revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
10 ANOS

PRODUZINDO INFINITOS: UM ESTUDO SOB O OLHAR DO MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.24.83-109

Vinícius Aparecido Salatta[1]
Sérgio Carrazedo Dantas[2]

Resumo: Apresentamos nesse trabalho um recorte de uma pesquisa de mestrado realizada pelos autores sobre um estudo das produções de significado para infinito feita por alunos de Cursos de Graduação em Matemática com o auxílio do *software* GeoGebra. A produção e análise dos dados fundamentam-se no Modelo dos Campos Semânticos de Lins (2012), de modo que, ao nos desprender de uma definição pronta e acabada para infinito, ficamos abertos a novas interpretações e tornamos plausíveis certas direções de interlocução manifestadas pelos alunos, porém, sem atributos de certo ou errado. Para a produção dos dados, realizamos um questionário online pela plataforma do GeoGebra utilizando dois recursos: o GeoGebra Materiais e o GeoGebra *Classroom*, os quais além de possuírem recursos semelhantes a outros questionários como o Google Forms, por exemplo, ainda permitem acrescentar construções interativas do GeoGebra. Outro motivo pela opção do questionário online decorre do cenário pandêmico causado pela doença COVID-19, ao passo que os sujeitos foram convidados por e-mail e grupos de redes sociais e sua aplicação se deu por meio do envio do link do questionário por e-mail aos interessados. Após a produção e análise dos dados, percebemos que os sujeitos de pesquisa manifestam crenças-afirmações cujas legitimidades são advindas tanto de suas experiências do dia a dia quanto de suas experiências na cultura acadêmica de um Curso de Graduação em Matemática. Também destacamos que suas enunciações apresentam justificações pelo *zoom* e o próprio enunciado das questões.
Palavras-chave: Infinito. Modelo dos Campos Semânticos. GeoGebra.

PRODUCING INFINITES: A STUDY UNDER THE VIEW OF THE SEMANTIC FIELDS MODEL

Abstract: In this work, we present a cut of a master's degree research carried out by the authors about a study of meaning productions for infinity made by students of Undergraduate Mathematics Courses with the help of GeoGebra software. The production and analysis of the data is based on the Semantic Fields Model by Lins (2012), so that, when we detach ourselves from a ready and finished definition for infinity, we are open to new interpretations and make certain directions of interluction manifested by the students plausible, however, without attributes of right or wrong. For the production of data, we carried out an online questionnaire through the GeoGebra platform using two resources: GeoGebra Materials and GeoGebra Classroom, which, in addition to having resources similar to other questionnaires such as Google Forms, for example, also allow the addition of manipulable constructions of the GeoGebra. Another reason for choosing the online questionnaire stems from the pandemic scenario caused by the COVID-19 disease, while the subjects were invited by email and social media groups and its application took place by sending the questionnaire link by e-mail to interested parties. After the production and analysis of the data, we realized that the research subjects manifest beliefs-affirmations whose legitimacy comes from both their day-to-day experiences and their experiences in the academic culture of an Undergraduate Mathematics Course. We also emphasize that their statements present justifications through the zoom and the wording of the

[1] Mestre pelo Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná (Unespar). Email: viniciussalatta@gmail.com – Orcid: https://orcid.org/0000-0003-4905-7203.
[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho (Unesp de Rio Claro). Professor Adjunto do Centro de Ciências Humanas e da Educação, Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), campus de Apucarana. Email: sergio.dantas@unespar.edu.br – Orcid: https://orcid.org/0000-0001-7043-1664.

questions.
Keywords: Infinite. Semantic Fields Model. GeoGebra.

Introdução

O texto que apresentamos a seguir consiste de um recorte dos resultados da pesquisa de mestrado desenvolvida pelos autores deste artigo durante o período de 2019 a 2021, cujo objetivo foi realizar um estudo das produções de significado[3] para infinito por estudantes de Cursos de Graduação em Matemática de todas as séries, fundamentados teórica e metodologicamente no Modelo dos Campos Semânticos (MCS) (SALATTA, 2021).

Os dados produzidos durante a pesquisa para análise se deram por meio de um questionário *online*, constituído de cinco questões desenvolvidas na plataforma do GeoGebra utilizando os recursos Atividades e *Classroom* integrados. A primeira ferramenta permite criar formulários semelhantes aos mais tradicionais como o *Google Forms*, mas com a possibilidade adicional de inserir construções do próprio GeoGebra para que os usuários possam interagir modificando ou inserindo valores, modificando toda ou parte de uma construção geométrica ou outros elementos e atributos dos objetos de uma construção. Os resultados dessas interações ficam salvos em outro recurso da plataforma, o *Classroom*, um ambiente que permite que o autor da atividade tenha acesso a todos os *resíduos de enunciação*[4] daqueles que interagiram na atividade, tanto os registros escritos quanto as manipulações nas construções anexadas à atividade. Devido ao cenário pandêmico provocado pela doença COVID-19 os sujeitos da pesquisa foram convidados por meio de e-mails e redes sociais a realizarem o questionário diretamente de suas casas.

Sendo assim, com o objetivo de apresentar esse estudo das produções de significado para infinito feita por esses alunos, apresentamos na seção “Um breve estudo sobre o infinito” deste artigo um levantamento histórico sobre o infinito via exemplos que retratam outros tratamentos para o mesmo em diferentes culturas. Nessa seção expomos um dos famosos Paradoxos de Zenão, Aquiles e a tartaruga, bem como o infinito retratado como o Divino na cultura do Cabala.

Na seção “o Modelo dos Campos Semânticos”, tratamos da teoria que embasou esse estudo, o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), o qual possibilitou um estudo

[3] Para o MCS, a partir do momento que o sujeito fala sobre algo, ele está *produzindo significados* para este algo. *Significado* é aquilo que efetivamente se diz sobre um objeto, sendo objeto aquilo para o que se produz significados.
[4] Algo que eu acredito ter sido dito por alguém.

epistemológico voltado a entender *de onde o outro está falando*, quais são as justificações[5] que o levam a produzir determinados significados e quais são as possíveis direções de interlocução[6] encontradas quando observamos seus resíduos de enunciação. Tudo isto aliado a uma leitura plausível e positiva, ou seja, uma leitura em que o sujeito não é lido pela falta e sim de um modo que torne possível determinados enunciados produzidos por ele.

Desta forma, esperamos evidenciar como o MCS se mostra pertinente a essa pesquisa uma vez que possibilita ao pesquisador constituir quais são os possíveis infinitos produzidos pelos estudantes sem privilegiar concepções adotadas por uma ou outra cultura.

Apresentada a base teórica da pesquisa, na seção "Apresentação das questões" expomos duas questões abordadas dentre as cinco presentes no questionário. A escolha das questões abordadas aqui decorre da nossa visão de que as mesmas apresentam um contexto mais propício para uma discussão em torno de produções de significados conforme preconizado pelo MCS. Ainda nessa seção, debatemos algumas das direções de interlocução possíveis de serem tomadas pelos alunos. As direções expostas não são únicas, bem como não tínhamos a certeza de que elas surgiriam nos resíduos de enunciação dos sujeitos de pesquisa, mas apresentamos a partir de discussões realizadas considerando-se duas culturas em que eles estão inseridos, a *acadêmica* e a *não acadêmica*. Enquanto na primeira fazer determinadas afirmações sobre o infinito são mais plausíveis, a segunda não segue a mesma regra por se tratar de uma cultura cotidiana em que o finito é mais presente do que o infinito.

As análises dos dados produzidos nessas duas questões expostas podem ser observadas na seção "Análise dos resultados", onde apresentamos nossa produção de significados para os infinitos que os estudantes apresentam em seus resíduos de enunciação. As análises apresentadas, de acordo com o MCS, caminham por uma leitura positiva em que o aluno não é lido pela falta, e ao mesmo tempo plausível, tornando possível certas enunciações sem privilegiar outras.

