

MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA INTERPRETAÇÃO A PARTIR DE LENTES SEMIÓTICAS

DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.23.263-282>

Liane Maria da Silva¹
Michele Regiane Dias Veronez²

Resumo: Temos por objetivo, neste artigo, discutir acerca de aspectos da Modelagem Matemática revelados nos triângulos epistemológicos que consideram os signos produzidos/manifestos por alunos ao longo de uma atividade de modelagem matemática. A atividade analisada corresponde ao 3º momento de familiarização com Modelagem Matemática, ou seja, o tema que gera a atividade é sugerido pelos próprios alunos. Tendo como aporte teórico os referenciais supracitados, construímos triângulos epistemológicos de uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por um grupo de alunas de uma turma de 4º ano de um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Paraná, na disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. É a metodologia de pesquisa qualitativa que embasa todas as nossas opções metodológicas, já que temos por interesse realizar uma análise interpretativa dos signos. Os resultados sinalizam que os (des)conhecimentos dos alunos, associados ao fazer modelagem matemática ou relativos aos objetos matemáticos, manifestos por meio de signos, denotados nos triângulos epistemológicos, enaltecem os elementos característicos de uma atividade de modelagem matemática e o caráter dinâmico inerente à Modelagem Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Semiótica. Triângulo epistemológico.

MATHEMATICAL MODELING: AN INTERPRETATION FROM SEMIOTIC LENSES

Abstract: Our goal with this paper is to examine what the signs produced/manifested by students during a mathematical modeling activity reveal about Mathematical Modeling through their epistemological triangles. The activity thus analyzed corresponds to the 3rd moment of familiarization with Mathematical Modeling, that is, the theme that generates the activity is suggested by the students themselves. Taking these references as theoretical basis, we construct the epistemological triangles of a mathematical modeling activity carried out by a group of fourth-year female undergraduates enrolled in a Mathematics Teaching Degree in a public university in Paraná, Brazil, as part of a Mathematical Modelling class. All of our methodological decisions follow a qualitative research methodology, as our intent is to carry out an interpretative analysis of the signs. The results show that the students' knowledge (or lack thereof) – exhibited in the mathematical models when they were made or in relation to the mathematical objects, manifested through signs and indicated in the epistemological triangles – expose the characteristic elements of a mathematical modeling activity and dynamic character inherent to Mathematical Modeling.

Keywords: Mathematical Modeling. Semiotics. Epistemological triangle.

¹ Aluna do programa de pós-graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática pela Universidade do Centro-Oeste do Paraná (UNICENTRO). Guarapuava – Paraná, Brasil. E-mail: liane.lms123@gmail.com - Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-0678-9236>

² Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (UNESPAR) e docente do pós-graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (UNICENTRO), Apucarana – Paraná, Brasil. E-mail: miredias@gmail.com - Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-9464-1498>

Introdução

Qualquer fato pode ser analisado semioticamente (SANTAELLA, 2003). A semiótica funciona como um mapa lógico que traça as linhas dos diferentes aspectos através dos quais se almeja conduzir uma análise. Este pensamento permeou o desenvolvimento da pesquisa de mestrado da primeira autora e incitou-a a trazer algumas reflexões neste artigo.

Reconhecemos que a Semiótica tem muito a contribuir com a Educação Matemática, visto que a comunicação em ambientes educacionais é feita por meio de escritas, gestos, falas e códigos que se configuram signos. Os signos, como instrumentos de comunicação, podem revelar informações relativas ao conhecimento do indivíduo acerca daquilo que o signo referencia.

Dessa forma, olhar para os signos produzidos/manifestos por alunos no decorrer de uma atividade de modelagem matemática³ pode favorecer compreensões acerca dos modos de pensar e agir daqueles que a desenvolvem e trazer à tona conhecimentos por eles mobilizados. Essas compreensões podem sinalizar aspectos relacionados à aprendizagem dos alunos, indicar sugestões para os professores, enaltecer características inerentes ao fazer modelagem matemática, entre outros.

