revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
10 ANOS

ANÁLISE DE ERROS NO CONTEÚDO DE ÁLGEBRA NO 8° E 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: ESTUDO DE CASO

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.24.442-464

Andreyna Beatriz Moreski Artuzo[1]
Fernando Riva[2]
Jaqueline Maria de Souza Albani[3]

Resumo: Neste estudo, analisamos e categorizamos as possíveis dificuldades de estudantes do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas de álgebra. A perspectiva adotada baseia-se na abordagem teórica da análise de erros, no ensino de matemática, e tem enquanto premissa a noção de que um erro pode revelar vários tipos de conhecimento implícito não necessariamente detectados em uma avaliação comum. Nesse sentido, propomos uma categorização de prováveis dificuldades vivenciadas por 17 alunos do 8º e 9º ano, em uma amostra de 48 discentes, a partir de "perguntas-modelo". A amostra inclui duas escolas públicas diferentes do interior do Estado do Paraná, sendo uma delas localizada na periferia do Município de Pato Branco e a outra na sua região central. Depois de analisar os exercícios respondidos pelos discentes e aplicar categorias geradas para cada grupo, sem desconsiderar o eventual peso de barreiras individuais, realizamos duas atividades lúdicas específicas, atentando-se ao tipo de dificuldade de cada grupo. Os resultados sugerem que as atividades lúdicas, especialmente, aquelas pensadas a partir das dificuldades do discente, ideia de situação proposta pela Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, podem auxiliar na compreensão e emergência de conhecimentos implícitos. Além disso, foram essenciais para despertar e elevar o interesse pela matemática, sobretudo, entre os estudantes cujo histórico de aprendizado havia sido de maior dificuldade em avaliações anteriores a esse estudo.
Palavras-chave: Erros. Ensino de álgebra. Matemática. Anos finais do ensino fundamental.

ERROR ANALYSIS IN THE CONTENT OF THE ALGEBRA IN THE 8th AND 9th YEAR OF ELEMENTARY SCHOOL: CASE STUDY

Abstract: The present study aims at analyzing and categorizing those possible difficulties of students from the 8th and 9th grades of the Brazilian Middle School while they were solving algebra problems. Our perspective is based on the theoretical approach of teaching mathematics through error analysis and takes into account the premise that an error can reveal several types of implicit knowledge not necessarily detected in a typical assessment. In this regard, we propose a categorization of probable difficulties experienced by 17 students from the 8th and 9th grades in a sample of 48 students relying on "model questions". The sample considered two different public schools in the countryside in the State of Paraná, being one of them localized on the outskirts of the Municipality of Pato Branco and in the central region. After reviewing the exercises solved by the students and applying the categories generated for each group, without ignoring the presence of individual barriers, we carried out two specific playful activities observing the type of difficulty of each group. The results suggest that recreational activities, especially those conceived for the student's difficulties, an idea of a situation proposed by the Theory of Conceptual Fields by Gérard Vergnaud, can help in the understanding and emergence of implicit knowledge. In addition, they were essential to arouse and increase interest in mathematics, especially among students whose learning history had been of greater difficulty in prior

[1] Acadêmica de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná / UTFPR – campus de Pato Branco, Via do Conhecimento, Km 1 - CEP 85503-390 - Pato Branco – PR. E-mail: andreynaartuzo@outlook.com.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8590-8768.
[2] Acadêmico de Licenciatura em Matemática, Universidade Cesumar - Unicesumar - campus de Maringá- PR – E-mail: fernandoriva10@hotmail.com - ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4870-3293
[3] Acadêmica de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná / UTFPR – campus de Pato Branco, Via do Conhecimento, Km 1 - CEP 85503-390 - Pato Branco – PR. E-mail: jaque_albani@hotmail.com - ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5344-1932

assessments to this study.
Keywords: Math Errors. Algebra and Learning. Mathematics. Final Years of the Middle School.

Introdução

O conceito de erro, quando pensamos no ensino de matemática, pode conter vários significados diferentes. Segundo as ideias de Cury (2008) o erro permite elaborar estratégias bastante específicas para servir de ferramenta didática para a construção do conhecimento, partindo de concepções equivocadas advindas dos estudantes. Dessa maneira, é possível discutir a respeito do que levou ao erro e como corrigi-lo, como corroborado no seguinte trecho:

> Como base nas sugestões para o uso dos erros, destaco a ideia de que o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabiliza as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre suas respostas (CURY, 2008, p. 98).

A análise de erros vai além de observar apenas a resposta final e uma tentativa de perceber o seu desenvolvimento completo. Com isso, buscamos compreender o pensamento do estudante e notar indícios de uma possível falha de aprendizagem. Cury e Silva (2008), por exemplo, realizaram um levantamento acerca desse método que parte do seguinte questionamento: “o que é certo?”

> Ao avaliar a resolução de um problema não somente pelo produto final mas especialmente pelo processo de solução, podemos analisar a forma como o aluno solucionou a questão, descobrindo suas estratégias, detectando dificuldades e tecendo hipóteses sobre os erros. Dessa forma, a análise de erros se torna uma ferramenta para a aprendizagem (BORASI, 1996)[4], permitindo ao professor planejar intervenções didáticas que revisem os conteúdos nos quais os alunos mostram dificuldades ou mesmo desafiá-los a explorar seus erros, para desestabilizar suas certezas (CURY; SILVA, 2008, p.87).

Além disso, aprender a analisar os erros leva o professor a despertar um pensamento crítico quanto à construção da resposta dos estudantes, distinguindo não apenas o que falta, mas o que o estudante sabe. Isso implica em analisar o que os alunos aprenderam significativamente, pois, a partir disso é possível haver uma intervenção didática mais eficaz (PEREIRA *et al*, 2016), que é tão importante quanto observar as dificuldades dos estudantes.

Porém, em muitos casos há uma crença, predominante no meio educacional, de que os acertos representam o aprendizado e os erros o seu oposto. Contudo, o acerto não é “sinônimo”

[4] BORASI, R. **Reconceiving Mathematics Instruction:** afocus on errors.Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

de aprendizado, da mesma forma como o erro representa uma falha em um pequeno ponto na aprendizagem e não no seu percurso como um todo. Cury (2008) apresenta uma visão que questiona o senso comum em relação aos erros na educação matemática:

> Não se trata, de forma alguma, de afirmar para o estudante: "O que você está fazendo é errado, o correto é de outra forma" ou de fazê-lo repetir, tediosamente, exercícios semelhantes. Sabe-se que essa atitude é ineficaz e gera, muitas vezes, uma rejeição à Matemática, porque o estudante, perdendo a confiança na sua capacidade de aprender, sente-se desestimulado [...] (CURY, 2008, p.80).

Por outro lado, de acordo com Pinto[5] (1998 apud FREITAS, 2002, p. 9) há inúmeras dificuldades para um professor conseguir identificar os erros em uma sala de aula, seja pelo seu tempo limitado de aula, seja por lecionar para um número muito grande de alunos. Também existe o fato da dificuldade em conseguir classificar os diferentes grupos de erros encontrados, que podem ocorrer individualmente ou coletivamente. Com isso, além da identificação ser difícil, encontrar um caminho para a desconstrução desse erro torna-se um desafio ainda maior, pois, cada indivíduo desenvolve uma habilidade de aprendizado, diferente dos demais, além de possuir experiências e realidades únicas. Desse modo, superar esse desafio é um trabalho que exige muita atenção e dedicação por parte do professor.

Ademais, compreender determinados tipos de erro, não é uma tarefa simples e linear. Trabalhos como os de Santos e Buriasco (2015), e outros derivados das mesmas autoras, adotam a perspectiva da Análise de Conteúdo de Bardin (2004), como um dos principais apoios metodológicos para análise da produção escrita dos estudantes, com o intuito de verificar a natureza da compreensão dos conceitos. Outra possível proposta seria aproximar-se de algumas teorias oriundas da psicologia para serem aplicadas à Educação Matemática. No trabalho de Kikuchi (2019), por exemplo, propõe-se a aproximação com a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud (1990), como referencial teórico, e a Teoria dos Modelos Organizadores de Pensamento de Moreno *et al*. (2000) - que citaremos simplesmente como "modelos organizadores" - como referência teórico-metodológica. A partir delas, sugere-se uma possível perspectiva de análise dos tipos de erros mais comuns encontrados na aprendizagem de álgebra.