Um breve estudo sobre o infinito

Ironicamente, o infinito é algo que mesmo tendo sido criado pelo ser humano, sua compreensão ainda permaneceu (e talvez ainda permaneça) confusa ao longo da história. Diante disso, apresentamos nessa seção uma contextualização histórica de como o infinito tem

---

[5] Justificação, segundo o MCS, é aquilo que o sujeito acredita que lhe autoriza a dizer o que diz.
[6] Basicamente, quem fala, fala na direção de um interlocutor, um ser cognitivo instituído por quem está falando. O interlocutor é capaz de produzir os mesmos significados que o sujeito com as mesmas justificações que ele, como autorizando o sujeito a dizer o que diz.

sido tratado dentro de diversas áreas, mas com a certeza de que não conseguimos esgotar o assunto, de modo que aqui destacamos apenas duas abordagens para um conceito que consideramos tão complexo e ao mesmo tempo tão fascinante.

Questionando a existência do movimento

Zenão de Eleia foi talvez um dos primeiros a utilizar a ideia de infinidade ao propor seus famosos paradoxos. Como infelizmente os textos originais de Zenão foram perdidos, o único texto que torna possível o conhecimento de tais paradoxos são de Aristóteles, o qual os apresentou com o objetivo de refutá-los posteriormente, gerando assim uma incerteza quanto a fidelidade entre os textos apresentados por Aristóteles e o original perdido de Zenão (MORRIS, 1999). Um desses paradoxos diz respeito a uma corrida entre Aquiles e uma tartaruga, o qual foi formulado em meados do século V. a.C. por Zenão e pode ser apresentado da seguinte maneira:

Suponha que Aquiles, um veloz guerreiro, tenha decidido desafiar uma tartaruga para uma corrida. Sendo obviamente a tartaruga muito lenta, Aquiles decide dar uma chance a ela permitindo que esta comece a certa distância a sua frente. Segundo Zenão, partindo deste pressuposto, Aquiles nunca deverá alcançar a tartaruga uma vez que, assim que ele chegar ao ponto de onde a tartaruga partiu no início da corrida, essa por sua vez já estará em um ponto mais adiante. Assim que Aquiles chegar a esse novo ponto onde se encontra a tartaruga, mais uma vez ela já terá andado outra distância a frente de Aquiles, continuando esta série interminavelmente de modo que sempre haverá uma distância entre os dois por menor que seja.

Antes de discutirmos esse paradoxo mais detalhadamente, é interessante pensar quem foi Zenão, ou melhor, de quem Zenão foi discípulo.

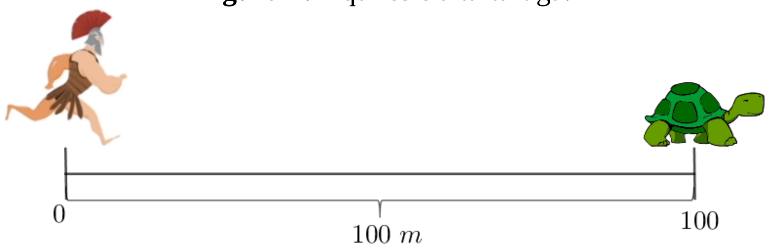
Zenão fazia parte da escola dos eleatas, a qual tinha como mentor o filósofo Parmênides. Segundo Roque (2012),

> A filosofia de Parmênides é conhecida por [...] conceber o mundo como imutável: não há movimento, não há mudança, não há nascimento nem morte, não há espaço nem tempo. Os eleatas defendiam, portanto, a unicidade do espaço, que deveria ser indivisível, e a permanência do ser no tempo, que corresponde à ausência de mudança (p. 133).

E ainda, quem acreditasse nessa realidade estaria sendo enganado pelos seus sentidos (MORRIS, 1999). Sendo assim, Zenão pode ter criado seus paradoxos para mostrar que o movimento é impossível, como descreve Aristóteles. Entretanto, não é possível saber se essa informação é correta. Outra ideia defendida por alguns filósofos sugere que Zenão tenha apresentado seus paradoxos a fim de mostrar que o espaço e o tempo eram indivisíveis, pois caso contrário uma situação como a de Aquiles e a tartaruga chegaria em conclusões que desafiavam o senso comum. Desse ponto de vista, o fiel seguidor de Parmênides estava defendendo seu mestre, pois naquela época uma quantidade infinita de partes não poderia de forma alguma se tornar uma entidade imutável (MORRIS, 1999).

Hoje em dia temos recursos mais do que suficientes para tentar entender em que Zenão falhou (ou acertou, já que não sabemos ao certo suas intenções ao propor esses paradoxos) ao apresentar esse problema. Isso pode ser resolvido pensando da seguinte maneira: para facilitar os cálculos imaginemos que Aquiles e a tartaruga estão há uma distância de $100\ m$ um do outro, e que Aquiles corre dez vezes mais rápido do que a tartaruga. A situação é ilustrada na Figura 1.

Figura 1: Aquiles e a tartaruga.



Fonte: Produzida pelos autores[7].

Conforme foi descrito, Aquiles é dez vezes mais rápido do que a tartaruga. Logo, quando ele alcançar o ponto em que a tartaruga iniciou a corrida, essa por sua vez terá corrido $1/10$ da distância que Aquiles percorreu, ou seja, $10\ m$. Quando esse por sua vez chegar ao novo ponto de onde se encontrava a tartaruga, ela ainda estará $1\ m$ a sua frente, e assim sucessivamente. Sendo Aquiles representado por P_1 e a tartaruga por P_2, a Tabela 1 é apresentada com uma relação entre cada uma dessas etapas e a distância entre os dois competidores.

Tabela 1 : Distância entre Aquiles e a tartaruga.

Etapa	0	1	2	3	4	5	6
Ditância $\overline{P_1P_2}$ (m)	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001

Fonte: Produzida pelos autores.

Observando a Tabela 1, podemos ser enganados a ponto de chegarmos a mesma

[7] Produzido no GeoGebra a partir de adaptações de imagens retiradas do Google Imagens.

conclusão que Zenão talvez queria demonstrar, pois mesmo que o número de etapas tendesse ao infinito, a distância entre Aquiles e tartaruga apenas seria um número muito pequeno, mas nunca 0. O segredo para resolver o problema está em observar que os valores da distância $\overline{P_1P_2}$ seguem uma progressão geométrica infinita de razão $1/10$. Sendo assim, considerando a como o primeiro termo desta progressão e q a razão, podemos utilizar a expressão para se calcular a soma dessas distâncias, obtendo:

$$\frac{a}{1-q} = \frac{100}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{\frac{9}{10}} = \frac{1000}{9}$$

O resultado obtido parece estranho, mas não é. Apesar da fração obtida representar uma dízima periódica infinita, o resultado dessa dízima é um número finito racional: $1000/9$. Este processo infinito que resulta em algo finito é chamado de *infinito real* (também conhecido como *infinito atual* ou *infinito em ato*) e mostra que, nesse caso, Aquiles alcançaria a "veloz" tartaruga quando atingisse aproximadamente $111{,}11\,m$ ou, precisamente, em $111{,}\overline{11}\,m$. Dessa forma, podemos imaginar que o possível significado produzido por Zenão foi imaginar que o tempo ou a distância podem ser particionados de forma discreta, o que sabemos que não é possível. O tempo e a distância entre os dois competidores ocorrem simultaneamente, possibilitando que Aquiles alcance e ultrapasse a tartaruga, e não deve ser tratado como um jogo de turnos em que uma das peças se move e somente então a outra realiza seu movimento.

O mesmo problema pode ser resolvido ao observar a passagem de tempo de cada etapa, a qual mesmo também tendendo ao infinito, resulta em um número finito. Outra alternativa é observar que a sequência de distâncias pode tender a 0 quando calculado seu limite com o número de etapas tendendo ao infinito, mas não detalharemos essas abordagens nesse texto. O importante é mostrar que, se seguirmos o pressuposto de que Zenão tinha a intenção de provar a impossibilidade do movimento, concluímos que há uma incoerência em sua problematização, pois embora ele e muitos de sua época não acreditassem que um número infinito de etapas pudesse resultar em algo finito, sabemos que matematicamente isso é possível e já está bem estabelecido entre os matemáticos. No entanto, se sua intenção era provar a indivisibilidade do tempo e do espaço, uma vez que supor o contrário causaria coisas absurdas como uma pessoa nunca vencer uma tartaruga em uma corrida, talvez Zenão tenha sido feliz em seu paradoxo.