Neste texto, pautadas na semiótica peirceana (PEIRCE, 2005) e no triângulo epistemológico no contexto da Modelagem Matemática proposto em Veronez (2013), discutimos acerca de aspectos da Modelagem Matemática revelados nos triângulos epistemológicos, que construímos e, que consideram os signos produzidos/manifestos por alunos ao longo do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Entendemos que o olhar para tais signos em associação aos outros dois vértices do triângulo: contexto de referência e conceito, pode ser um caminho para trazer à tona o caráter dinâmico que a modelagem matemática tem e, ao mesmo tempo, evidenciar que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática considera mobilização e articulação de conhecimentos matemáticos, de conhecimentos do fenômeno estudado e de conhecimentos que foram aprendidos ao desenvolvê-las.

Organizamos o artigo de modo a trazer, inicialmente, os referenciais teóricos que sustentam nosso estudo. Em seguida, abordamos uma atividade de modelagem matemática atentas aos signos manifestos/produzidos pelos alunos, ao passo que, apresentamos os

³ Ao longo do texto utilizamos Modelagem Matemática (em maiúsculo) quando nos referimos a ela como área de pesquisa na Educação Matemática e, em minúsculo, quando nos referimos a uma prática realizada em sala de aula que se embasa nos pressupostos dessa área.

triângulos epistemológicos que construímos como possibilidade de releitura da atividade. Na seção de resultados e discussões fazemos ponderações e inferências acerca de aspectos da Modelagem Matemática revelados nos triângulos epistemológicos. Por fim, na última seção, enunciamos nossas considerações finais.

Elementos da Modelagem Matemática e da Semiótica Peirceana que fundamentam nosso estudo

Nosso entendimento de Modelagem de Matemática está alinhado ao pensamento de Almeida, Silva e Vertuan (2012), quando pontuam que ela pode ser descrita como um conjunto de procedimentos e conceitos necessários à solução de um problema que pode ter origem no cotidiano ou contexto cultural e social que cercam o indivíduo.

Essa caracterização, além de sintetizar a forma como os autores compreendem uma atividade de modelagem matemática, sugere que há um trânsito de uma problemática inicial para uma situação final e que a esse processo se associa uma representação matemática, um *modelo matemático*, definido como: “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.13).

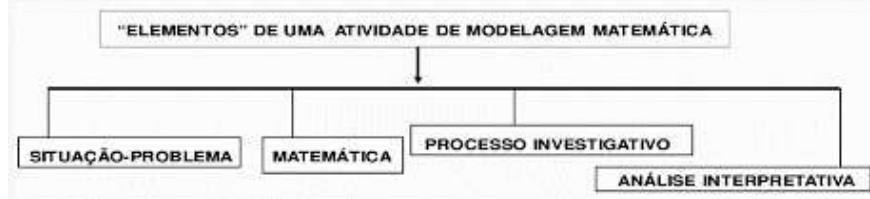
É na passagem da situação inicial para a final que conhecimentos matemáticos e não matemáticos são produzidos/integrados. É também nesse trânsito que diversas habilidades relacionadas ao domínio da linguagem matemática são requeridas, dado que a problemática que inicialmente estava em linguagem natural necessita agora de uma outra representação que evidencie o problema matemático a ser resolvido. Nesse cenário, os signos matemáticos e não matemáticos que são manifestos pelos alunos atuam como instrumentos de comunicação e revelam pensamentos e ações.

Embora não existam condutas pré-definidas que levem à solução do problema inicial em uma atividade de modelagem matemática, muitos autores, em seus estudos, apoiam o conjunto de procedimentos e estratégias adotadas no desenvolvimento da atividade, no que eles denotam por etapas (BURAK, 2010) ou fases (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) da Modelagem Matemática.

Independente do modo como se estabelece a organização didática (etapas ou fases) da Modelagem Matemática, nos interessa evidenciar os elementos que caracterizam uma

atividade de modelagem matemática (Figura 1). Assim, partimos do princípio de que o cumprimento de uma etapa não necessariamente precisa ocorrer para adentrar em outra e de que as fases funcionam como um ciclo e, portanto, consideram processos de idas e vindas.

Figura 1: Elementos que caracterizam uma atividade de modelagem matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 17).

Do mesmo modo que as etapas ou fases não ocorrem de forma linear, estes elementos “*situação-problema*”, “*matemática*”, “*processo investigativo*” e “*análise interpretativa*” não devem ser compreendidos linearmente; eles compõem a atividade de modelagem matemática, sinalizando aspectos peculiares relativos ao fazer modelagem matemática e, se articulam a partir das estratégias adotadas na busca por uma solução para o problema em foco.

