encontre valores para X e Y. c) Encontre uma trinca pitagórica que possui o número 19. d) Desafio: existe a trinca 8,15,17. Explique com imagens ou palavras como pode funcionar uma trinca em que os dois últimos números não são consecutivos.

A partir das atividades anteriores os alunos foram rápidos em observar que os números finais da trinca, conforme a fórmula de Pitágoras, deveriam ser consecutivos. Munidos deste conhecimento, não foi difícil resolver os primeiros três exercícios. Para o último foi, contudo, necessário mais tempo de reflexão. A intenção era que chegassem à fórmula atribuída a Platão, que começa com um número par que se transforma em um "gnômon duplo" (vide o lado esquerdo da Figura 8), fazendo assim com que o intervalo entre os dois números finais da trinca seja 2, e não 1. Para tanto, precisariam notar que a soma de dois gnômons, um gnômon duplo, é sempre divisível por quatro. Como o quadrado de um número par é também sempre divisível por quatro, todo número quadrado par poderá se tornar um gnômon duplo. Desta forma, conclui-se que é possível igualmente construir trincas começando com números pares.

Os materiais produzidos pelos grupos de alunos como soluções às três atividades foram recolhidos para posterior análise. Dado que as atividades foram supervisionadas pelos professores e encerradas em plenária, todos os grupos alcançaram, trilhando seus próprios caminhos, as respostas corretas. Restou para análise a expressão textual dos alunos, que variou desde respostas inteiramente em prosa até inteiramente em imagens, ambas sendo aceitas como formas válidas de registro. Em duas salas, notavelmente, houve grupos que expressaram parte de suas respostas em notação algébrica – demonstrando os diferentes graus de familiaridade com a linguagem matemática presentes entre os alunos.

5. Fechamento: Teorema de Pitágoras

Na aula restante adentramos por fim o terreno geométrico. Não obstante, sem nos desvencilhar da História, retomamos o tom de exposição dialogada da primeira aula. Perguntamos: “qual seria a importância da geometria para as sociedades antigas?”.

Figura 9: Fragmentos de mapas mesopotâmicos, pirâmides egípcias e medição de terreno com corda.

Fonte: Mapas sob licença educacional: https://www.penn.museum/collections/objects/about.php; Imagens egípcias em domínio público.

Os alunos demoraram para descobrir o que estariam fazendo os egípcios da pintura superior da Figura 9. Apoiados nas afirmações de Roque (2012), relembramos a figura de Heródoto, o primeiro historiador ocidental. Segundo seu relato, a agrimensura teria dado origem à geometria, palavra que se refere à medida de terra. Para tanto, uma prática comum seria esticar cordas sobre o terreno. Continuamos: “qual a utilidade de se medir terrenos? Para que se construíam mapas?”.

A presença da Matemática foi evidenciada ao se expressar como, até hoje, medir terreno se mostra essencial para a cobrança de impostos. Também se pode estimar o quanto de colheita esperar de dada área, planejar construções e controlar gado. Mapas ainda, como os da

Figura 9, expressavam desde pequenas construções até grandes cidades ou vastos territórios. Tudo isto permitia à administração do reinado que controlasse mais eficientemente o terreno sob seu poder, permitindo o melhor planejamento de construções ou defesa contra invasores.

A imagem de *Plimpton 322*, um dos mais famosos tabletes mesopotâmicos, encadeou a discussão a seguir. O que estaria registrado, e por qual motivo? Explicamos que além de razões administrativas, grande parte dos tabletes tinham a função educativa de formar novos administradores. Para tanto, contavam com uma grande variedade de exercícios e cálculos matemáticos. Este tablete, em específico, é analisado por alguns (apesar de disputado por Roque) como contendo trincas pitagóricas – o que é um entre muitos exemplos de uso do Teorema de Pitágoras antes dos pitagóricos. Isto mostra um fato comum na ciência: nomes de empreendimentos muitas vezes levam o nome de quem os popularizou, não do real inventor. Mostramos a seguir como diversas formas geométricas eram estudadas nos tabletes, o que não excluía as circulares. No Egito, igualmente, haviam maneiras de se calcular áreas de todo tipo de figuras planas, como demonstrado pelo papiro de *Rhind*.