A infinitude de Deus

No livro “O mistério do Alef” escrito por Aczel (2003), é mencionado um momento após a destruição do Templo de Jerusalém pelos romanos no ano 70 d.C. e a proibição do estabelecimento de judeus no local, fazendo com que esses tivessem que se dispersar pela Judeia, uma região que ficava ao redor de Jerusalém. Para substituirem os antigos sacerdotes do templo, surgiram os primeiros rabinos, os quais fundaram uma escola de estudos (ACZEL, 2003). Entre esses rabinos, se destaca o rabi Iossef bem Akiva (50-132 d.C.).

Akiva foi o responsável por escrever uma série de tratados chamada “O caminho da Carruagem”, em nosso idioma.

> Seus escritos ensinavam aos fieis um novo tipo de espiritualidade, por meio de um método que consistia em criar imagens visuais de lugares celestiais, com o propósito de induzir à meditação e, através dela, à proximidade com o Divino (ACZEL, 2003, p. 30).

Tais práticas criadas por Akiva prometiam ser intensas a tal ponto que prometiam experiências fortes demais para a mente humana. Para se ter uma ideia, uma dessas experiências oferecidas por Akiva permitia a visualização dos discípulos de uma luz infinitamente brilhante, representando o manto que cobria Deus quando esse se encontrou com Moisés no monte Sinai (ACZEL, 2003). Aczel (2003) comenta sobre uma história em que durante uma das sessões de Akiva com mais três amigos, todos os quatro conseguiram atingir um desses locais celestiais.

> A experiência foi tão intensa que o primeiro, o rabi Ben Azai, fitou a luz infinita e morreu: sua alma ansiou tanto pela fonte da luz que imediatamente desfez o corpo físico e deixou de existir. O segundo, o rabi Ben Abuia, fixou o olhar na luz divina e viu dois deuses em vez de um. Ele se tornou um apóstata. O terceiro, o rabi Ben Zoma, olhou de relance para a luz infinita do manto de Deus e perdeu a razão, pois não pode reconciliar a vida ordinária com a visão. Somente o rabi Akiva sobreviveu à experiência (ACZEL, 2003, p. 30).

No século seguinte essas práticas passaram a ser chamadas de Cabala, de modo que seus ensinamentos se espalharam de boca em boca de forma sigilosa, pois naquela época isso era considerado misticismo, além de que a experiência prometida pela prática do cabalismo era intensa e perigosa demais para uma pessoa comum. Em 1280, um cabalista espanhol reuniu tudo o que se conhecia sobre a Cabala para escrever um livro, o *Zohar*, que significa “esplendor” ou “luz intensa”, representando a luz da infinidade de Deus (ACZEL, 2003).

Com o tempo o *Zohar* foi se propagando e a prática da Cabala passou a ser permitida para mais pessoas. Tudo isso fez com que o cabalismo se tornasse mais refinado fazendo com que seus praticantes estabelecessem alguns elementos essenciais dentro dessa tradição.

Na Cabala foram estabelecidos dez *sefirot*, dez conjuntos de qualidades para o Divino. O número 10 surge das permutações do nome de Deus em hebraico, a qual possui quatro letras de modo que cada uma representa um mundo. Quem deseja se aproximar de Deus, deve saber seguir esses preceitos, pois por trás das dez *sefirot* está Deus, tão vasto e tão supremo que os cabalistas não conseguem descrevê-lo, por esse motivo o atribuindo o nome *Ein Sof*, significando "infinito". (ACZEL, 2003). Portanto, sendo impossível compreender a infinitude de Deus, os cabalistas criaram as dez *sefirot* como aspectos finitos de Deus, o que gerou certa polêmica. Os cabalistas passaram a ser acusados de políteísmo, pois como poderia Deus ser finito e infinito ao mesmo tempo? Sobre isso, Aczel (2003) afirma que, "segundo os cabalistas, Deus, o *Ein Sof*, é infinito, mas as *sefirot* são parte Dele, formando uma unidade 'assim como a chama se junta ao carvão'. Embora as *sefirot* pareçam ter existência múltipla, todas são uma e fazem parte do Infinito" (ACZEL, 2003).

Hoje em dia é conhecido pelos matemáticos que se tratando de infinto o todo não é necessariamente maior que suas partes. No entanto, esse tipo de visão de infinito ainda passava longe da concepção que os cabalistas tinham sobre esse conceito.

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS)

Antes de apresentar o MCS discutimos o que entendemos por epistemologia para que o leitor possa compreender melhor nosso posicionamento em relação à essa pesquisa. Assumimos a definição de Lins (1993) em que "epistemologia é a atividade humana que estuda as seguintes questões: (i) o que é conhecimento?; (ii) como é que conhecimento é produzido?; e, (iii) como é que conhecemos o que conhecemos?" (LINS, 1993, p. 77).

Lins (1992) propõe em sua tese o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) a fim de responder tais perguntas. Suas ideias acerca desse modelo são resultado de suas inquietações ao querer saber o que os alunos estavam pensando quando "erravam", no entanto, sem recorrer a ideia de erro (LINS, 2012). Com isso, o MCS parte de discussões de Piaget e Vygotsky onde ora o *outro* é secundário e ora o *objeto* é secundário, resultando em um modelo epistemológico em que o sujeito, o objeto e o outro são elementos básicos, e não podem ser reduzidos uns aos outros (LINS, 1993).

Ao apresentar esse modelo, pretendemos promover um estudo epistemológico com o objetivo de compreender *de onde o outro está falando*. Com isto, apresentamos no decorrer dessa seção algumas noções que consideramos essenciais tanto para o MCS quanto para essa pesquisa, baseando-se em leituras de trabalhos produzidos por Lins (1993, 2012) e por discussões realizadas em grupos de estudos.

No entanto, antes de discutir essas noções, apresentamos um exemplo para contextualizar e justificar a necessidade de um modelo como o MCS.

Um exemplo inicial

Imaginemos a seguinte situação. A professora de matemática está ensinando o conteúdo de dízimas periódicas aos seus alunos após terem iniciado frações decimais e, em uma de suas aulas inicia o seguinte diálogo:

Professora: Como podemos escrever 1,23 (e escreve o número no quadro) em forma de fração?

Classe: 123/100! (respondem em coro)

Professora: E o número 0,2323 ...? (escreve novamente)

Classe: 23/99! (respondem sem dificuldades)

Por fim, a professora pergunta

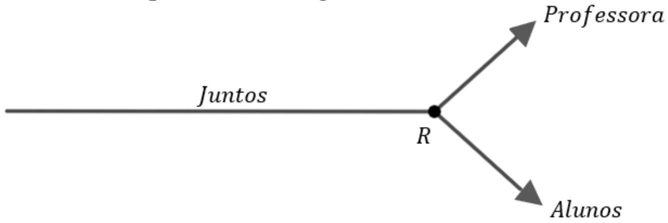
Professora: E o número 0,999 ...?

O silêncio toma conta da classe. A professora não entende. Ela ensinou corretamente seus alunos a representar dízimas periódicas como frações. O que há de errado então? Finalmente um dos alunos toma coragem.

Aluno 1: Professora, eu acho que dá 1, mas acho que está errado.

O que podemos retirar desse diálogo? Primeiramente, vamos tomar a professora e esse aluno representando a classe como dois sujeitos cognitivos distintos, de modo que no início da conversa podemos afirmar que estão conversando um com o outro e se entendendo, até o momento em que não se entendem mais. Essa situação, de acordo com Lins (1993), poderia ser representada pela Figura 2.