A relevância de analisar os erros pela perspectiva da TCC reside na ideia de situação elaborada por Vergnaud (1990). E as situações podem ser divididas em duas classes:

---

[5] PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar**. 1998. Tese (Doutorado em Didática) - Faculdade de Educação, University of São Paulo, São Paulo, 1998. Disponível em: https://doi.org/10.11606/T.48.1998.tde-12022015-151819. Acesso em: 10 abr 2022.

1) Um tipo de classe de situação no qual o sujeito é capaz de aplicar suas competências de forma relativamente imediata;
2) Outro tipo de classe de situação na qual o sujeito precisa explorar, refletir e fazer tentativas para encontrar uma solução ou não.

Vergnaud (1990) ainda elabora que descrever as diferenças dessas duas classes de situações são muito importantes, pois ajuda a compreender a adaptabilidade do conhecimento de acordo com a ação tomada pelo sujeito. Isso permite-nos inferir que analisar os erros é o mesmo que tentar compreender o desenvolvimento e a transformação do conhecimento dos estudantes. Porém, muitas vezes, na Matemática, resumimos a avaliação da aprendizagem pela solução correta apresentada no final, mas pouco se discorre sobre o caminho percorrido pelo estudante, independentemente do resultado alcançado, o que limita a discussão sobre as dificuldades de aprendizagem em Matemática, por exemplo.

Dentro da classe de situações, ainda é importante compreender a atuação dos *esquemas* dentro de cada uma delas. *Esquemas* são um conjunto de conhecimentos ou elementos cognitivos mobilizados pelo sujeito para um determinado tipo de situação. Vergnaud também divide esses *esquemas* em *conhecimentos-em-ação* e *conceitos-em-ação*, diferenciando ainda que o primeiro são os elementos cognitivos mobilizados dentro de uma determinada situação e o segundo é a compreensão suficiente de um conceito para aplicabilidade na respectiva situação.

Desse modo, dependendo da classe de situações, os *esquemas* podem ser únicos, sucessivos ou reorganizados para serem acomodados em uma dada situação. Destacamos que, para Vergnaud, o *esquema* é mobilizado de acordo com a situação que gera algumas classes de conduta diferenciadas. Assim como nos modelos de Piaget, os *esquemas* são modelos de conduta adotados para interagir com o conhecimento. No entanto, na visão de Vergnaud, é enfatizada a variabilidade dessas condutas de acordo com cada situação.

Tais características da TCC são plenamente compatíveis com a construção do conhecimento matemático e, por isso, possui uma perspectiva aderente à área da Didática da Matemática. Alguns exemplos de discussões, dos últimos 12 anos, abarcando a perspectiva cognitiva e dos diferentes níveis de compreensão dos conceitos matemáticos, são os trabalhos de Guimarães e Freitas (2010); Barbosa e Magina (2012); Justo (2012); Figueiredo *et al*. (2014); Zanella e Barros (2014); Santana *et al*. (2015); Rezende e Borges (2017); Santos e Merlini (2018); Lima *et al*. (2019), Borges *et al*. (2020), Oliveira *et al*. (2020). No entanto, explicitar tais *esquemas*, tão subjetivos e individuais, não se trata de uma tarefa fácil. Como o professor pode analisar o que há de comum dentro de um coletivo?

Para tentar responder a essa pergunta, Kikuchi (2019) recorreu à utilização dos modelos organizadores que nasceu da influência piagetiana, assim como a TCC, mas com aplicações mais recorrentes na área de Linguagem e na área de Ensino de Física. No Brasil, os trabalhos mais conhecidos utilizando os modelos organizadores concentram-se predominantemente em torno do tema de cognição e afetividade representado pelos trabalhos de Arantes (2000) e Araújo (2013), pioneiros na área, e não se conhece ainda, até o momento da elaboração deste estudo, aplicação dos modelos organizadores na área de Educação Matemática, ao menos em língua portuguesa.

Segundo Kikuchi (2019), o principal fator que motivou a escolha dos modelos organizadores em sua pesquisa foi o fato de incorporar a evolução de conceitos incipientes para estruturas mais elaboradas do pensamento e ainda permitir uma análise coletiva, mesmo que partindo de uma premissa individual. E para contemplar tais complexidades, os modelos organizadores tiveram como inspiração os Modelos Mentais, de Johnson-Laird (1993), que permite estruturar estados gerais do pensamento de acordo com a experiência de mundo de cada sujeito (MOREIRA, 2002). Ainda, segundo Kikuchi (2019), tanto a Teoria dos Modelos Mentais quanto os Campos Conceituais de Vergnaud tiveram influências piagetianas em sua concepção e, por isso, há uma proximidade no trabalho com a questão cognitiva. Porém, cada uma dessas teorias diferenciam-se no tratamento do pensamento. Na teoria de Vergnaud, o foco está nas representações das operações específicas nas situações didáticas. Já os Modelos Mentais abordam uma teoria mais abrangente em termos de compreensão individual do mundo, seja dentro ou fora da escola.

Dessa forma, os modelos organizadores tornou-se uma opção metodológica que permite analisar, em termos da TCC, os *conhecimentos-em-ação* e *conceitos-em-ação* mobilizados pelos estudantes para resolução das atividades e, assim, permitir organizar quais são os *esquemas* necessários para cada tipo de habilidade exigida, o que nos pareceu bastante interessante para ser adotada como referência para as análises dos erros no conteúdo de álgebra, conforme proposto por este estudo.

Metodologia

A seguinte pesquisa decorreu com alunos do 8°e 9° ano do ensino fundamental de duas escolas diferentes. O primeiro local, que denominaremos como escola A, está localizado na periferia do município de Pato Branco no Paraná. Já a segunda, que denominaremos como escola B, localiza-se na região central do mesmo município. A escolha das respectivas escolas se deu pelo fato de já estarmos vinculados às escolas por meio do convênio estabelecido entre as escolas e a universidade da qual pertencemos.

Quanto às etapas de desenvolvimento do estudo, elas se deram em três momentos: na primeira etapa, que constituímos como o primeiro estudo piloto, aplicamos um questionário, composto por 12 questões, que estão divididas por tipos de habilidade, numeradas em algarismos romanos não sequenciais, que podem ser conferidas no quadro 01. Tal divisão foi originalmente feita por Krutetskii (1976), mas optamos pelo recorte feito por Kikuchi (2019), selecionando apenas as questões que envolviam diretamente as habilidades que envolvem o conteúdo de álgebra. No quadro 01, também é possível observar os tipos de campos conceituais envolvidos em cada questão para ajudar na correlação de habilidades mobilizadas e na posterior elaboração das perguntas-modelo, que detalharemos mais adiante.

Quadro 01: Questões aplicadas no primeiro estudo piloto.

Série	Enunciado das questões aplicadas no estudo piloto	Campos Conceituais	Habilidade
I	***Leia os problemas a seguir e formule a pergunta do enunciado. Depois, tente resolver o problema.*** 1) Eu tenho um valor total de 140 reais guardados em dois cofres. Se eu transferir 15 reais de um cofre para outro, terei exatamente o mesmo valor em cada um destes cofres. 2) Um homem viveu por x meses.	Estruturas aditivas e algébricas	Percepção (interpretação)
II	***Leia o problema a seguir. Você notou algo diferente?* Explique.**Uma escola recebeu 80 notebooks separados em dois tipos de modelo. O mais simples custa 800 reais e o modelo mais avançado 1.000 reais. Quantos notebooks de cada tipo a escola recebeu?	Estruturas aditivas	Percepção (interpretação)
III	***Leia e resolva o problema a seguir. As informações expressas são suficientes? Explique quais você utilizou.*** Existem 40 veículos em um estacionamento entre carros e motocicletas. Ao todo existem 100 rodas e 40 volantes. Quantos veículos de cada tipo há neste estacionamento?	Estruturas aditivas e algébricas	Percepção (interpretação)
V	***Os problemas a seguir estão separados em seção B1 e B2.*** B1) Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos. **a)** $(a+b)^2 =$ **b)** $(1+\frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$ Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? E: item a com item $1. a^2+b^2 =$ $2. (\frac{1}{3}ab^3)^2+(2a)^2 =$ B2) Quais destas expressões algébricas podem ser resolvidas por meio da fórmula do quadrado da soma	Estruturas algébricas	Generalização de conceitos matemáticos