O último pensador discutido foi Euclides. Posterior a Pitágoras, viveu uma vida sobre a qual quase nada se sabe, exceto por ter nos legado sua obra imortal, os *Elementos*. As raízes de sua influência se espalharam por toda a história do pensamento matemático, acarretando traduções para as mais diversas línguas e inspirando incontáveis estudiosos.

Tal livro se diferenciou pelo encadeamento lógico que guiava sua apresentação, iniciando com axiomas e desenvolvendo, a partir destes, proposições. Para tornar a ideia menos abstrata aos alunos, elucidamos metaforicamente: em uma torre, o tijolo mais do topo deve estar apoiado em outro tijolo, e cada um deles está em outro abaixo. Isto evidentemente não poderia continuar para sempre, senão a torre não teria fim. É eminente que um deles precisa se apoiar no chão, que é base para tudo.

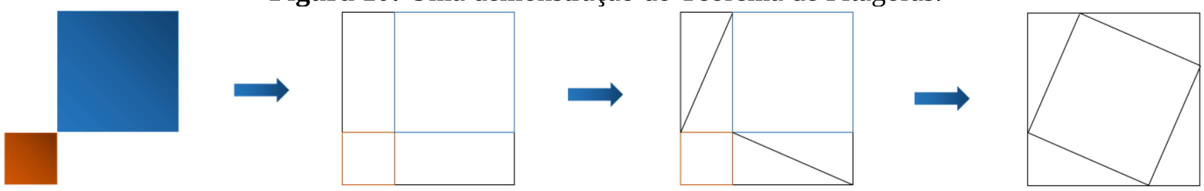
Se dizemos que algo é verdade baseado em outro argumento, e este outro se baseia em mais outro, algum deve se basear em um argumento original que gera todos os demais. Caso contrário, cairíamos no conceito lógico-filosófico da regressão infinita. Por isso, Euclides inicia seu livro com axiomas (palavra grega antiga que significa “requisito”, “valioso”). Exemplos são “linha é comprimento sem largura”; “a extremidade de uma linha são pontos”; “superfície é aquilo que só tem comprimento e largura” – todos expressam conceitos evidentes, que a maioria tem como óbvio.

Roque (2012) descreve os *Elementos* como tendo uma função majoritariamente didática. A intenção de seu autor seria mostrar tudo o que a Matemática grega básica era capaz, por isto Euclides se limitou a usar apenas régua e compasso para todas as construções, ainda que métodos mais complexos estivessem disponíveis. Mencionamos brevemente que esta é uma visão fruto de pesquisa recente: por muito tempo existiu a crença de que permaneceu uma "proibição" de outros métodos por parte de Platão. Este seria mais um exemplo de como a História é viva, sempre sujeita a reinterpretações.

O livro também é dividido em uma seção geométrica e aritmética, encetando pela primeira. Trata-se de uma geometria que não contém números, tudo é resolvido pelas próprias figuras. Os alunos tiveram dificuldades em imaginar como isto era possível. Oferecemos um exemplo: a Proposição I-45 pede "construir no ângulo retilíneo dado um paralelogramo igual à figura retilínea dada", com a figura dada sendo um pentágono. Ou seja, medir uma área equivalia a ser capaz de construir uma figura simples (como um paralelogramo ou quadrado) que tivesse a mesma área. Outro tipo de problema comum é o apresentado na Proposição VI-29, em que se deve construir uma figura simples que tenha a soma da área de outras duas. Este tipo de necessidade fundamenta o Teorema de Pitágoras.

O teorema é tão importante que toda a sequência lógica do primeiro livro dos *Elementos* culmina em sua demonstração, atribuindo a prova à figura mítica de Pitágoras. Entre as mais de 200 formas conhecidas de mostrar o teorema, escolhemos para mostrar aos alunos uma que pareceu melhor se adequar a abordagem escolhida.

Figura 10: Uma demonstração do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborado pelos autores.