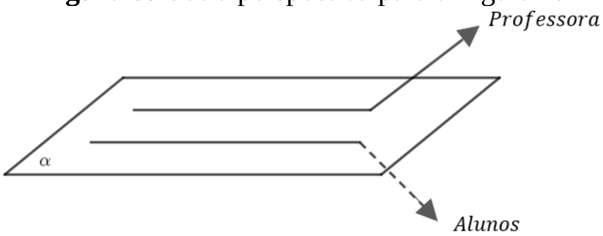
Figura 2 : Diálogo em sala de aula.



Fonte: Adaptado de Lins, 1993.

O ponto R na Figura 2 indica a ruptura que houve durante o diálogo. No entanto, podemos supor que os alunos não estão com dificuldades em utilizar as técnicas ensinadas pela professora, uma vez que um deles disse achar que a dízima periódica $0{,}999\ldots = 1$ (apesar de não acreditar em si mesmo). Sendo assim, Lins (1993) sugere que olhemos a Figura 2 por outra perspectiva. Para isso, imaginemos que essa figura na verdade está sob um plano α, de modo que ao invés dos diálogos irem para dois lados diferentes, na verdade estão indo para cima e para baixo. Assim chegamos à Figura 3.

Figura 3: Outra perspectiva para a Figura 2.



Fonte: Adaptado de Lins, 1993.

O modelo apresentado na Figura 3 sugere que na verdade desde o início, tanto a professora quanto os alunos já estavam seguindo caminhos diferentes em seus diálogos. Isso poderia ser justificado se pensarmos que enquanto os alunos se baseiam nas técnicas que sua professora ensinou para representar as dízimas periódicas como frações, a professora se baseia no conceito de infinito atual (quando um processo infinito pode resultar em um número finito), e por isso o desencontro em seus diálogos.

Essa mudança de perspectiva nos permite compreender um pouco melhor de onde cada um dos sujeitos está falando, quais são as crenças que os permitem dizer o que dizem e o que os autorizam a dizer o que dizem. Em outras palavras, o MCS nos permite uma maneira diferente de se analisar a produção de conhecimento de um sujeito cognitivo. Mas se estamos falando de produção de conhecimento, o que seria conhecimento então no MCS?

Conhecimento

Conhecimento é um par-ordenado em que a primeira coordenada é dada por uma crença-afirmação, e a segunda coordenada sendo a justificação. Em outras palavras, conhecimento é quando o sujeito enuncia algo em que acredita, baseando-se em algo que o autoriza a dizer o que diz. Neste sentido a justificação não precisa ser explicitada, mas é essencial quando pensamos neste modelo, pois isso pode diferenciar o conhecimento de um adulto e de uma criança quando ambas afirmam que $2 + 4 = 4 + 2$, uma vez que enquanto um pode se basear em propriedades aritméticas da soma, a outra pode se basear apenas pelos dedos em suas mãos que quando trocadas de lugar ainda resultam em 6. Portanto, o que diferencia um conhecimento do outro é a justificação que cada sujeito assume para a sua crença-afirmação.

Por exemplo, vamos supor que após o diálogo apresentado entre a professora e seus alunos, a professora pedisse para que seus alunos se dividissem em dois grupos a fim de pesquisarem e discutirem a afirmação $0,999\ldots = 1$, a qual deveria ser justificada na próxima aula por eles mesmos. No dia seguinte, são escolhidos um representante de cada grupo, de modo que o grupo 1 justifica a igualdade da seguinte maneira no quadro:

$$0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1.$$

O representante do segundo grupo diz terem encontrado uma justificação diferente, e escreve no quadro:

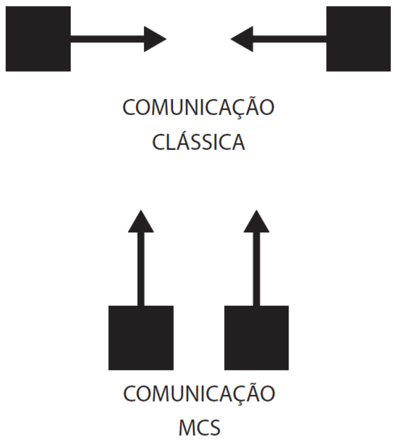
$$x = 0,999\ldots \implies 10x = 9,999\ldots \implies 10x = 9 + 0,999\ldots \implies 10x = 9 + x$$
$$10x - x = 9 \therefore x = 1$$

Em ambos os casos foram apresentadas justificações diferentes para a mesma enunciação, pois enquanto o primeiro grupo se baseou em progressões geométricas infinitas, o segundo grupo utilizou operações algébricas. Seguindo a definição de epistemologia de Lins (1993) cada caso representa um conhecimento diferente devido a diferença de suas justificações, e ambas são válidas dentro do contexto em que estão inseridas. É possível afirmar que ambos os sujeitos constituíram objetos "dízima periódica" atribuindo um significado diferente para cada objeto constituído. Quando dizemos alguma coisa sobre *algo*, o que estamos fazendo é produzindo um (ou mais) significados para este *algo*. Dessa forma, este *algo* se torna um *objeto* dentro de um campo semântico no qual somos produzidos e instituídos de modo que nossos significados sejam legítimos. Sendo assim, não podemos dizer que existe "o" significado para um objeto, uma vez que este dependerá do contexto em que se fala do objeto.

Interlocutor

"O interlocutor é uma direção na qual se fala. Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação que me autoriza a dizer o que estou dizendo" (LINS, 2012, p. 19). Este interlocutor não é necessariamente um ser biológico, mas sim um sujeito cognitivo instituído por quem enuncia. Apesar de ser comum imaginarmos que no diálogo inicial existe uma conversa entre a professora e os alunos, o MCS admite que na verdade o diálogo acontece de acordo com a Figura 4.

Figura 4: Comunicação no MCS.



Fonte: Lins, 2012.

Na perspectiva do MCS "'comunicação' não corresponde mais a algo do tipo 'duas pessoas falando uma para a outra', e sim a 'dois sujeitos cognitivos falando na direção de um mesmo interlocutor'" (LINS, 2012, p. 24).

Sendo assim, o que podemos extrair daquele diálogo é que o que inicialmente parecia ser a professora e os alunos falando na direção de um mesmo interlocutor, no final acabou se mostrando que desde o início os interlocutores eram diferentes, e o que diferenciou isso foi a justificação que cada um deles atribuiu para a afirmação 0,999 ... = 1. Por esse motivo, na perspectiva do MCS podemos dizer que não houve comunicação, mas sim apenas uma interação entre os sujeitos.

Autor-Texto-Leitor

Ao produzir um enunciado, assumimos o papel de o autor, o qual fala na direção de um leitor, o qual foi criado pelo o autor. Quem produz significado para o enunciado é o leitor, que fala na direção de um autor, o qual foi criado pelo o leitor. Ambos um autor e um leitor podem ser associados à papeis que os interlocutores podem assumir.

Um exemplo pode ser dado quando digo que, assumindo o papel de o autor, escrevo esse texto para um interlocutor (um leitor) que instituí, o qual seria capaz de legitimar e reproduzir as mesmas coisas que enunciei durante a escrita. Sendo assim, o que escrevi se torna um resíduo de enunciação, ou seja, algo que quem lê acredita ter sido dito por alguém. Essa pessoa que lê está assumindo o papel de o leitor ao mesmo tempo em que institui um autor, a fim de tentar entender de onde um autor estava falando quando produziu estes enunciados. Qual era o contexto cultural, social e pessoal que lhe fizeram dizer o que ele disse?

Após este conceito, parece viável apresentar o conceito de legitimidade.

Legitimidade/Verdade

Na perspectiva do MCS, não tomamos a palavra "verdadeiro" no sentido de atributo para algo que foi dito, mas sim como um atributo do conhecimento produzido. Já as legitimidades podem ou não serem atribuídas aos modos de produção de significado. Como consequência podemos dizer que todo conhecimento é verdadeiro, mas não necessariamente é legítimo (LINS, 2012).