	de dois números? Explique o porquê. **a)** $(a+b)^2 =$ **b)** $a+b^2 =$ **c)** $a+2b^2 =$ **d)** $a^2+b^2 =$		
VIII	***Resolva os problemas a seguir:*** a) Dois operários trabalhando durante 9 horas produzem 243 peças. Um deles produziu 13 peças em 1 hora. Quantas peças o outro operário produziu em 1 hora? b) Qual a fórmula geral de um número ímpar?	Estruturas algébricas e multiplicativas	Generalização de conceitos matemáticos
IX	***Nos problemas a seguir, você será desafiado a provar as condições apresentadas pelos problemas ou resolver utilizando a lógica. Nos problemas para provar, tente explicar da forma mais detalhada possível o que você pensou.*** a) Complete os dígitos que estão faltando nesta soma. $\begin{array}{cccc} & & 4 & \_ \\ + & \_ & \_ & 2 \\ \hline & \_ & 0 & 1 \end{array}$	Estruturas aditivas e algébricas	Generalização de conceitos matemáticos
X	***Resolva o problema a seguir, preferencialmente, montando as equações algébricas. Se tiver dificuldade, tente explicitar da forma mais detalhada possível o seu raciocínio.*** A professora pediu a uma aluna para pensar em um número. Depois, pediu para somar 12 a ele e dividir esse resultado por 13. Porém, a aluna se confundiu e acabou subtraindo 13 ao número que pensou e dividiu o resultado por 12. Por sorte, chegou ao mesmo resultado. Em qual número ela pensou?	Estruturas algébricas	Generalização de conceitos matemáticos
XIX	***Resolva os problemas a seguir colocando o máximo de detalhes do raciocínio que usou para resolvê-lo.*** Em uma olimpíada de matemática, foram propostos 10 problemas. Cada participante receberá 5 pontos para cada problema corretamente e perde 3 pontos se for resolvido de forma incorreta. Quantos problemas foram resolvidos corretamentepor um aluno que recebeu 34 pontos no final? E para quem recebeu 10 pontos?	Estruturas aditivas e multiplicativas	Compreensão; raciocínio e lógica

Fonte: Os autores, adaptado de Kikuchi, 2019.

Quanto à seleção dos participantes da pesquisa, tanto na escola A quanto na B, a primeira etapa de aplicação contou com a participação voluntária dos alunos que resultou em 24 participantes em cada. Para a segunda etapa, participaram apenas os estudantes que apresentaram algum conteúdo que pudesse ser categorizado em alguma pergunta-modelo, conforme o procedimento teórico-metodológico dos modelos organizadores. Por exemplo, quando a maioria das questões foram entregues em branco ou com respostas vagas como “Não quero responder” ou “Não faço ideia” foram descartadas em nossa análise no primeiro momento.

As perguntas-modelo servem como forma de agrupar as respostas dos estudantes, que não chegaram em uma resposta correta, de acordo com a solução apresentada. Desse modo, a pergunta-modelo tem como objetivo proporcionar um *insight* ou dica para que o estudante possa, com suas próprias palavras, desenvolver o raciocínio e melhorar a sua resposta ou, ainda, chegar naquela correta.

A partir das respostas obtidas na primeira etapa, organizamos no quadro 02 alguns exemplos de respostas típicas que originaram aquela pergunta-modelo.

Quadro 02: Questões enriquecidas com as perguntas-modelo.

Série	Perguntas-modelo[6]	Enunciado das questões aplicadas no estudo piloto	Exemplo de resolução encontrada que originou a pergunta modelo
I	Você leu o enunciado? Tem certeza? Leia novamente!	***Leia os problemas a seguir e formule a pergunta do enunciado. Depois, tente resolver o problema.*** 1) Eu tenho um valor total de 140 reais guardados em dois cofres. Se eu transferir 15 reais de um cofre para outro, terei exatamente o mesmo valor em cada um destes cofres. 2) Um homem viveu por x meses.	1. $\frac{140-15}{125}$ R: Sim, 125 para cada cofre. **2.** X é como se fosse a letra do alfabeto. X para no número 24. Ou seja, 2 anos (24 meses)
II	Releia o enunciado, será que é isso mesmo para fazer?	***Leia o problema a seguir. Você notou algo diferente? Explique.*** Uma escola recebeu 80 notebooks separados em dois tipos de modelo. O mais simples custa 800 reais e o modelo mais avançado 1.000 reais. Quantos notebooks de cada tipo a escola recebeu?	$\frac{80}{2} = 40$ R: 40 modelos de cada tipo
III	Quais dados do problema você usou? Releia o enunciado da série e justifique sua resposta.	***Leia e resolva o problema a seguir. As informações expressas são suficientes? Explique quais você utilizou.*** Existem 40 veículos em um estacionamento entre carros e motocicletas. Ao todo existem 100 rodas e 40 volantes. Quantos veículos de cada tipo há neste estacionamento?	20 x 4 = 80 20 x 2 = 40 Há 20 veículos de cada tipo.
V	Como resolve uma potência? Ao resolver a potência com parênteses você notou alguma diferença no resultado	***Os problemas a seguir estão separados em seção B1 e B2.*** B1) Resolva as expressões a seguir aplicando o quadrado da soma de dois termos. **a)** $(a+b)^2 =$ **b)** $(1+\frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$ Após resolver as expressões acima, o que você pode afirmar sobre as expressões a seguir, comparando item a item? Ex: item a com item 1. 1. $a^2+b^2 =$ 2. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$ B2) Quais destas expressões algébricas	***B1)*** **a)** $a^2(a^2+b^2)b^2(a^2+b^{2)}$ $a^4+a^2b^2+a^2+b^2$ $a^4+a^2b^2+b^2$ **b)** $1(1+\frac{1}{2}a^2b^2(1+\frac{1}{2}a^3b^2)$ **1.** $1^2+2^2=7$ **2.** $\frac{1}{3} = 36+(21)^2 42$ ***B2)*** R:Letra C, por causa do número que facilita na resposta.

[6] Analisando *a posteriori*, avaliamos que, num estudo futuro, evitaríamos o uso de instruções imperativas e mais sugestivas em alguns casos.

		podem ser resolvidas por meio da fórmula do quadrado da soma de dois números? Explique o porquê. **a)** $(a+b)^2 =$ **b)** $a+b^2 =$ **c)** $a+2b^2 =$ **d)** $a^2+b^2 =$	
VIII	A: Quantas peças os dois operários produzem em 1 hora? B: Fórmula geral de um número par 2.k (k: constante)	***Resolva os problemas a seguir:*** a) Dois operários trabalhando durante 9 horas produzem 243 peças. Um deles produziu 13 peças em 1 hora. Quantas peças o outro operário produziu em 1 hora? b) Qual a fórmula geral de um número ímpar?	a) $\frac{273}{9}$=27 $\frac{27}{2}$=16 b) Pular 1 número, tipo 1 sim e um não.
IX	Analise que isso é uma SOMA.	***Nos problemas a seguir, você será desafiado a provar as condições apresentadas pelos problemas ou resolver utilizando a lógica. Nos problemas para provar, tente explicar da forma mais detalhada possível o que você pensou.*** a) Complete os dígitos que estão faltando nesta soma. $\begin{array}{cccc} & & 4 & \_ \\ + & \_ & \_ & 2 \\ \hline & \_ & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c} 49 \quad + \quad 5\,2 \\ \hline 0101 \end{array}$
X	Você pensou que isso pode ser uma equação?	***Resolva o problema a seguir, preferencialmente, montando as equações algébricas. Se tiver dificuldade, tente explicar da forma mais detalhada possível o seu raciocínio.*** A professora pediu a uma aluna para pensar em um número. Depois, pediu para somar 12 a ele e dividir esse resultado por 13. Porém, a aluna se confundiu e acabou subtraindo 13 ao número que pensou e dividiu o resultado por 12. Por sorte, chegou ao mesmo resultado. Em qual número ela pensou?	$\frac{13 - \_\_\_}{12}$ $\frac{\_\_\_ + 12}{13}$ R: Não consegui identificar o número.
XIX	Você pensou que isso pode ser um sistema de equações?	***Resolva os problemas a seguir colocando o máximo de detalhes do raciocínio que usou para resolvê-lo.*** Em uma olimpíada de matemática, foram propostos 10 problemas. Cada participante receberá 5 pontos para cada problema corretamente e perde 3 pontos se for resolvido de forma incorreta. Quantos problemas foram resolvidos corretamente por um aluno que recebeu 34 pontos no final? E para quem recebeu 10 pontos?	5c 3x = 8 5c 3x = 16 5c 3x = 24 5c 3x = 32 R: Acertou 4, errou 4 e acertou meia pergunta.

Fonte: Os autores, adaptado de Kikuchi, 2019.