Do contato com a *situação-problema* define-se uma investigação a ser realizada. Assim, matemática e processo investigativo se cruzam e se entrecruzam a todo o momento até que uma solução seja obtida e que aconteça uma análise interpretativa acerca dela com olhar atento aos objetos matemáticos usados para obter tal solução e às características da situação da qual o problema é oriundo.

Cabe destacar que tanto o *processo investigativo* pode suscitar a *matemática* ou criar um ambiente em que os que desenvolvem a atividade de modelagem matemática necessitem buscar um novo ferramental matemático para que a solução possa ser encontrada, como a *matemática* pode requerer um *processo investigativo* na intenção de se obter uma solução para o problema investigado. Ao encontrar uma solução para o problema, a *análise interpretativa* é que irá mostrar se as estratégias adotadas foram satisfatórias e se a solução condiz com a situação-problema levantada.

Esse entendimento de Modelagem Matemática, por nós assumido, favorece a produção de signos de diversos tipos. Parafraseando Veronez (2013), esses signos, articulados aos encaminhamentos assumidos pelos alunos ao longo de uma atividade de modelagem matemática precisam ser compreendidos de um ponto de vista semiótico. Daí nosso interesse em olhar para os signos no contexto de triângulos epistemológicos.

Articulações entre Modelagem Matemática e a semiótica peirceana já foram abordadas em trabalhos como o de Carreira (2001), Almeida (2010), Silva (2013), Almeida e Silva

(2017), Veronez (2013) e Ramos (2020). Carreira (2001) e Almeida (2010) se dedicaram a investigar aproximações entre modelos, modelagem e metáforas. Carreira (2001) argumenta que a metáfora é necessária para a construção do modelo, que, de certo modo, é o resultado da construção de metáforas e, Almeida (2010), assevera que aproximações entre esses três elementos podem ser importantes para a significação de objetos associados ao que a autora chama de “domínio base” e ao “domínio alvo” relacionados à situação em estudo.

A produção de signos interpretantes em atividades de modelagem matemática foi o foco da investigação de Silva (2013). Por meio da tríade peirceana: signo-objeto-interpretante, a autora analisa a atribuição de significado ao objeto. Seu trabalho sinaliza que o significado para o problema e para o objeto matemático se intensifica com a familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática.

Almeida e Silva (2017) discutem a relação entre a ação e a produção de signos em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos. As autoras apontam que os signos se configuram como meios pelos quais os alunos manifestam e articulam seus conhecimentos enquanto buscam encontrar uma solução para o problema advindo da situação e que a semiose, não é limitada, ao contrário, constitui uma rede em que signos são produzidos ou acionados pelo conhecimento e também geram novo conhecimento.

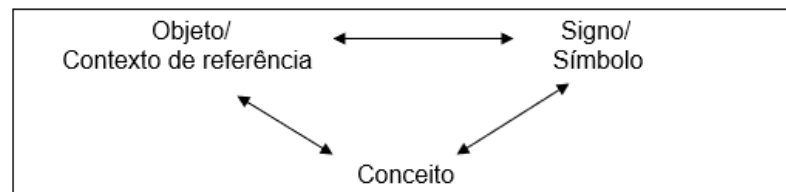
A inter-relação entre conhecimento e as experiências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática foi discutida à luz da semiótica por Ramos (2020). De acordo com a autora “a constituição do conhecimento sobre modelagem matemática é mediada pela construção, transformação e interpretação de signos que são constituídos e refinados mediante as experiências vivenciadas em situações de modelagem matemática” (RAMOS, 2020, p. 93). A autora também faz reflexões sobre o ser e o fazer Modelagem Matemática, sinalizando que:

[...] a apreensão do como fazer modelagem matemática se dá na conscientização dos alunos de que precisam se apropriar de uma situação da realidade matematizá-la de modo que a solução encontrada seja aceita e possa ser validada por uma determinada comunidade. Além disso, os alunos reconhecem que para ser modelagem matemática a atividade deve ter seu início em uma situação problemática da realidade para cuja abordagem matemática não há esquemas a priori definidos (RAMOS, 2020, p. 23).