Podemos pensar em um exemplo bem simples que expresse o significado destes dois termos. Se a professora escreve no quadro que $2 \times 2 = 2 + 2 = 4$, um dos alunos pode querer dizer que $3 \times 3 = 3 + 3 = 6$. Isto porque o conhecimento que produziu está associado a justificação de que um número vezes ele mesmo é o mesmo que o dobro desse número. Esse conhecimento é verdadeiro para o interlocutor que o aluno criou, ou em outras palavras, dizemos que esse conhecimento é verdadeiro localmente. Agora, o que aconteceria se esse aluno contasse seu pensamento para sua professora? Certamente que ela acharia tal raciocínio um absurdo e diria que seu apontamento não é verdadeiro, ou seja, o conhecimento que produziu é verdadeiro localmente, mas não é legítimo para a cultura que está inserido naquele momento: a Matemática. Cabe então à professora apresentar a sua justificação do porquê associou a multiplicação com a soma, e cabe a esse aluno tornar essa justificação da professora sua também, para que possa fazer parte dessa cultura.

Por conta disso, talvez você possa imaginar que o que determina o que é ou não legítimo são seres biológicos que em um certo período do tempo instituíram um interlocutor comum que determina a Matemática como ela é, de modo que "absurdos" do tipo $3 \times 3 = 6$ não são permitidos. E se o desejo desse aluno é ser aceito por esta cultura, cabe a ele seguir as regras do grupo. No entanto, tais situações como a descrita sobre esse aluno são necessárias para que ocorra o avanço, caso contrário a Matemática ainda seria feita apenas com desenhos em paredes de pedra. Isso pode ser um dos gatilhos para se pensar sobre a importância da "diferença" como oportunidade de aprendizagem.

Todos os termos apresentados anteriormente nos fornecem a base para apresentar Campo Semântico.

Campo Semântico

Quando o aluno disse que $3 \times 3 = 6$, ele o fez porque no mundo que criou existe um interlocutor que permitiu tal afirmação baseando-se nos enunciados de sua professora. Nesse mundo foi instituída uma regra em que "$a \times a = 2a$" e isso é verdadeiro localmente. Já o interlocutor da professora está em um mundo criado por ela em que a afirmação $2 \times 2 = 2 + 2 = 4$ se baseia na regra instituída localmente por ela (e globalmente pela cultura Matemática) sendo esta "$a \times b$ igual a soma de a, b vezes" ou vice-versa. Sendo assim, esse "mundo" criado pela professora e aluno são chamados de campos semânticos. De maneira mais formal,

> Um campo semântico, de modo geral, é como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo e mesmo serem diferentes para os vários jogadores dentro de limites; que limites são estes, só sabemos a posteriori: enquanto a interação continua, tudo indica que as pessoas estão operando em um mesmo campo semântico (LINS, 2012, p. 17).

Outra "definição" dada ao campo semântico é "um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade" (LINS, 2012, p. 17). O núcleo do campo semântico são as estipulações locais que fazemos e não necessariamente precisam de uma justificação. Por exemplo, em uma comunidade de matemáticos não seria necessária a explicação do porquê $9 + 7 = 8 + 8$, diferente do que aconteceria com uma criança que está começando a aprender adição. Já o termo atividade assume um significado diferente do usual.

O termo atividade utilizado no MCS parte do significado atribuído por Leontiev e utilizado aqui de forma muito mais superficial do que a discutida pelo autor em seus trabalhos. De forma simples, dizemos que uma atividade é quando uma necessidade se encontra em um objeto, tornando-se então um motivo. Por exemplo, no momento em que a professora fez perguntas aos seus alunos, ela criou uma necessidade neles a qual podemos dizer que seria “responder a pergunta”. O objeto é a resposta dessa pergunta e, ao aceitarem essa proposta, transformam esse objeto em um motivo o qual movimenta a interação entre os sujeitos.

Com isso, o modelo parece viável e pertinente quando buscamos uma maneira de entender o que leva um sujeito a dizer ou afirmar determinadas coisas, mas sem depender da ideia de “erro”. Em outras palavras, o MCS apresenta um ponto de vista em que, querendo saber de onde o outro está falando, levantamos as possíveis motivações de determinados comportamentos que aparentemente parecem não ter justificativa ou até mesmo “absurdos” levando-se em consideração uma comunidade científica em questão. Como é o caso da afirmação feita pelo aluno ao afirmar que $3 \times 3 = 6$. Por mais que a professora soubesse que o aluno estava errado, é interessante que ela também saiba o porquê de ele ter dito isso.

Após apresentar a base teórica que movimentou essa pesquisa, expomos duas das questões[8] abordadas no questionário elaborado. Tais questões seguem inicialmente na próxima seção como possíveis direções de interlocução que o aluno pode ter ao responder as questões, seguido então das análises dos resíduos de enunciação obtidos na seção subsequente.

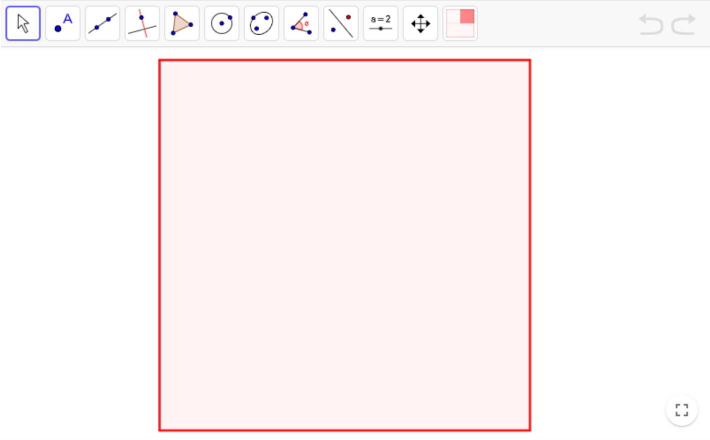
Apresentação das questões

Preenchendo o quadrado

Esta questão foi elaborada a partir da discussão de um dos paradoxos geométricos propostos por Eli Maor em seu livro *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite* (Ao Inifnito e além: Uma História Cultural do Infinito). A construção feita no GeoGebra é apresentada na Figura 5.

[8] O questionário completo pode ser acessado em https://ogeogebra.com.br/permanente/questionario.php.

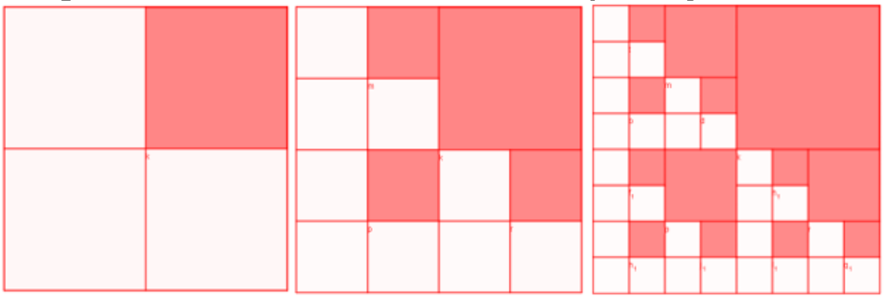
Figura 5: Construção da questão "preenchendo o quadrado".



Fonte: Produzida pelos autores.

A partir da construção apresentada ao aluno, ele deve utilizar a ferramenta *Preenchimento* criada e apresentada na última ferramenta da barra de ferramentas, como pode ser vista na Figura 5. Essa ferramenta divide o quadrado em quatro novos quadrados de modo que um fique preenchido e os outros três não. Ainda com a ferramenta, é possível realizar quantas iterações o aluno achar necessárias a fim de responder as questões elaboradas. A Figura 6 apresenta o quadrado com uma iteração, duas iterações e três iterações, respectivamente.

Figura 6: Quadrado com uma, duas e três iterações, respectivamente.



Fonte: Produzida pelos autores.

Com as manipulações feitas pelo aluno, elaboramos a seguinte questão: é possível pintar o quadrado totalmente utilizando este processo? Por que?

Nosso objetivo com esta questão é verificar os enunciados apresentados pelos alunos sobre a viabilidade de se preencher o quadrado utilizando o recurso que lhes foi apresentado. No entanto, vale ressaltar que a conclusão não é tão trivial quanto parece, uma vez que há a possibilidade de interlocução do aluno ao responder que o quadrado não será preenchido, pois por mais que a ferramenta fosse utilizada sempre restaria um espaço em branco sobrando.