Na escola A, selecionamos 18 estudantes para uma nova aplicação das mesmas questões, segundo os critérios citados anteriormente, incorporando as perguntas-modelo (quadro 02), com o objetivo de verificar se o aluno seria capaz de demonstrar novas mobilizações de conhecimento. Da mesma forma, na escola B, 12 estudantes foram selecionados para participar da segunda fase da pesquisa, mas, no dia da aplicação, um desses alunos selecionados estava ausente. Portanto, de 12 a participação contou com 11 alunos, totalizando 29 participantes na segunda etapa.

O método de elaborar perguntas-modelo é bastante útil no sentido de permitir que o estudante possa avaliar os próprios erros por meio dessa pergunta devolvida pelo pesquisador/professor. Tal procedimento vai ao encontro das ideias defendidas também por Polya (1978). Diferente de uma avaliação tradicional que considera se a resposta está certa ou errada, é um método mais qualitativo que permite ser incorporado durante o processo de aprendizagem de novos conceitos e também se mostra como uma forma complementar de avaliação dos educandos para o professor, já que é possível agrupar em categorias comuns, de acordo com o tipo de resolução apresentado pelos alunos.

No entanto, é importante ressaltar que, por ser um método qualitativo, as perguntas-modelo podem variar de acordo com a forma de interpretação do pesquisador/professor. Os modelos organizadores, conforme apresentado anteriormente, parte do pressuposto que o pensamento é algo fluido não sendo possível determinar categorias fixas ou arbitrárias *a priori*. Por isso, as categorias só nascem de acordo com os dados obtidos *a posteriori* e também a partir da experiência e interpretação do pesquisador/professor. Assim, os modelos organizadores permitem organizar de uma forma consistente a evolução do pensamento de cada estudante. Portanto, para a análise de erros, que engloba tanto características pessoais quanto razoavelmente coletivas, torna-se uma ferramenta bastante interessante para auxiliar na interpretação dos erros mais comuns cometidos pelos estudantes e, por meio dessa análise, elaborar propostas didáticas que possibilitem trabalhar com essas dificuldades, indo ao encontro com a ideia de situação de Vergnaud (1990).

Para a aplicação da terceira etapa da pesquisa, *a priori*, pensamos em dois caminhos possíveis: a aplicação de um novo conjunto de perguntas-modelo, de acordo com a análise das respostas obtidas dos 29 participantes, ou optar pela intervenção didática. A implementação da intervenção didática era prevista em nosso estudo, mas só não sabíamos **qual tipo** e em **qual momento** seria aplicada. Só teríamos condições de avaliar e definir após a aplicação do estudo piloto. E foi a partir dos dois resultados preliminares que decidimos que a terceira etapa deveria consistir numa intervenção didática, com uma atividade lúdica, constituindo-se como última etapa da pesquisa. A forma de determinar qual seria a etapa final da pesquisa também foi influenciada pelo calendário escolar das respectivas instituições.

Para selecionar os discentes que iriam participar da próxima etapa, levamos em conta se houve alguma modificação ou apresentação de novas informações em suas respostas que daria condições para prosseguir para a última etapa da pesquisa. Dessa análise, seis estudantes da escola A e os mesmos 11 participantes da escola B estavam aptos para a próxima etapa, resultando em 17 participantes para o estudo final, cujos detalhes de cada etapa discutiremos a seguir.

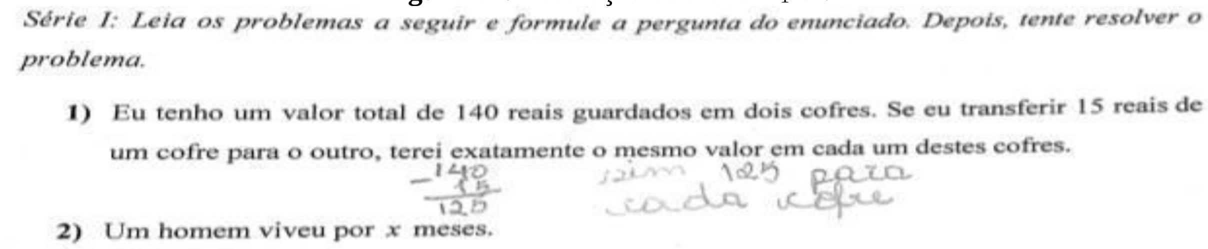
Discussão

Na primeira aplicação da escola A, correspondente às questões do quadro 01, os alunos foram um pouco resistentes na participação por imaginarem que estariam sendo avaliados, apesar de terem sido informados de que a atividade não tinha esse intuito. Foi inclusive esclarecido que não haveria um peso ou uma nota que permitiria avaliar se o estudante acertou ou não as atividades. Mesmo assim, muitos se preocuparam com a nota que iriam receber ou alguns simplesmente recusaram-se a participar, debruçando-se sobre a mesa, pois não saberiam explicitar qualquer tipo de conhecimento sobre o assunto. Esses tipos de comportamento são previsíveis, visto que, no ambiente escolar, ou digamos no sistema educacional no geral, é comum que os estudantes sejam avaliados de forma quantitativa e, portanto, seria natural demonstrar uma resistência ou desconfiança em qualquer situação que lembre uma avaliação.

Por outro lado, boa parte dos estudantes intrigaram-se com as questões e realmente buscaram respondê-las de várias formas diferentes para ver se chegariam em alguma conclusão que faria sentido a eles. Levando a perceber que apesar de ficarem receosos com o questionário, esses alunos foram bastante receptivos com a atividade e realmente se esforçaram para respondê-la.

Ao realizar a análise desta aplicação, algo que nos chamou a atenção foi o fato de que boa parte dos estudantes não conseguiram chegar na resposta correta por não terem lido e compreendido o enunciado por completo. Notou-se que, em vários casos, a habilidade de percepção (citada no quadro 01) não foi desenvolvida por esses alunos. O que nos leva à hipótese de que há pouca compreensão dos enunciados ou pouco hábito de uma leitura mais cuidadosa, não levando necessariamente ao desconhecimento de algum conceito matemático. Outra possibilidade levantada seria o fato dos estudantes terem dificuldades para interpretação de textos matemáticos ou até mesmo um comportamento mecânico de resolução de problemas matemáticos por meio de operações com números. Desse modo, os alunos não perceberam que algumas questões necessitavam apenas de análise e interpretação de dados para encontrar uma resposta. Observe a figura 01 a seguir:

Figura 01: Resolução do aluno A_1-8[7].



Série I: Leia os problemas a seguir e formule a pergunta do enunciado. Depois, tente resolver o problema.

1) Eu tenho um valor total de 140 reais guardados em dois cofres. Se eu transferir 15 reais de um cofre para o outro, terei exatamente o mesmo valor em cada um destes cofres.

−140
15
125

sim 125 para cada cofre

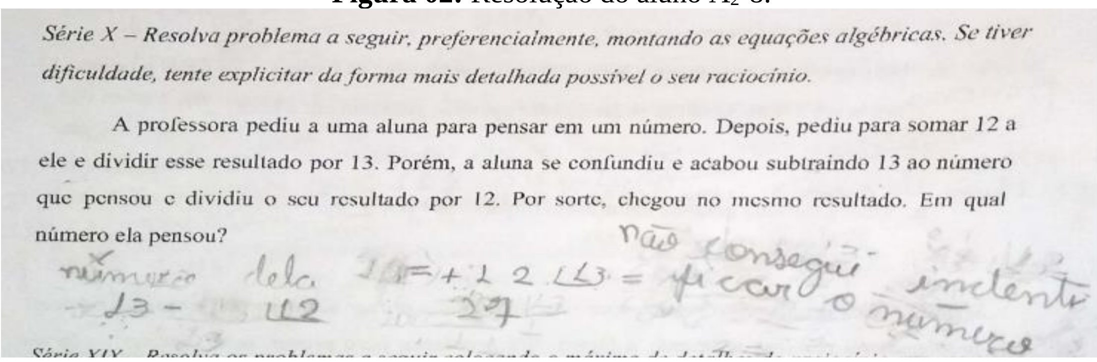
2) Um homem viveu por *x* meses.

Fonte: acervo pessoal dos autores.

Na figura 01 podemos perceber que, ao resolver o problema, o estudante utilizou o valor total dos cofres e subtraiu o valor que seria transferido entre os cofres. Entretanto, o aluno além de não ter considerado que eram dois cofres e que no final eles teriam o mesmo valor, acabou não formulando uma pergunta conforme o enunciado havia solicitado. Dessa forma, nota-se a falta de compreensão na interpretação do problema. Tais resultados repetiram-se com outros estudantes de forma similar.