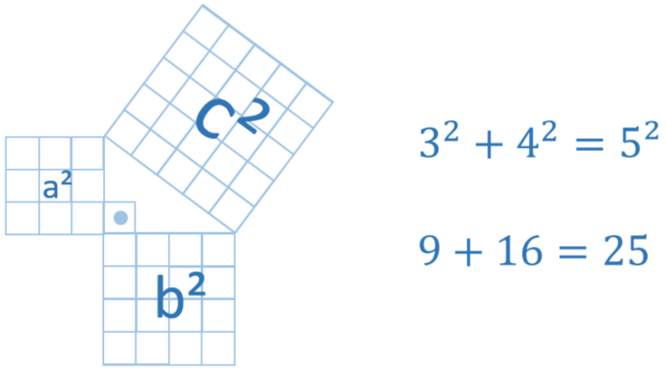
Contando com uma detalhada animação, mostramos como os dois quadrados do início da Figura 10 poderiam ser somados juntando os vértices. O resultado é um quadrado maior que contém ambos e dois retângulos iguais. Se dividirmos ambos os retângulos em quatro triângulos, podemos por fim reorganizá-los para formar um quadrado na diagonal. Este quadrado (em preto na Figura 10) será a soma dos quadrados anteriormente em azul e laranja, pois é o mesmo espaço que falta em relação aos triângulos. Como a animação mostrava as peças da figura se movimentando para formar a seguinte, acarretou bastante elogios dos estudantes, interessados pelos bastidores de sua confecção.

A partir disso, destacamos os triângulos que foram recortados. Eles possuem um lado em cada quadrado: dois nos que são somados e um na soma. Qualquer que fosse o triângulo retângulo, poderíamos encaixar formando uma figura como aquela. Logo, concluímos que todos os triângulos podem ser entendidos como uma relação entre três quadrados – e a equação $a^2 + b^2 = c^2$ se aplica em relação a seus lados.

Para facilitar a prática posterior em exercícios, solicitamos a atenção para o fato de que o quadrado maior (a soma dos demais) fica sempre sobre o lado maior. Do fato de que ao maior lado se opõe o maior ângulo, chegamos à conclusão de que fica oposto ao ângulo reto. Os nomes "hipotenusa" e "cateto" foram descritos em sua origem grega: "que se estende sob (o ângulo reto)" e "vertical; perpendicular". "A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa" seria, portanto, outra enunciação do teorema.

Finalizamos com uma animação unindo a versão aritmética com a geométrica através da clássica e icônica imagem do teorema, retratada na Figura 11.

Figura 11: A trinca clássica (3,4,5) sob a forma geométrica.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Exercícios de fixação feitos em conjunto concluíram os últimos slides: "Dado o desenho de um triângulo retângulo, onde ficariam cada número da trinca (5,12,13)? Se tivermos um triângulo retângulo de hipotenusa 26 e cateto 10, quanto medirá o outro cateto?". Com pouquíssima discussão, os alunos encerraram a aula esboçando oralmente a resolução.

Conclusão

Consideramos que as atividades aplicadas tenham logrado êxito: a intenção de articular os diversos recursos pedagógicos em uma só sequência didática pareceu cumprir seu objetivo, dado que foi capaz de capturar a atenção e o interesse de quase a totalidade dos alunos.

O tom mais descontraído e menos expositivo da apresentação histórica, em primeiro lugar, pareceu desfazer a barreira que limita a Matemática a fórmulas e cálculos. Conforme as perguntas eram colocadas e as curiosidades exploradas, os discentes de todas as salas puderam interagir de maneira mais descontraída. O diálogo da aula deu abertura para que os alunos inclusive se expressassem com brincadeiras ou piadas; nenhuma das quais desviou, significativamente, a atenção focada no cerne da discussão.

Investigar as questões usando material manipulável, em nossa interpretação, foi outro grande diferencial. A maioria dos grupos contava com uma boa disposição diante do desafio, discutindo entre si de maneira empenhada para resolver os problemas. Dado que materiais diferentes são de mais rara utilização conforme os alunos avançam os anos, se mostraram um agente de motivação. A euforia em torno deste material foi tanta, na verdade, que em alguns momentos foi difícil fazer os alunos voltarem a atenção das fichas para a discussão em plenária – situação resolvida sem muito esforço com um pouco de diálogo.

Por fim, os recursos visuais tecnológicos completaram a gama de artifícios. Como os discentes mostram um grande apreço pela tecnologia e meios digitais, expor a aula primariamente baseada em slides interativos e animações foi um fator de grande empolgação, gerando elogios constantes.