Pautada em Steinbring (2005, 2006), e no modelo por ele proposto (Figura 2), que considera que na sala de aula é recíproca a inter-relação entre conhecimentos (manifesto por meio de signos), o contexto no qual eles emergem (contexto de referência) e o que eles denotam (conceito evocado), Veronez (2013) investiga como o desenvolvimento de atividades

de modelagem matemática se relaciona com as funções semiótica e epistemológica dos signos, definidas, respectivamente, por Steinbring (2005) como associada ao papel do signo em representar algo e, relacionada ao papel do signo no contexto da interpretação epistemológica do que representa.

Figura 2: Triângulo epistemológico proposto por Heinz Steinbring



Fonte: Steinbring (2005, p. 22) (Tradução nossa)

De acordo com Veronez (2013) as conexões entre os elementos de cada um dos vértices do triângulo epistemológico retratam as interpretações dos alunos e, nesse sentido,

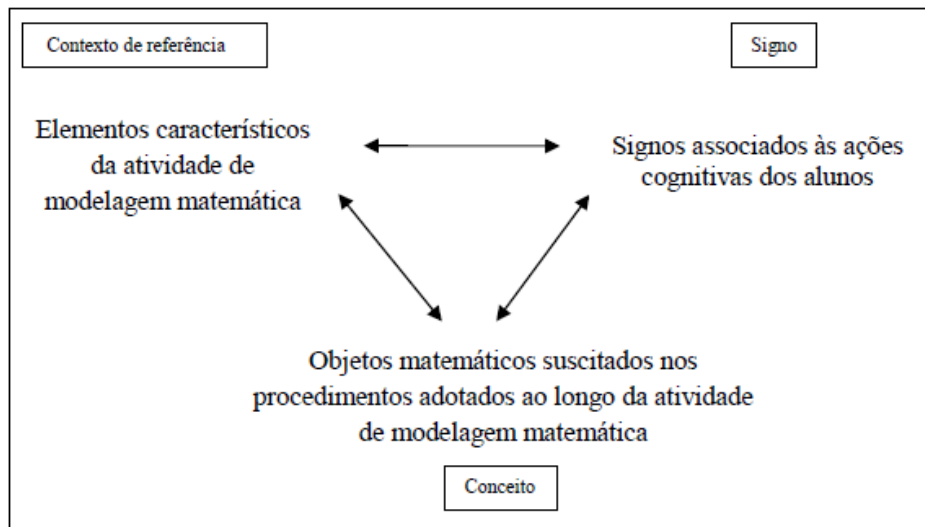
[...] à medida que os alunos se envolvem com a atividade de modelagem matemática, os signos utilizados e/ou produzidos por eles se modificam e ganham novas interpretações, assim como o contexto de referência e o conceito. Isso sugere que os elementos deste triângulo não podem ser vistos separadamente, pois eles integram-se um ao outro (VERONEZ, 2013, p. 152).

A autora também conclui que:

[...] as funções semiótica e epistemológica dos signos são as responsáveis pela complementaridade dos signos que os alunos utilizam e/ou produzem e, conseqüentemente, pela dinamicidade dos elementos desses triângulos. Isso porque se por um lado os signos relacionam-se a outra coisa, devido a seu caráter representacional, por outro, carregam conhecimentos dos alunos sobre aquilo que o signo representa (VERONEZ, 2013, p. 156).

Os triângulos epistemológicos que Veronez (2013) constrói em sua investigação, relacionados às atividades de modelagem matemática que aborda, sugere que interpretações dos alunos acerca dos conhecimentos por eles mobilizados ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática podem ser compreendidas a partir do triângulo epistemológico no contexto da Modelagem Matemática (Figura 3) por ela proposto.

Figura 3: Triângulo epistemológico no contexto da Modelagem Matemática



Fonte: Veronez (2013, p. 151).

Tendo como ponto de partida os trabalhos aqui expostos e que trazem articulações entre Modelagem Matemática e Semiótica, e tomando como modelo basilar o triângulo epistemológico proposto por Veronez (2013), pretendemos avançar nas discussões acerca dos signos em atividades de modelagem matemática.