Desta forma, um ponto interessante observado, foi a maneira como o aluno A_2-8 se comportou durante a primeira e segunda aplicação: na primeira etapa, o aluno A_2-8 havia ficado bastante intrigado com a *Série X*, a qual tentou responder por inúmeras tentativas e de forma incessante.

Figura 02: Resolução do aluno A_2-8.



Série X – Resolva problema a seguir, preferencialmente, montando as equações algébricas. Se tiver dificuldade, tente explicitar da forma mais detalhada possível o seu raciocínio.

A professora pediu a uma aluna para pensar em um número. Depois, pediu para somar 12 a ele e dividir esse resultado por 13. Porém, a aluna se confundiu e acabou subtraindo 13 ao número que pensou e dividiu o seu resultado por 12. Por sorte, chegou no mesmo resultado. Em qual número ela pensou?

número dela ... + 12 13 = ficar o número
13 − 12 27
não consegui incdente

Fonte: acervo pessoal dos autores.

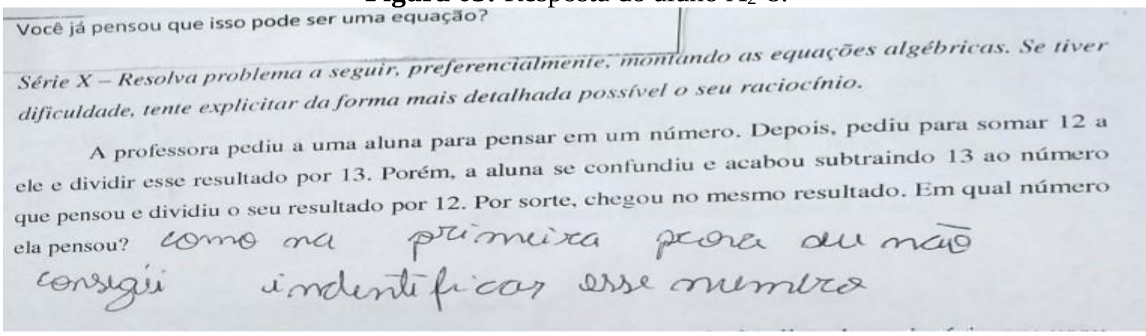
Essa pergunta, segundo classificação apresentada no quadro 01, seria um problema

[7]Para manter o anonimato da pesquisa, os alunos serão nomeados de forma aleatória utilizando o seguinte código: LETRA (etapa)-número. A letra corresponde ao código da escola à qual o estudante pertence (A ou B).

envolvendo o campo conceitual de estruturas algébricas e a habilidade de generalização de conceitos matemáticos. Conforme é possível observar na figura 02, nota-se que há uma dificuldade tanto na habilidade de generalizar uma equação quanto em encontrar o número equivalente, ainda que tenha sido capaz de desenvolver os cálculos de forma correta. Também é possível notar dificuldades na compreensão da estrutura algébrica que origina tal expressão. O referido aluno, não conseguindo encontrar um valor, acabou desistindo de sua solução e perguntou o resultado correto para o pesquisador/professor.

Porém, na segunda aplicação, o aluno A_2-8, ao deparar-se com a mesma questão, sequer tentou resolvê-la e apenas escreveu: "como na primeira prova, eu não consegui identificar esse número", como pode ser observado na figura 03. Ao finalizar o questionário, procurou novamente o pesquisador/professor para obter a resolução e qual número seria a resposta correta.

Figura 03: Resposta do aluno A_2-8.



Você já pensou que isso pode ser uma equação?

Série X – Resolva problema a seguir, preferencialmente, montando as equações algébricas. Se tiver dificuldade, tente explicitar da forma mais detalhada possível o seu raciocínio.

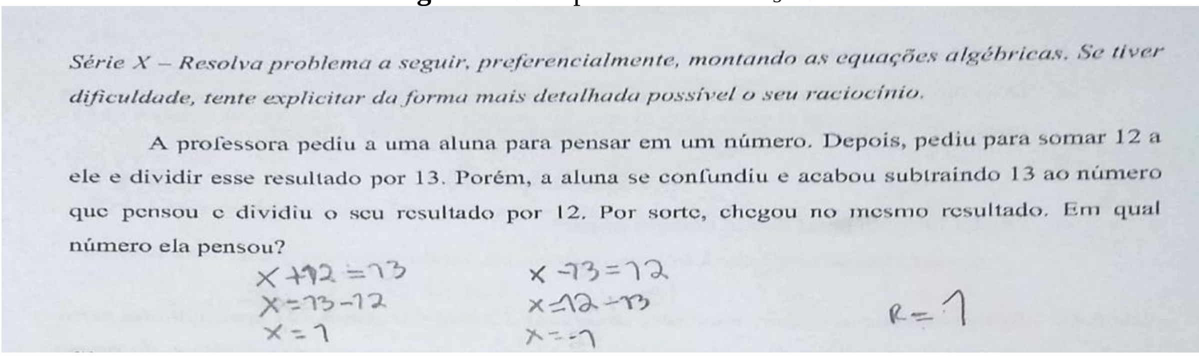
A professora pediu a uma aluna para pensar em um número. Depois, pediu para somar 12 a ele e dividir esse resultado por 13. Porém, a aluna se confundiu e acabou subtraindo 13 ao número que pensou e dividiu o seu resultado por 12. Por sorte, chegou no mesmo resultado. Em qual número ela pensou? como na primeira prova eu não consigii indentificar esse numero

Fonte: acervo pessoal dos autores.

Outra resposta intrigante tanto na primeira quanto na segunda aplicação dessa mesma questão, foi a do aluno A_3-8 que, embora tenha percebido que era possível responder a essa questão por meio de uma equação, não conseguiu identificar como essa equação era formada. Ao observar que tanto o aluno A_2-8 quanto A_3-8 tiveram uma dificuldade semelhante, elaboramos a hipótese de que esse campo conceitual (estruturas algébricas) e a habilidade de generalização de conceitos merece uma atenção maior por parte do docente, já que, além desses alunos citados, um mesmo tipo de dificuldade foi notada nos demais discentes dessa escola[8].

[8]O pesquisador atua também como estagiário permanente desta escola. Portanto, as observações se baseiam na experiência das aulas que vem acompanhando durante esse período com essa mesma turma.

Figura 04: Resposta do aluno A_3-8.



Série X – Resolva problema a seguir, preferencialmente, montando as equações algébricas. Se tiver dificuldade, tente explicitar da forma mais detalhada possível o seu raciocínio.

A professora pediu a uma aluna para pensar em um número. Depois, pediu para somar 12 a ele e dividir esse resultado por 13. Porém, a aluna se confundiu e acabou subtraindo 13 ao número que pensou e dividiu o seu resultado por 12. Por sorte, chegou no mesmo resultado. Em qual número ela pensou?

$x+12=13$ | $x-13=12$
$x=13-12$ | $x=12-13$
$x=1$ | $x=-1$

$R=1$

Fonte: acervo pessoal dos autores.

Já no caso dos alunos da escola B, de início, estranharam o fato de não serem avaliados de maneira quantitativa, pois não se trata de algo habitual para eles. Assim como na escola citada anteriormente, sempre, ou quase sempre, são avaliados de maneira quantitativa. Mas, quando receberam as questões, começaram a discutir em grupo e a debater, mesmo ainda com um ar de desconfiança em relação às questões, pois acreditavam que poderiam ser "pegadinhas" e que as respostas delas eram mais fáceis do que pareciam ser.

A grande maioria dos alunos tentaram resolver as perguntas, outros nem prestaram atenção no que estava acontecendo, pois, quando tiveram a informação de que não seriam avaliados quantitativamente, simplesmente abandonaram o teste. Mas, boa parte da turma realmente se esforçou em resolver, gerando discussões entre eles e nos questionaram bastante sobre algumas questões.

Algumas respostas dadas pelos estudantes chamaram bastante atenção, como a do aluno B_1-9 que entendeu que o valor do *x* da questão 2 da série I (quadro 01) poderia ser equivalente à posição das letras do alfabeto. Dessa forma, ele contou todas as letras do alfabeto até chegar no *x*, concluindo assim, que o valor corresponderia ao número 24, por seu raciocínio ter sido feito de forma oral, o aluno registrou apenas a resposta final "$x = 24$". Com a mesma linha de pensamento, o aluno B_2-9, oralmente realizou a dedução que a resposta poderia ser um número romano, sendo assim, como o *x* em algarismo romano equivale a dez, a resposta desse aluno foi que "X[9] = 10 em romanos".