Uma das possíveis direções de interlocução para essa questão e que vai ao encontro da cultura matemática é resolver esta questão da seguinte maneira: consideremos a área total do quadrado sendo 1 unidade de área. Assim, na primeira iteração temos 1 quadrado preenchido de um total de 4, representando então $1/4$ da área total preenchida. Já na segunda iteração temos 3 quadrados não preenchidos de um total de 16, representando então $3/16$ da área preenchida e, na terceira iteração, temos 9 quadrados não preenchidos de um total de 64, representando $9/64$. Dessa maneira, percebemos que a área total preenchida segue uma sequência p_n expressa por

$$p_n = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \dots, \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

cuja soma s é

$$s = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \cdot \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots\right]$$

Seguindo o mesmo raciocínio apresentado para resolver o Paradoxo da Dicotomia, temos que s é uma série geométrica convergente com primeiro termo $a = 1/4$ e razão $r = 3/4$. Logo, sua soma s é dada por

$$s = \frac{a}{1-r} = \frac{1/4}{1-3/4} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

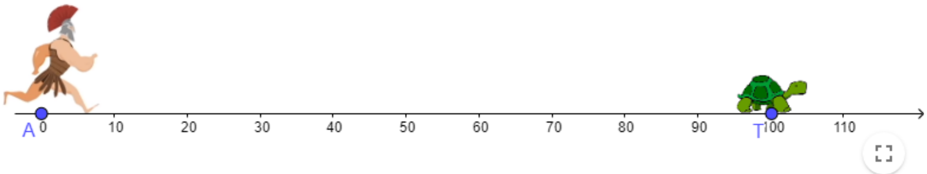
ou seja, a soma das áreas dos quadrados pintados é igual a área total do quadrado.

Outro possível significado para a questão surge ao analisar a área total de quadrados em branco na construção, mas omitiremos essa abordagem pois consideramos a primeira suficiente para um estudo nessa seção.

A corrida do século

Esta questão foi elaborada a partir de um dos Paradoxo de Zenão, o qual já foi devidamente apresentado e discutido na primeira seção desse artigo. No questionário a questão foi apresentada da seguinte forma: “Certa vez uma tartaruga desafiou o veloz Aquiles para uma corrida. Aquiles, sabendo que é dez vezes mais rápido do que a tartaruga, aceitou o desafio, deixando até mesmo uma vantagem de 100m para a tartaruga antes de iniciar a corrida. O desenho abaixo ilustra esta história” (Figura 7).

Figura 7: Construção da questão “a corrida do século”.



Fonte: Adaptado a partir de imagens do Google Imagens.

Em seguida, o enunciado continua: “Segundo Zenão, Aquiles nunca venceria esta corrida, pois quando ele alcançasse o ponto de onde a tartaruga partiu, esta já teria avançado uma certa distância a sua frente, e quando Aquiles alcançasse este novo ponto onde a tartaruga estava, ela já teria avançado mais um pouco a sua frente. Zenão afirma que obviamente esta série seria interminável, pois a tartaruga sempre estaria alguma distância a frente de Aquiles por menor que seja esta distância”.

Após o enunciado, o aluno é questionado sobre sua crença em relação ao argumento apresentado por Zenão e convidado a apresentar uma justificação para sua resposta.

Apesar da possibilidade de o aluno saber que é impossível que Aquiles não alcance a tartaruga (pois isso iria contra qualquer racionalidade de seu dia a dia) também é plausível que o mesmo também seja levado a acreditar que a afirmação feita por Zenão é legítima por pelo menos dois motivos: (i) o resultado encontrado para a distância em que Aquiles alcança e logo após ultrapassa a tartaruga é $1000/9$, ou seja, uma dízima periódica. Isso pode levar a conclusão de que não é possível representar uma distância com infinitas casas decimais em uma reta, o que mesmo sendo impossível a olho nu, hoje em dia existem recursos tecnológicos suficientes que facilitam a representação desses valores na reta numérica e até mesmo manualmente por construção. (ii) A forma como o enunciado é apresentado por Zenão (e também na questão) pode provocar a falsa conclusão de um movimento não contínuo, em que os personagens Aquiles e Tartaruga se movem de forma independente, o que sabemos não ser verdadeiro.

Ao abordar essas duas questões, apresentaremos na seção seguinte as análises dos resíduos de enunciação produzidos pelos interlocutores.

Análise dos resultados

Conforme o MCS sugere, buscaremos analisar todas as respostas dos alunos que responderam o questionário completamente, as quais serão apresentadas no decorrer dessa seção. Para omitir o nome dos alunos, utilizaremos abreviações do tipo *A1*, *A2*, e assim sucessivamente, para representar *Aluno1*, *Aluno2*, e assim por diante.

Produzindo significados: Preenchendo o quadrado

Quando elaboramos essa questão, esperávamos que o GeoGebra fosse o principal responsável por legitimar os possíveis significados produzidos pelos alunos. Diante dos resíduos de enunciação deixados por eles verificamos que isso aconteceu e que apenas um dos alunos disse ser possível pintar todo o quadrado, apesar de não saber quantas vezes tal comando deveria ser utilizado para isso. A resposta deste aluno segue integralmente na Figura 8.

Figura 8: Resíduo de enunciação de A11.

Sim, é possível pintar pois me parece que a ferramenta divide o quadrado maior em outros quadrados menores, mas teríamos que repetir muitas vezes esse comando.

Fonte: Produzido pelo aluno.

Os demais alunos tiveram uma direção de interlocução que vai ao encontro de uma das possibilidades de interlocução exposta anteriormente, associando a impossibilidade de preencher o quadrado com os espaços em branco que sempre vão existir por mais que a ferramenta seja utilizada várias vezes. Como exemplo, utilizamos os resíduos de enunciação de *A8*, a qual seguem na Figura 9.

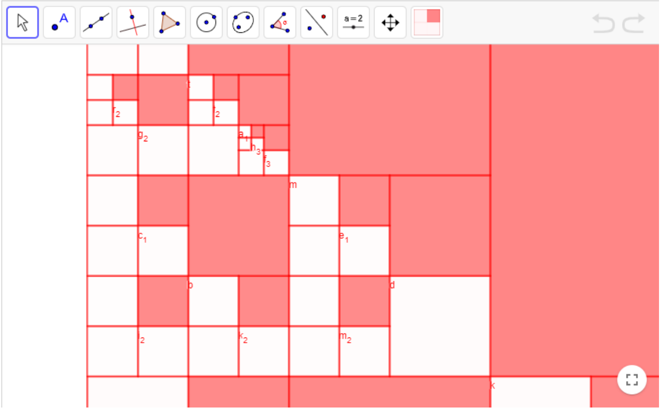
Figura 9: Resíduo de enunciação de A8.

Não, pois com a ferramenta utilizada sempre ficará quadrados sem pintar, mesmo aproximando a figura sempre veremos quadrados pintados.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Conforme observamos na Figura 9, podemos afirmar que o recurso *zoom* pode ter sido um dos recursos utilizados para justificar a sua crença-afirmação, o que é reforçado pela sua construção, conforme apresentamos na Figura 10.

Figura 10: Construção produzida por A8.



Fonte: Produzida pelo aluno.

Outro significado que produzimos para o resíduo de um dos alunos está associado a impossibilidade de se pintar toda a figura com fractais. Seu resíduo de enunciação é apresentado na Figura 11.

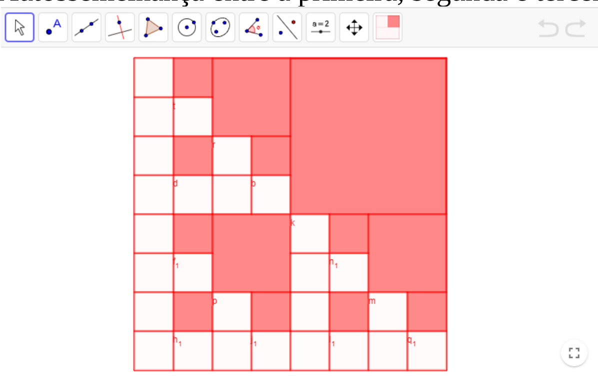
Figura 11: Resíduo de enunciação de A7.