Uma atividade de modelagem matemática expressa a partir de triângulos epistemológicos

Com o objetivo de investigar aspectos da Modelagem Matemática revelados nos triângulos epistemológicos que consideram os signos produzidos/manifestos pelos alunos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, apresentamos a atividade “Lavagem de roupas”, desenvolvida por um grupo de alunas do 4º ano de um curso de licenciatura em Matemática, de uma universidade pública do estado do Paraná, ao longo do segundo semestre da disciplina intitulada Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

Ao apresentar essa atividade de modelagem, que corresponde a uma atividade de 3º momento de familiarização, conforme proposto por Almeida e Dias (2004), o fazemos trazendo os triângulos epistemológicos que construímos. Convém salientar que a orientação nesse momento de familiarização é que os alunos desfrutem de total autonomia quanto à escolha do tema e aos encaminhamentos a serem adotados, cabendo ao professor fomentar reflexões no sentido de interferências que possam contribuir ao desenvolvimento da atividade.

O desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática aconteceu no período

de suspensão das aulas presenciais por conta da pandemia do Covid-19, assim, os encontros de orientação entre os alunos, a professora e a pesquisadora, segunda e primeira autora, respectivamente, aconteceram por meio de videoconferências que foram gravadas e passaram a compor o escopo de dados da investigação, juntamente com o relatório final elaborado pelos alunos e com os registros na ferramenta *wiki*, na plataforma *Moodle*.

O grupo, composto por quatro alunas, aqui nominadas L1, L2, L3 e L4, além de estudantes, dedicavam boa parte do dia aos afazeres domésticos, assim, o tema “lavagem de roupas”, bem como o problema investigado por essas alunas, surgem de dúvidas e interesses comuns entre elas.

“Nosso tema é lavagem de roupa e nosso problema é quantas peças de roupa colocar na máquina de lavar, respeitando sua capacidade de 10kg. [...] esse problema teve origem em dúvidas mesmo, discussões, questionamentos como “será que quando eu lavo roupa eu coloco mais peças do que eu deveria colocar ou eu teria que colocar mais” (L2 durante socialização da atividade com a turma).

Com o problema delineado o grupo se envolve na coleta de informações acerca da capacidade da máquina de lavar. O signo *“a gente viu que no Instituto Nacional de Metrologia, eles têm que a massa de material têxtil é seca! [...] E eu também liguei na lavanderia e isso nos causou um espanto, porque 10kg seriam bastante peças.”* (L2 durante diálogo com o grupo e com a professora) revela um desconhecimento no que se refere à forma como as roupas devem ser consideradas para a determinação da capacidade das máquinas de lavar.

A informação coletada, associada ao interesse das alunas de considerarem aspectos reais, faz com que o grupo incorpore à atividade de modelagem esse novo conhecimento que é revelado pelo signo manifesto por L3: *“Por isso que a gente fez a experiência com a roupa seca. A gente não considerou a roupa molhada”*.

Esse novo conhecimento, bem como o de que *“dentre os tipos de roupas que escolhemos, a pessoa pode lavar só a blusa, só a camisa, ou pode lavar juntos”* (L2 durante diálogo com o grupo e com a professora) conduzem à criação da seguinte hipótese inicial: *é possível lavar apenas um tipo de roupa ou combinar vários tipos*.

As roupas selecionadas pelas estudantes, segundo a justificativa de que *“seriam as roupas que mais usam no dia a dia”* (L1 durante socialização da atividade com a turma) são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1: Tipos e massa das roupas consideradas

Bermuda jeans	400g	Edredom de casal	2000g
Blusa de moletom	850g	Fronha	100g
Camiseta	200g	Jaqueta jeans	400g
Camisa	300g	Lençol de casal	800g
Calça jeans	700g	Toalha de banho	500g

Fonte: Acervo da pesquisa.

Embora os encaminhamentos parecessem estar alinhados à hipótese inicial, uma interferência da professora faz com que o grupo repense as estratégias adotadas para a solução do problema.

Professora: *Eu tenho uma restrição, muito embora matematicamente esteja correto, isso na situação que vocês têm não faz muito sentido, porque eu não posso combinar quaisquer dois tipos de roupa.*

L3: *é verdade*

L2: *Tem que ver quais tipos de roupa dá pra lavar junto.*

A interferência da professora faz com L4 se lembre que “*roupas que soltam pêlo eu não posso lavar com camisas e também tem roupas que soltam tinta*”. Ou seja, o diálogo com a professora traz à tona conhecimentos empíricos sobre o processo de lavagem que até então estavam sendo desconsiderados na atividade de modelagem matemática.