Na segunda aplicação, chamou a atenção o fato de alguns alunos, que tiveram dificuldades na etapa anterior, levantarem nesta etapa alguns questionamentos com os demais colegas, como foi o caso do aluno B_3-9. O estudante em questão ficou o tempo todo durante a aplicação da atividade buscando a resposta certa a uma determinada questão. Além disso, tentou

[9] Aqui, optamos por manter a representação da incógnita em caixa alta para evidenciar a confusão despertada no aluno.

resolvê-la de maneiras distintas, desenvolvendo vários tipos de raciocínio e tentando encontrar estratégias melhores para resolver a questão. Porém, esse mesmo estudante não deu a mesma atenção às outras questões.

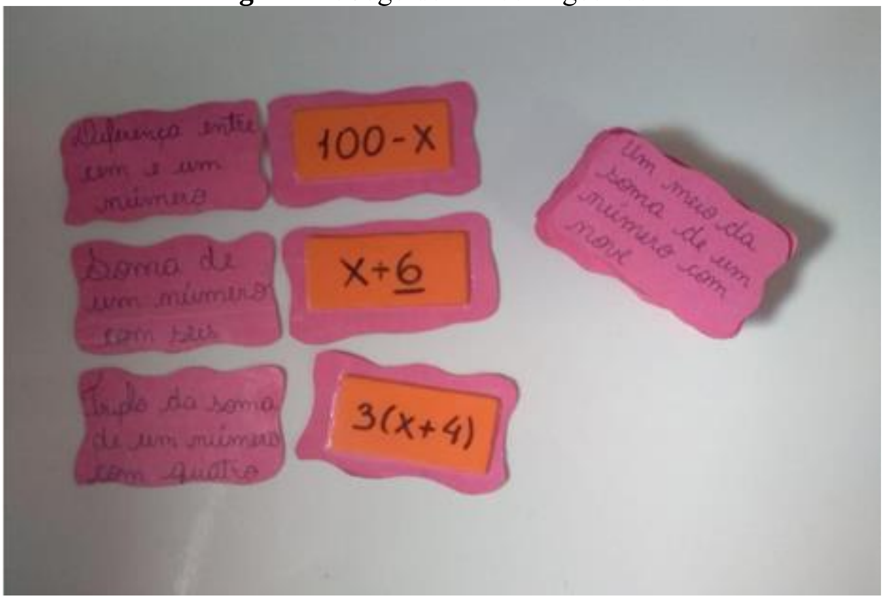
Após observar as respostas e a evolução dos alunos nas etapas anteriores, aplicamos a terceira etapa com uma intervenção didática composta por dois jogos: "mico algébrico" e "expressões na testa". Além disso, após a conclusão dessa terceira etapa, foi aplicado um questionário pós-teste em relação ao que foi trabalhado dentro dessa atividade didática de característica lúdica. Entendemos que esse questionário não se trata de uma nova etapa, já que faz parte da análise dos resultados dessa terceira fase da pesquisa.

A opção pela intervenção didática por meio de atividades lúdicas, como a aplicação de jogos, foi introduzida com o intuito de ser uma atividade mais atrativa e mais receptiva pelos estudantes, já que notamos uma certa resistência dos alunos em resolver questões ou problemas, da forma como tipicamente são apresentadas nas aulas de Matemática. Além disso, conforme apontado por Cury e Konzen (2007),

> [...] o uso do jogo no ensino tem vantagens para professores e alunos. Para os primeiros, há a possibilidade de analisar o desempenho dos estudantes na resolução de uma questão, verificando seu raciocínio lógico ou detectando erros cometidos. Dessa forma, é possível diagnosticar dificuldades em um item específico do conteúdo e necessidades individuais ou coletivas, buscando, então, novas estratégias para auxiliá-los (CURY; KONZEN, 2007, p.113).

O primeiro jogo, "mico algébrico", foi aplicado aos alunos que tiveram menos dificuldades em resolver o questionário da primeira e segunda etapa. Este jogo contém pares de expressões algébricas, sendo que em uma carta apresenta-se a forma numérica e, no seu par, a forma descrita por extenso. Assim como no conhecido jogo do mico, o objetivo é formar os respectivos pares de cartas. Mas, nesta atividade, evidencia-se o exercício de mostrar as cartas aos demais para que possa ser conferido, em conjunto, se o par está corretamente associado Além disso, existe apenas uma carta que, neste jogo apresenta-se como uma expressão, que não forma um par.

Figura 05: Jogo do “Mico Algébrico”.



Fonte: acervo pessoal dos autores.

A atividade foi bem aceita pelos alunos e suas regras foram compreendidas pela maioria, mas houve um estudante que denominamos como A_4-8, que não conseguia entender inicialmente como os pares eram formados. Inicialmente, ele tinha dúvidas se deveria formar pares apenas com duas expressões algébricas idênticas ou com cartas iguais escritas por extenso. Mas, assim que ele próprio formou seu par, entendeu como funcionava o jogo.

Já no segundo jogo, “expressões na testa”, foi aplicado aos alunos que encontraram mais dificuldade nas operações envolvendo equações de primeiro grau ao responder os questionários do estudo piloto. Neste jogo, cartas com números marcados em um dos lados da face são empilhadas com a face voltada para baixo. Cada estudante retira uma carta da pilha, sem olhar para a sua própria carta, e expõe em sua testa para os outros jogadores. Por sua vez, o professor, no nosso caso, um dos pesquisadores/professores que aplicou esta atividade, forma uma equação composta pelos números que esses estudantes têm respectivamente na testa e mostra aos participantes para que eles possam resolver a equação, por turnos, baseando-se nos números dos outros colegas, para deduzir o número que está em sua própria testa. Com isso, o objetivo deste jogo é praticar o cálculo mental e a resolução de equações do primeiro grau.

Figura 06: Jogo "expressões na testa".

Fonte: acervo pessoal dos autores.

Um exemplo de aplicação do jogo ocorreu da seguinte forma:

- **Alunos participantes:** A_5-8, A_6-8 e A_7-8
- **Cartas retiradas respectivamente:** -2, 8 e 6.
- **Equação formulada pelo pesquisador/professor que estava aplicando o jogo:**

$$x + 8 = 6,$$

- **Para o estudante A_5-8:**
- **Cartas que este aluno vê: 8 e 6**
- **Carta que está na testa do estudante: -2**
- **Equação formada:$x + 8 = 6$, pois, como este aluno estava vendo as cartas 8 e 6, sua incógnita é o -2.**

Em cada turno, o professor precisa montar uma equação para que o jogador da vez resolva a equação. Por exemplo, com os mesmos números retirados anteriormente, vamos supor que o jogador da vez seja o estudante A_6-8, que tem o 8 na testa. O professor poderia apresentar a equação $-2 + x = 6$ para que ele possa concluir, a partir dos números de outros colegas, que o número que está em sua testa é 8.

Esse jogo também foi bem aceito pelos estudantes e a maior parte deles entendeu logo no início como o jogo funcionava. Ambos os jogos foram introduzidos com o intuito de melhorar o raciocínio lógico e uma variação oposta à repetição mecânica de exercícios. Ademais, espera-se que sejam capazes de desenvolver um raciocínio próprio para resolver as operações que envolvem equação do primeiro grau.

Depois da aplicação dos dois jogos, os estudantes receberam uma folha que continha alguns exemplos relacionados ao conteúdo em questão e oito questões para responder, como épossível verificar no quadro 03:

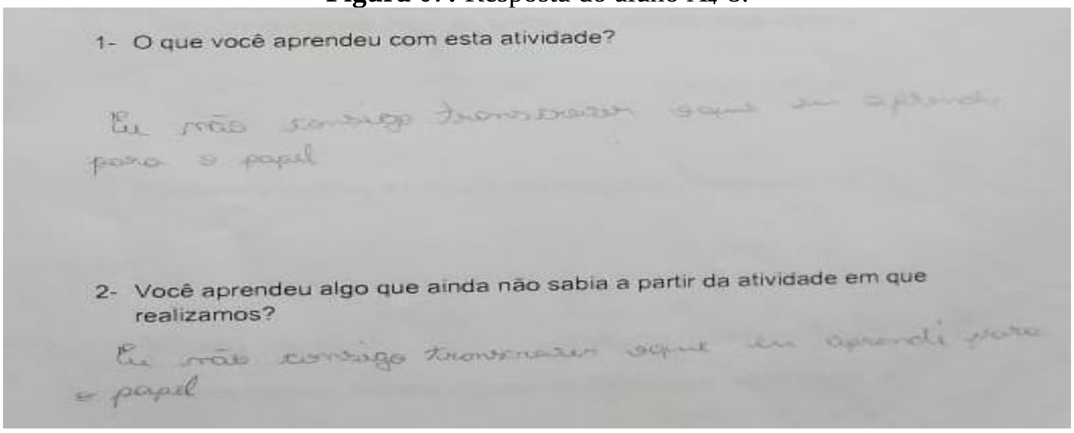
Quadro 03: Questionário final.