No final das aulas em duas das salas, fomos surpreendidos por aplausos e agradecimentos. Os alunos que expressaram sua percepção explicaram que toda a experiência se distanciou do que eles entendiam por “aula de Matemática”, e por este motivo tinha sido deveras mais interessante.

Pretendemos por fim, através deste relato, oferecer um incentivo não apenas à utilização de recursos pedagógicos diferenciados, mas evidenciar como podemos obter um resultado ainda mais interessante ao articular diferentes recursos entre si. A ideia para esta sequência didática, por exemplo, foi obtida do estudo e reflexão acerca da História da Matemática. Não obstante, admitimos que sem a resolução de problemas, os recursos digitais ou a exposição dialogada, a História em si poderia se mostrar um recurso limitado. Munir-se de recursos diversos, ao que nos parece, pode ainda ampliar a possibilidade de cativar diferentes alunos que se distinguem por seus diferentes interesses.

Esperamos que o presente relato possa servir de inspiração para outras práticas pedagógicas similares, estimulando docentes a sempre experimentarem recursos diferenciados em suas salas de aula.

Referências

ANASTASIOU, L. G. C.; ALVES, L. P. **Processos de ensinagem na universidade:** pressupostos para as estratégias de trabalho em aula. n. 8. Joinville, 2009.

BADDELEY, A. **Memoria Humana.** Teoria e pratica. Madrid: Mc Grall-Hill, trad. G. N. Navarro. 1999.

BAZZO, W. A. **Introdução aos Estudos CTS**. OEI, 2003.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental:** Matemática, 5a a 8a séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC. 2018. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 05 ago. 2021.

COLL, C.; VALLS, E. Aprendizagem e o Ensino de Procedimentos. *In:* COLL, C.; POZO, J. I; SARABIA, B.; VALLS, E. **Os Conteúdos na Reforma**. Ensino e Aprendizagem de conceitos, Procedimentos e Atitudes. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médica, p.70-118. 1998.

FEYERABEND, P. **Contra o Método**. São Paulo: Editora Unesp, 2011.

DEVLIN, K. **Mathematics - The Science of Patterns:** the search for order in life, mind and the universe. New York: Henry Holt, 1994.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. A solução de problemas em matemática. *In:* POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 13-38.

HEATH, T. **History of Greek Mathmatics**. Oxford: Dover Publications, 1921.

KUHN, T. S. **The Structure of Scientific Revolutions.** 50th Anniversary Edition. London: University of Chicago Press, 1962.

LEFÈVRE, F. **História do Mundo Grego Antigo**. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2013.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. *In*: LORENZATO, S. (Orgs.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006.

MIGUEL, A. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: Argumentos Reforçadores e Questionadores. **Zetetiké**, Campinas, v. 5, n. 8, 1997.

MLODINOW, L. **O Andar do Bêbado**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, 2011.

POPPER, K. **Conjeturas e Refutações**. Lisboa: Edições 70, 2008.

POYLA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. 1ª Edição. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

RAVEN, J. **The Oxford Illustrated History of the Book**. Oxford: Oxford University Press, 2020.

RIEDWEG, C. **Pythagoras: His Life, Teaching, and Influence**. Nova Iorque: Cornell University Press, 2008.

ROQUE, T. **História da Matemática**. 3ª Reimpressão. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

SAITO, F. Interface entre História da Matemática e Ensino: uma Atividade Desenvolvida com Base num Documento do Século XVI. **Ciência & Educação**, v. 19, n.1, p.89-111, 2013.

SANDERSON, G. **What Makes People Engage With Math.** Grant Sanderson, TEDxBerkeley. TEDxBerkeley. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=s_L-fp8gDzY. Acesso em: 15 ago. 2021.

ZHMUD, L. **Pythagoras and the Early Pythagoreans**. Oxford: Oxford University Press, 2012.

Anexo

Link para *download* dos *slides*:

https://www.dropbox.com/s/dtz6oe8myj8dwkl/Apresenta%C3%A7%C3%A3o%20Trincas%20Pitag%C3%B3ricas%20e%20Teorema%20de%20Pit%C3%A1goras.ppsx?dl=0

Note que para a correta execução das animações e funcionalidades, é necessário baixar e abrir a apresentação utilizando o *Microsoft Power Point*.

Recebido em: 17 de dezembro de 2021
Aprovado em: 11 de março de 2022