> Não, pois podemos observar um padrão de preenchimento, logo em decorrência desta autossemelhança e desta complexidade infinita, nunca iremos atingir a área igual a área igual á área da figura inicial.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Quando estudamos a geometria dos fractais, duas das características que vemos sobre esta geometria são a *autossemelhança* e a *complexidade infinita* dos fractais. Basicamente, a primeira está associada ao padrão que as figuras tomam forma de modo que seja possível olhar para pequenas partes da mesma e verificar o mesmo padrão da figura toda, e isso pode ser visto na figura dessa questão quando analisamos uma parte da figura em qualquer iteração com a primeira iteração realizada. Um exemplo pode ser dado ao observarmos a construção realizada por *A1* em que a terceira iteração (quadrados pintados menores) se assemelha a segunda e a primeira iteração. Tal construção é apresentada na Figura 12.

Figura 12: Autossemelhança entre a primeira, segunda e terceira iterações.



Fonte: Produzida pelo aluno.

Já a *complexidade infinita* está ligada ao fato de o processo gerador do fractal poder ser repetido indefinidamente, como nesse caso, a ferramenta criada a qual gera a próxima figura a cada iteração e poder ser usada *ad infinitum*.

Devemos observar que a direção de interlocução de *A7* é legítima do ponto de vista do cotidiano, uma vez que seria impossível realizar infinitas iterações dentro de qualquer espaço de tempo (a não ser que fossem passadas de geração em geração indefinidamente, o que não parece muito viável). No entanto, a cultura matemática não legitima esse significado, uma vez que o matemático utiliza outros recursos de modo a mostrar que o limite da soma de todas as áreas é uma unidade conforme já abordamos no presente trabalho, estabelecendo um fim a esse processo infinito.

Produzindo significados: A corrida do século

Exploramos esse paradoxo em dois momentos nesse texto, desde as possíveis legitimidades de Zenão e um pouco da contextualização da época em que esse paradoxo foi proposto, até possíveis meios de se resolver o problema utilizando os recursos que temos disponíveis hoje com o avanço da matemática. Ainda, discutimos sobre possíveis direções de interlocução que os alunos poderiam seguir nessa questão levando em consideração o interlocutor que instituímos tanto para a elaboração quanto para a análise dos dados produzidos.

Podemos dizer que as direções de interlocução foram bem divididas nessa questão de modo que alguns alunos consideraram Zenão correto ao afirmar que Aquiles nunca alcançaria a tartaruga, enquanto outros afirmaram ser incorreta tal afirmação. As justificações de ambos os casos serão devidamente exploradas a seguir.

Partindo daqueles cuja crença-afirmação segue uma direção de interlocução contrária à afirmação de Zenão, conseguimos identificar três possíveis justificações presentes nos resíduos de enunciação dos alunos: a grandeza *tempo*, a grandeza *velocidade* e o senso comum. Alguns desses resíduos de enunciação seguem nas Figuras 13, 14 e 15.

Figura 13: Resíduo de enunciação de A1.

Eu acho que nesta situação está implícito outras grandezas que devem ser consideradas. Dado um intervalo qualquer de tempo, Aquiles sempre irá percorrer uma distância maior do que a tartaruga, o que demonstra que Aquiles irá alcançar a tartaruga em algum momento.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 14: Resíduo de enunciação de A8.

Acho que Aquiles alcançaria a tartaruga sim, porque no enunciado disse que ele é 10 vezes mais rápido que a tartaruga.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 15: Resíduo de enunciação de A11.

Penso que ele alcançaria dependendo da velocidade.

Fonte: Produzida pelo aluno.

A enunciação de *A1* é abrangente no início e expressa bem o que dissemos anteriormente sobre as justificações para não concordarem com Zenão: outras grandezas podem ser consideradas nesse cenário de modo a validar a vitória inevitável de Aquiles sobre a tartaruga. Ele mesmo cita uma dessas grandezas, tempo, somado ao fato de que o enunciado deixa claro que o veloz campeão é 10 vezes mais rápido do que sua adversária independente da velocidade exata que cada um possa correr e, portanto, não importa o intervalo de tempo tomado, isso é o suficiente para provar que Aquiles é mais veloz e em algum momento ultrapassaria a tartaruga.

Já *A11* recorre a grandeza velocidade. De acordo com o seu resíduo de enunciação acreditamos que ele parece não ter observado (ou simplesmente não considerou) que a relação de velocidade entre os dois competidores já está posta, pois não importa qual seja a velocidade de um, o outro sempre será 10 vezes mais rápido ou 10 vezes mais lento se pensarmos em uma relação contrária da tartaruga para Aquiles. No entanto, *A11* provavelmente sabe que se a tartaruga corresse a $10\ m/s$ então Aquiles correria a $100\ m/s$ e seria notável que em algum ponto do trajeto a tartaruga seria ultrapassada. Os valores destas grandezas são insignificantes quando só queremos saber se é possível pensar na vitória de Aquiles, mas são importantes quando desejamos saber em que ponto da corrida haveria uma ultrapassagem, o que fizemos anteriormente.

Por fim, *A8* não parece ter uma direção de interlocução voltada a grandezas matemáticas, cálculos de limites ou progressões geométricas para saber que a derrota da pobre tartaruga é inevitável já que o enunciado deixa claro que seu adversário corre 10 vezes mais rápido do que ela. Conforme já dissemos anteriormente, a chave é não pensar que os dois personagens se movem como peças em um tabuleiro onde uma precisa se movimentar primeiro para só então a outra se mover. Só assim o senso comum faz sentido nessa direção de interlocução e parece que *A8* não pensou em nenhum momento nessa possibilidade.

Agora, dentre os alunos que concordaram com Zenão, temos o resíduo de enunciação de *A6*, o qual parece apresentar duas direções de interlocução: em uma delas ele afirma que dadas as condições impostas por Zenão, Aquiles não venceria a tartaruga pois essa sempre estará a sua frente. No entanto, em outras condições de uma corrida justa com um ponto de partida e um ponto de chegada e os dois partindo do mesmo ponto, se Aquiles for mais rápido ele venceria a corrida. Seu resíduo de enunciação segue integralmente na Figura 16.

Figura 16: Resíduo de enunciação de A6.

Zenão está afirmando que Aquiles não venceria e impôs condições para que isso aconteça, se a tartaruga sempre está a frente Aquiles não vencerá. Mas se não levaremos em conta as condições estabelecidas por Zenão Aquiles vencerá por ser mais rápido que a tartaruga, já que para uma corrida acontecer deve ter um ponto de partida e um ponto de chegada e se Aquiles for rápido o suficiente para ultrapassar a tartaruga ele vencerá.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Dessa forma, podemos afirmar que para *A6* o único motivo de Aquiles não vencer a tartaruga é porque Zenão impôs condições para que isso não aconteça, independentemente da velocidade de Aquiles.

Outras possíveis justificações identificadas por nós nessa questão se dividiram entre a divisão infinita do espaço, o próprio enunciado e o movimento alternado entre os personagens. Comecemos pelos resíduos de enunciação de *A2* e *A3* os quais seguem nas Figuras 17 e 18.

Figura 17: Resíduo de enunciação de A2.

Concordo,ele não alcançaria,pois o espaço entre eles se divide infinitamente tendenciando a uma eterna derrota para aquiles.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 18: Resíduo de enunciação de A3.