Considere os seguintes exemplos e também as atividades realizadas anteriormente (jogos): ● Expressão algébrica com uma incógnita: $x + 2$ ● Expressão algébrica com duas incógnitas: $x + 4y$ ● Equação com uma variável: $2x = 10$
1- O que você aprendeu com esta atividade?
2- Você aprendeu algo que ainda não sabia a partir da atividade em que realizamos?
3- Pense em uma expressão algébrica. Transcreva abaixo.
4- A partir dessa expressão algébrica você consegue formar uma equação? Mostre-nos.
5- Como visto antes, uma expressão algébrica pode ter mais que uma incógnita. E uma equação também pode? Por quê?
6- Acrescente sua incógnita no lado numérico da sua equação e lembre-se: uma equação precisa que ambos os lados sejam equivalentes!
7- Atribua o número dois para sua equação e verifique o resultado!
8- Agora faça o mesmo que na questão anterior, porém com o número 7!

Fonte: Acervo dos autores.

Um fato curioso e importante que ocorreu na terceira etapa foi que, o estudante A_4-8, o mesmo que levou algumas rodadas para entender as regras do jogo "mico algébrico", relatou não conseguir expressar na forma escrita o que estava pensando, no questionário pós-teste, como pode ser observado na figura 07.

Figura 07: Resposta do aluno A_4-8.


1- O que você aprendeu com esta atividade?

Eu não consigo transmitir oque eu aprendi para o papel

2- Você aprendeu algo que ainda não sabia a partir da atividade em que realizamos?

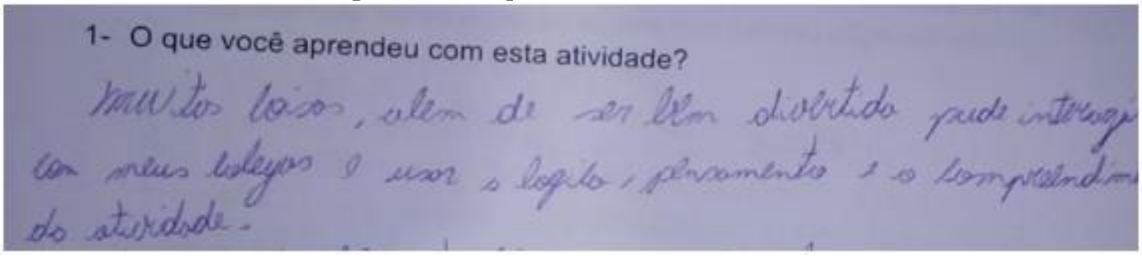
Eu não consigo transmitir oque eu aprendi para o papel

Fonte: acervo pessoal dos autores.

Em todas as aplicações, foi observado que o discente A_4-8, apesar de ter demonstrado possuir uma excelente habilidade para realizar contas mentalmente, tinha dificuldades para transcrever seu raciocínio para o papel e não expressava a mesma agilidade de quando realiza o cálculo mental. Porém, as contas que estavam registradas, estavam corretas.

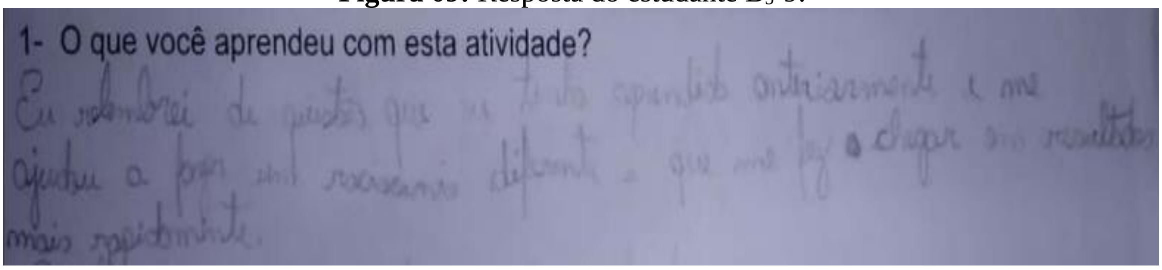
Além disso, outros fatores observados durante a pesquisa foram em relação ao comportamento e relato oral de determinados estudantes. Muitos se sentiram mais à vontade em participar da experiência, quando foram esclarecidos de que o estudo não tinha o intuito de avaliar as respostas corretas e tampouco de determinar uma nota pelo desempenho dos estudantes. Em seus relatos finais afirmaram ter aprendido novas técnicas, e tiveram oportunidade de expressar de forma mais espontânea os seus conhecimentos. Como podemos notar nas figuras 08, 09 e 10, onde três estudantes fizeram essa afirmação.

Figura 08: Resposta do estudante B_4-9. [10]


1- O que você aprendeu com esta atividade?

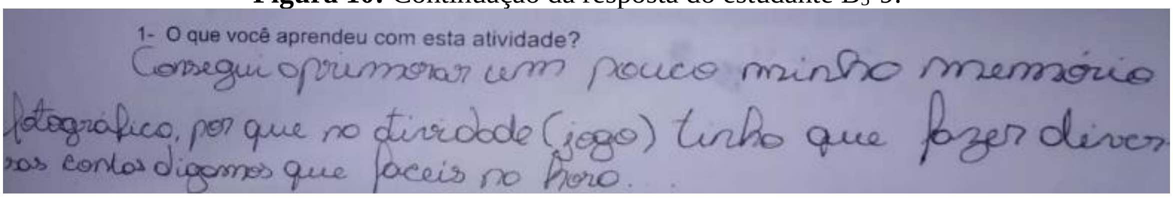
Fonte: acervo pessoal dos autores.

Figura 09: Resposta do estudante B_5-9.[11]


1- O que você aprendeu com esta atividade?

Fonte: acervo pessoal dos autores.

Figura 10: Continuação da resposta do estudante B_5-9.[12]


1- O que você aprendeu com esta atividade?

Fonte: acervo pessoal dos autores.

Após a conclusão da pesquisa, recebemos algumas devolutivas dos professores de Matemática, responsáveis pelas respectivas turmas de alunos participantes, de que houve uma certa mudança de postura por parte de alguns estudantes. Especialmente aqueles que,

[10] Transcrição do texto da figura 08: Muitas coisas, alem (além) de ser bem divertida pude interagir com meus colegas e usar logica (lógica), pensamento e o compreendimento da atividade.
[11] Transcrição do texto da figura 09: Eu relembrei de questões que eu tinha aprendido anteriormente e me ajudou a fazer um raciocinio (raciocínio) diferente e que me fez chegar a resultados mais rapidamente.
[12] Transcrição do texto da figura 10: Consegui aprimorar um pouco minha memória fotográfica, por que (porque) na atividade (jogo) tinha que fazer diversas contas digamos que faceis (fáceis) na hora.

normalmente, não se demonstravam tão engajados com as aulas. Isso pode ser um indicativo de que a atividade desenvolvida tenha atingido positivamente os estudantes, principalmente, aqueles que demonstravam ter bastante dificuldade no acompanhamento das atividades escolares. Por meio das intervenções didáticas desenvolvidas neste estudo, é possível que esses estudantes puderam ter a chance de demonstrar seus conhecimentos da sua forma e ganhando, assim, mais confiança e ânimo para acompanhar as aulas.

Considerações finais

A perspectiva qualitativa para análise de erros, segundo as ideias de Cury (2008), consiste na elaboração de estratégias didáticas bastante específicas para a superação das dificuldades advindas dos estudantes. Nesse sentido, a TCC de Vergnaud (1990) nos ensina a levar em consideração as classes de situações que permitam ao sujeito explicitar certos conceitos implícitos, inerentes na compreensão do conteúdo de álgebra.

Por meio da aplicação do questionário baseado no estudo de Kikuchi (2019), e com o apoio teórico-metodológico dos modelos organizadores de Moreno *et al* (2000), foi possível apresentar mecanismos que permitam ao professor realizar a análise desses erros/dificuldades de uma forma coletiva, sem deixar de levar em consideração as barreiras individuais, e permitir a construção de uma intervenção didática que fosse aderente às dificuldades norteadas pelo conjunto de perguntas-modelo.