As experiências cotidianas das alunas, como a de “*aqui em casa pela quantidade de pessoas cada uma lava sua roupa, como o lençol é só o nosso eu já coloco com as toalhas porque eu acho que senão fica uma quantidade muito pequena na máquina*” relatada por L3, passam então a serem discutidas. Isso acarreta na reestruturação da hipótese inicial e a criação de uma nova hipótese expressas no Quadro 1.

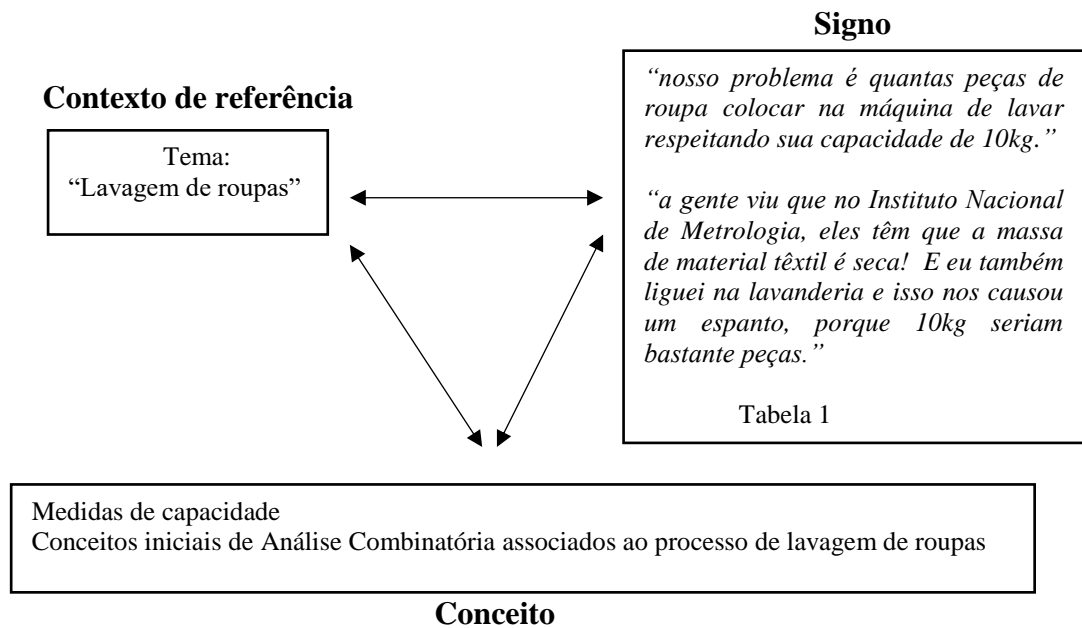
Quadro 1: Hipóteses consideradas na resolução do problema

<p><i>Hipótese 1:</i> é possível lavar apenas um tipo de roupa, ou combinar os vários tipos para serem lavadas juntas;</p> <p><i>Hipótese 2:</i> nem todos os tipos de roupas podem ser lavados juntos.</p>

Fonte: Acervo da pesquisa.

Como os signos produzidos/manifestos até aqui, de certo modo, se associam à temática investigada, construímos um triângulo epistemológico (Figura 4) que tem como contexto de referência o tema “lavagem de roupas”.

Figura 4: Triângulo epistemológico que tem como contexto de referência o tema em estudo



Fonte: Os autores.

Com as hipóteses definidas e as informações coletadas, as alunas, então, concentram-se no estudo das possibilidades de combinações de lavagens. A primeira opção considerada foi a lavagem de um único tipo de peça. Assumindo que x representa a quantidade de peças, o grupo resolveu a situação por meio de equações de 1º grau, conforme Quadro 2.

Quadro 2: Quantidades de peças no caso da lavagem de apenas um tipo de roupa

Bermuda jeans	$400x=10000$, portanto, 25 peças	Edredom	$2000x=10000$, portanto, 5 peças
Blusa	$850x=10000$, portanto, 11 peças	Fronha	$100x=10000$, portanto, 100 peças
Camiseta	$200x=10000$, portanto, 50 peças	Jaqueta jeans	$400x=10000$, portanto, 25 peças
Camisa	$300x=10000$, portanto, 33 peças	Lençol de casal	$800x=10000$, portanto, 12 peças
Calça jeans	$700x=10000$, portanto, 14 peças	Toalha de banho	$500x=10000$, portanto, 20 peças

Fonte: Os autores.