Concordo, Zenão se referia a noção de ponto médio, cada vez mais que ele estivesse percorrendo o trecho, a tartaruga já teria uma certa distância a sua frente, então não conseguiria alcança-lo.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Analisando os resíduos das duas últimas figuras, podemos notar uma direção de interlocução semelhante em certo ponto, pois ambos acreditam que a vitória de Aquiles é impossível com a justificação da divisão do espaço percorrido e *A2* é enfático ao dizer que tal divisão é infinita, provavelmente sendo está uma outra justificação para a afirmação seguinte: "uma eterna derrota para Aquiles". Já o significado que produzimos para o resíduo de *A3* segue uma direção de interlocução que faz referência a uma questão que omitimos na presente pesquisa. Tal questão explora o conceito de ponto médio aplicado a outro Paradoxo de Zenão: a dicotomia. Dessa forma, o que *A3* sugere tanto naquela questão quanto nessa é que o fato desse percurso precisar ser dividido infinitamente impede que seja possível se partir de um ponto a outro ou, especificamente nesse caso, que Zenão alcance a tartaruga.

No entanto, notemos que *A3* utiliza o conceito de ponto médio (o que é válido na primeira questão citada) apesar do enunciado deixar claro que a velocidade de Aquiles é 10 vezes maior do que a velocidade da tartaruga e não 2 vezes. No entanto, acreditamos que isto é indiferente para o significado que provavelmente *A3* produziu, de modo que 2 vezes ou 10 vezes mais rápido não alterariam a crença-afirmação do aluno.

Os próximos resíduos de enunciação seguem nas Figuras 19 e 20.

Figura 19: Resíduo de enunciação de A4.

Não. Porque sempre a tartaruga estaria a frente de Aquiles à medida que Aquiles se aproximasse dele.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Figura 20: Resíduo de enunciação de A12.

Concordo com a afirmação de Zenão. Pois, matematicamente, por mais próximo que Aquiles chegue perto da tartaruga, nunca exatamente estará no mesmo ponto que ela.

Fonte: Produzida pelo aluno.

O resíduo de enunciação de *A4* expressa uma possível justificação pelo próprio enunciado. Enquanto alguns alunos apresentaram uma justificação pautada na velocidade de Aquiles ser maior do que a tartaruga resultando na vitória do primeiro sobre o segundo, *A4* segue uma direção de interlocução voltada às consequências de todo o contexto da corrida. Se a tartaruga está à frente desde o início então não há como Aquiles ultrapassá-la, pelo menos é isso que o texto tenta induzir o leitor a concluir.

Outra possível justificação é o movimento alternado entre os competidores, sendo plausível que se a tartaruga se movesse primeiro para só então Aquiles se mover, sempre haveria uma distância entre os dois, por menor que seja, mas haveria. E isso é o que *A7* expressa matematicamente em seu resíduo de enunciação, podendo ser observado na Figura 21.

Figura 21: Resíduo de enunciação de A7.

Não, nestas condições Aquiles vencerá a corrida pois a tartaruga sempre estará a uma distância à frente de seu oponente, sendo a distância igual a um décimo da diferença entre os competidores, ou algo como (T-A)/10.

Fonte: Produzida pelo aluno.

Vamos analisar como a expressão apresentada por *A7* opera no enunciado da questão. Supondo que no primeiro momento da corrida Aquiles esteja no ponto 0 e a tartaruga $100m$ à sua frente, teríamos $(100 - 0)/10 = 10$, ou seja, a distância entre os dois seria de $10m$, mas isso no segundo momento da corrida quando a tartaruga percorrer $10m$ e Aquiles $100m$. Nesse momento, teríamos Aquiles na posição $100m$ e a tartaruga na posição $110m$ e, portanto, $(110-100)/10=1$ seria a distância entre os dois no terceiro momento da corrida. Logo, o que a expressão de *A7* está representando é a distância entre os dois sempre no momento seguinte dessa competição. Sendo assim, a sequência das distâncias $\{10, 1, 0{,}1, \ldots\}$ nunca teria fim.

Considerações Finais

Queremos destacar um ponto que nos chamou a atenção durante as análises dessas duas questões especificamente, que é como o recurso *zoom* e o próprio enunciado aparecem nas direções de interlocução dos alunos em algumas questões. No primeiro caso, vemos claramente como o *zoom* é determinante na primeira questão, nas quais já esperávamos uma maior utilização desse recurso, uma vez que a sua utilização parece inevitável e necessária devido ao contexto exposto na questão.

Já no caso da justificação pelo próprio enunciado, notamos que na segunda questão essa direção de interlocução foi utilizada mais de uma vez. É interessante como o enunciado da questão influenciou direções de interlocução em dois sentidos: um afirmando que Aquiles é 10 vezes mais rápido do que a tartaruga, encerrando discussão de quem venceria a corrida não importando quanto a tartaruga começasse a frente, e outro que partia da conclusão de Zenão de que dadas as condições impostas por ele, Aquiles sempre estaria um pouco atrás da tartaruga e, assim, nunca venceria a corrida.

No entanto, achamos válido afirmar que tanto o *zoom* quanto o enunciado, apesar de termos afirmado que foram determinantes em alguns casos, não podemos dizer que os mesmos influenciaram a direção de interlocução de algum aluno, justamente por não termos dados o suficiente para isso. O que podemos imaginar é que, por exemplo, o *zoom* pode ter sido utilizado em um momento por um aluno e ter mudado a direção de interlocução que ele estava tomando anteriormente, direção essa a qual se chegou a existir nunca chegaremos a conhecê-la. Ao mesmo tempo o *zoom* pode ter servido como mais uma maneira de legitimar o que o aluno já estava pensando em um determinado momento. Como só tivemos acesso ao que achávamos que os alunos estavam dizendo quando falavam de infinito, certas afirmações se tornam impossíveis de serem feitas.

Por fim, o processo de leitura plausível foi determinante para tornar isso possível, pois evitamos priorizar modos de pensar infinito e nos abrimos às possibilidades de interlocução acerca desse objeto. Uma decisão que consideramos ter sido importante nesse processo de leitura foi considerar o aluno como alguém cujas legitimidades e significados são produzidos dentro de duas culturas, a acadêmica e a não acadêmica, onde certas direções de interlocução são mais possíveis do que outras. Outra possibilidade para se estabelecer esse interlocutor para o qual direcionamos nossa pesquisa seria considerar o ambiente em que o aluno está inserido, mas deixamos essa consideração em forma de um questionamento para futuras pesquisas: as direções de interlocução poderiam ser diferentes se esses alunos tivessem respondido ao questionário durante uma aula de Cálculo ou Análise Real, por exemplo?

Ressaltamos que o que apresentamos aqui não são as produções de infinito dos alunos, mas as produções de infinito que achamos que os alunos produziram quando falaram sobre infinito. No entanto, isso não diminui a importância que consideramos dessa pesquisa para a área da Educação Matemática, e esperamos que a mesma possa ajudar pesquisadores que desejem falar sobre infinito e GeoGebra ou infinito e Modelo dos Campos Semânticos.

Acreditamos que uma entrevista com esses ou outros grupos de sujeitos possa contribuir para essa pesquisa no sentido de complementar os resíduos de enunciação expostos aqui. Ao conversar com as pessoas, temos a liberdade de questionar as coisas que não conseguimos compreender devidamente somente pelos resíduos de enunciação observados, tornando possível uma maior proximidade com o interlocutor criado por ele no momento da enunciação, embora talvez nunca seja possível conhece-lo totalmente.

Referências

ACZEL, A. D. **O mistério do Alef:** A matemática, a Cabala e a procura do infinito. Tradução: Ricardo Gouveia. São Paulo: Globo, 2003.

LINS, R. C. Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista de Educação Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, ano 1, n. 1, p. 75-91, set. 1993.

LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. *et al.* (Orgs.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012, v. 1, p. 11-30.

MAOR, E. **To infinity and beyond:** a cultural history of the infinite. New Jersey: Princeton University Press, 1991.

MORRIS, R. **Uma breve história do infinito:** dos paradoxos de Zenão ao universo quântico.

Tradução: Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

ROQUE, T. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SALATTA, V. A., **Produzindo infinitos:** um estudo sob o olhar do Modelo dos Campos Semânticos. Orientador: Sérgio Carrazedo Dantas. 2021. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2021.

Recebido em: 31 de agosto de 2021
Aprovado em: 23 de dezembro de 2021