A metodologia utilizando-se de perguntas-modelo pareceu estabelecer um modelo de diálogo mais próximo, empático, que raramente acontece nos modelos de avaliação típicos, principalmente, em disciplinas da área de Ciências Exatas como a Matemática. A nossa abordagem em tentar compreender as dificuldades e as possíveis fontes de origem de algum equívoco, permitiu desenvolver mais confiança e coragem nos estudantes em desafiar-se na resolução de problemas matemáticos, segundo relatos coletados no questionário pós-aplicação da intervenção didática. Por isso, incentivamos os professores a aplicação de alternativas didáticas que permitam ajudar os estudantes a superarem suas dificuldades.

Porém, como todo estudo, os resultados obtidos nesta pesquisa têm suas limitações. Ainda que ele apresente indícios interessantes, por se tratar de uma amostra muito pequena de participantes, é muito superficial concluir que esgotamos todas as discussões correlacionadas à possível defasagem na aprendizagem de Matemática. Nosso objetivo principal foi apresentar ao professor a importância de criar mecanismos de análise que permitam contribuir com as adversidades específicas do seu respectivo grupo de estudantes, por meio das propostas metodológicas adotadas neste estudo.

Outros indícios apresentados a partir deste estudo podem sugerir pesquisas futuras como a correlação da dificuldade de interpretação de problemas com a falta de desenvolvimento de habilidades essenciais como a leitura e a escrita. Outra possibilidade seria analisar a capacidade de generalização como uma das competências fundamentais para resolução de problemas. É possível que muitas dessas habilidades devam ser estimuladas desde cedo, preferencialmente, a partir dos anos iniciais do ensino fundamental.

Por fim, outra relação que podemos investigar é o papel da escola na vida do estudante. Isso implica em observar o quanto os estudantes de classes sociais mais vulneráveis são mais dependentes da escola/professores para desenvolver certos tipos de habilidades matemáticas do que aqueles que pertencem às classes sociais mais privilegiadas. Investigar, por exemplo, se existe alguma correlação entre a realidade vivida pelo estudante, que corrobora positivamente ou negativamente no desenvolvimento de certos tipos de habilidades matemáticas e qual seria a intervenção didática mais adequada para isso.

Referências

ARANTES, V. A. **Estados de ânimo e os Modelos Organizadores do Pensamento**: um estudo exploratório sobre a resolução de conflitos morais. Barcelona. Tese de Doutorado. Facultat de Psicologia da Universitat de Barcelona, 2000.

ARAUJO, V. A. A. de. **Modelos organizadores do pensamento e o seu desenvolvimento teórico-metodológico**: estudos de psicologia e educação. 2013. Tese (Livre Docência em Psicologia e Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.11606/T.48.2013.tde-17092013-102132. Acesso em: 09 abr 2022.

BARBOSA, G. S.; MAGINA, S. M. P. Atividades lúdicas como um caminho didático apropriado para introduzir conceitos associados ao número primo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 127 – 148, 2012. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/7927. Acesso em: 23 dez. 2020.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. 3 ed. Lisboa: Edição 70 Ltda., 2004.

BORGES, P. A. P; PIVA, A; MIECOANSKI, B; SORDI, M. M. A formação dos invariantes do campo conceitual do teorema de Pitágoras em uma experiência de ensino na escola básica. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 22, n. 2, p. 220-251, 2020. Disponível em https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p220-251. Acesso em: 23 jan. 2021.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1. ed., Coleção: Tendências em Educação Matemática, Belo Horizonte: Autêntica, 2008. 112 p.

CURY, H. N; KONZEN, B. Uma Aplicação de Jogos na Análise de Erros em Educação Matemática. **REVEMAT**, Florianópolis, v.2, n.1, p. 107-117, 2007. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12994. Acesso em: 17 set. 2020.

CURY, H. N; SILVA, P. N. Análise de erros em resolução de Problemas: uma experiência de estágio em um curso de licenciatura em matemática. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 1, n.1, jan/abr, p.85-97, 2008. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/226/199. Acesso em: 12 ago. 2020.

FIGUEIREDO, A. P. N. B; BELLEMAIN, P. M. B; TELES, R. A. M. Grandeza Volume: um estudo exploratório sobre como alunos do ensino médio lidam com situações de comparação. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v.28, n.50, p. 1172-1192, 2014. Disponível em https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a09. Acesso em: 08 jan. 2021.

FREITAS, M. A. **Equação do 1º grau:** métodos de resolução e análise de erros no ensino médio. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002. Disponível em https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11223. Acesso em: 03 Ago. 2020.

GUIMARÃES, S. D; FREITAS, J. L. G. Contribuições de uma Prática Regular de Cálculo Mental para a Aprendizagem de Conceitos Matemáticos nos Anos Iniciais. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.2, p. 292-309, 2010. Disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/3542. Acesso em: 18 dez. 2020.

JOHNSON-LAIRD, P. La théorie des modèles mentaux. *In:* EHRLICH, M. F; TARDIEU, H; CAVAZZA, M. (org.) **Les modèles mentaux**: approche cognitif des répresentations, Introducción, Paris: Masson, p. 1-20, 1993.

JUSTO, J. C. R; Resolução de problemas matemáticos aditivos: um ensaio teórico. **Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.3, n.2, p. 1-18, 2012.

KIKUCHI, L. M. **A Teoria dos Campos Conceituais e a análise dos invariantes operatórios no conteúdo de álgebra**. 2019. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.11606/T.48.2019.tde-23102020-164025. Acesso em: 09 abr 2022.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Tradução de Joan Teller. Chicago: The University of Chicago Press, 1976. 417 p.

LIMA, D. C; COUTO, M. E. S; SANTANA, E. R. S. Mobilização de saberes no processo formativo de professoras dos anos iniciais. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v.21, n.1, p.111-135, 2019. Disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/37083. Acesso em: 06 fev. 2021.

MORENO, M.; SASTRE, G.; BOVET, M.; LEAL, A. **Conhecimento e mudança:** os modelos organizadores na construção do conhecimento. Tradução de Ana Venite Fuzzato. Campinas: Unicamp; São Paulo: Moderna, 2000. 399 p.

MOREIRA, M. A. A Teoria Dos Campos Conceituais De Vergnaud, O Ensino De Ciências E

A Pesquisa Nesta Área (Vergnaud's conceptual field theory, science education, and research in this area). **Investigações em Ensino de Ciências.** Porto Alegre, V.7(1), p. 7-29, 2002.

OLIVEIRA, R. M; BARRETO, M. C; FARIAS, G. F. Elementos decorrentes de formação continuada na prática de professora que ensina matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.22, n.2, p.171-199, 2020. Disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/46441. Acesso em: 27 jan 2021.

PEREIRA, M. G. G; COUTO, A. P. N. P; COSTA, A. C. Análise de Erros em Questões de Teorema de Pitágoras: um estudo com alunos do Ensino Fundamental. *In:* ENEM (ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA),12, 2016, São Paulo. **Anais** [...] São Paulo: SBEM, 2016, p. 1-12.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

REZENDE,V; BORGES, F. A. Futuros professores de Matemática nos Anos Iniciais e suas estratégias diante de problemas do campo conceitual aditivo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.1, p. 327-352, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/30405. Acesso em: 01 fev. 2021.

SANTANA, E; ALVES, A. A; NUNES, C. B. A Teoria dos Campos Conceituais num Processo de Formação Continuada de Professores. **Bolema**, Rio Claro, v.29. n.53, p.1162-1180, 2015. Disponível em https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a18. Acesso em: 19 jan. 2021.

SANTOS, E. R. dos; BURIASCO, R. L. C. de. Análise da Produção Escrita em Matemática como uma Estratégia de Ensino: Algumas Considerações. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.17, n.1, pp.119-136, 2015. Disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/22233. Acesso em: 09 abr 2022.

SANTOS, J. S. S; MERLINI, V. L. **Situações-problema elaboradas por professores dos anos iniciais**, **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.1, p. 21-40, 2018. Disponível em https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p21-40. Acesso em: 04 fev. 2021.

VERGNAUD, G. La Théorie des Champs Conceptuels. **RDM**, 10 (23), p. 133-170, 1990.

ZANELLA, M. S; BARROS, R. M. O. Estrutura multiplicativa de números racionais na representação fracionária: indicativos de teoremas em ação. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.3, n.5, P. 225-247, 2014. Disponível em: http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/viewArticle/925. Acesso em: 13 jan. 2021.

Recebido em: 16 de julho de 2021
Aprovado em: 28 de março de 2022