Nesse Quadro 2 consta que as alunas obtêm o número de peças para o caso da lavagem de um único tipo de roupa. O fato de as quantidades serem apresentadas em números inteiros indica que houve um arredondamento no valor da solução de cada equação. Isso revela, por um lado, a percepção das alunas de que a situação-problema estudada não admite como solução números decimais e que o arredondamento para mais, extrapola a capacidade da máquina de lavar. Porém, por outro, denota que as alunas não se atentaram ao fato de que, por exemplo, é impossível colocar 5 edredons para lavar na máquina, de uma única só vez.

Embora os valores encontrados no Quadro 2 não sejam a solução final do problema, o signo “*Desse modo, se desejarmos lavar apenas um tipo de roupa temos $ax = 10000$, onde a é a massa da roupa escolhida e x a quantidade de peças.*” (L2 durante socialização da atividade com a turma), sinaliza a intenção das alunas de expressar algebricamente a situação analisada, considerando um tipo de roupa, sem levar em conta se o número que resulta dessa equação é viável no contexto do problema que investigam.

Para os demais casos expressos na hipótese 1 (Quadro 1) a estratégia que as alunas adotam é a criação de conjuntos em que os elementos correspondem às peças que poderiam ser lavadas juntas:

“Temos que analisar quais roupas podem ser lavadas juntas, para tanto iremos considerar, dos tipos de peças citados na tabela, três conjuntos, sendo eles: $G_1 = \{\text{bermuda jeans, blusa de moletom, calça jeans e jaqueta jeans}\}$, $G_2 = \{\text{edredom, fronha, lençol de casal e toalha de banho}\}$ e $G_3 = \{\text{camisa e camiseta}\}$. Suponhamos que as peças que podem ser lavadas juntas pertencem ao mesmo conjunto” (Trecho do relatório produzido pelas alunas).

A partir desses conjuntos as alunas enunciam uma nova hipótese (*Suponhamos que as peças que podem ser lavadas juntas pertencem ao mesmo conjunto*), um signo associado à busca por solução para o problema em estudo, e prosseguem com a resolução do problema para o caso da lavagem de dois, três ou quatro tipos de peças diferentes. O Quadro 3 ilustra os signos produzidos nesse processo.

Quadro 3: Signos produzidos durante a resolução do problema

Opção de lavagem	Generalização dos alunos
Dois tipos de peças	<i>“teremos 13 combinações possíveis de tipos de roupas, pois, para o conjunto G_1 e G_2 temos $C_4^2 = 6$, e para o conjunto G_3 temos 1 combinação, desse modo $6+6+1=13$.”</i> <i>“Sendo assim, segue que: $ax_1 + bx_2 = 10000$ tal que a e b são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e x_1 e x_2 a quantidade de cada peça.”</i>
Três tipos de peças	<i>“teremos 8 combinações: por exemplo, lavar calça jeans, bermuda jeans e jaqueta jeans, ou lavar calça jeans, bermuda jeans e blusa de moletom, e assim com as demais peças.”</i> <i>“Sendo assim segue que: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 10000$, tal que a, b, c são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e x_1, x_2 e x_3 a quantidade de cada peça.”</i>
Quatro tipos de peças	<i>“teremos apenas duas combinações”</i> <i>“Que pode ser representado por: $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 10000$, tal que a, b, c, d são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e x_1, x_2, x_3 e x_4 a quantidade de cada peça.”</i>

Fonte: Os autores.

Muito embora as equações $ax = 10000$, $ax_1 + bx_2 = 10000$, $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 10000$ e $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 10000$ pareçam sintetizar em linguagem matemática a situação-problema para as diversas possibilidades de lavagem consideradas, e são assim consideradas pelas alunas, as respostas obtidas por meio dessas equações precisariam ser analisadas a fim de que possam ser assumidas como respostas satisfatórias ao problema investigado.

A possibilidade de obter uma única equação para representar todas as possibilidades é discutida pelas alunas quando enunciam *"E a gente pode fazer uma equação, eu acho que daria certo pois essa parte de o que lava com o quê a gente poderia fazer as combinações e considerar zero para o que a gente não faria combinação, né?"* (L1 em diálogo com o grupo e com a professora). A equação a qual L1 se refere, ilustrada no Quadro 4, foi considerada como uma solução para o problema investigado nessa atividade de modelagem matemática.

Quadro 4: Solução apresentada pelas alunas

Cada opção de lavagem apresenta uma equação. De modo geral podemos representar por: $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \dots + mx_n = 10000$, tal que a, b, c, d, \dots, m , são os pesos dos tipos de roupas escolhidos e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ a quantidade de cada peça.

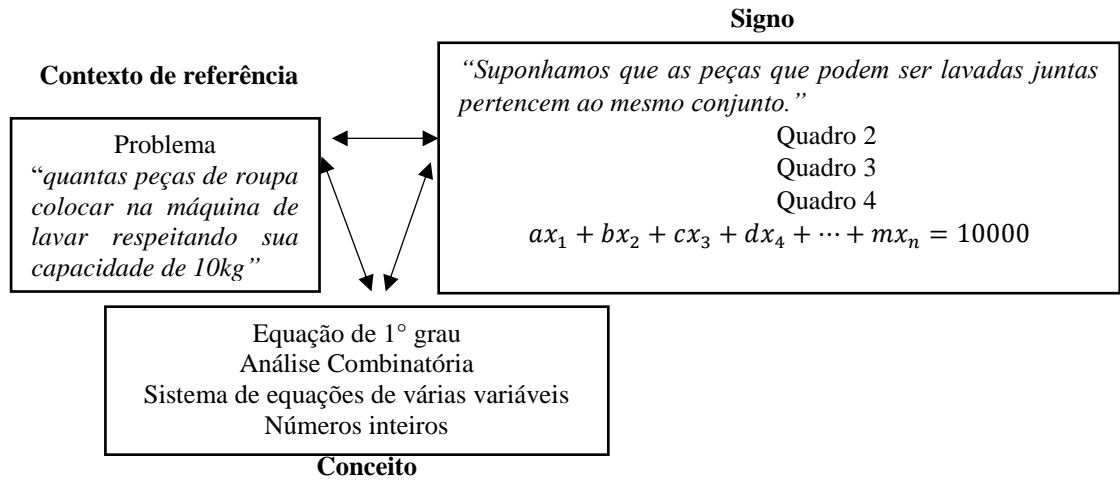
Sendo esta equação válida para todas as opções de lavagem, basta considerar como zero as peças que não serão lavadas.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Essa equação também pode ser reconhecida como um modelo matemático para a situação analisada. Embora a criação de modelos matemáticos não seja o objetivo das atividades de modelagem matemática, este modelo matemático representa uma solução geral para o problema e possibilita com que as alunas visualizem as diversas soluções que o problema pode assumir.

Na Figura 5, o triângulo epistemológico que construímos considera como contexto de referência o problema estudado, os signos produzidos/manifestos pelos estudantes durante a busca por sua solução correspondem ao outro vértice e, atrelados a esses dois elementos temos os conceitos manipulados e evidenciados.

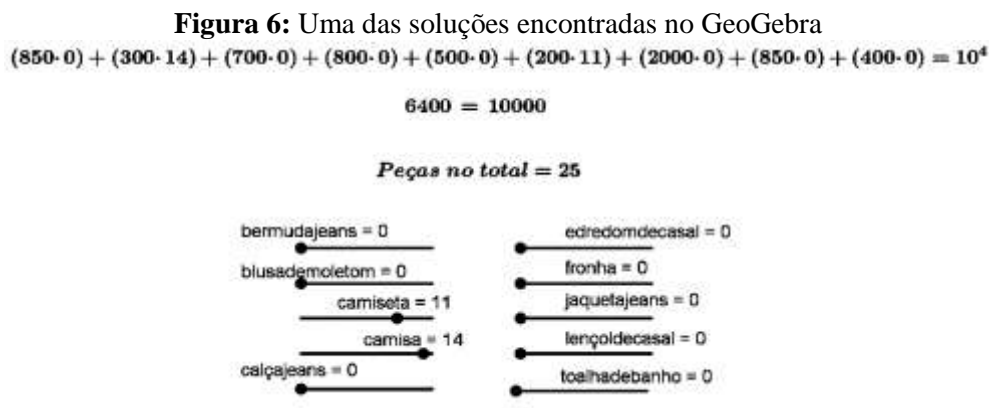
Figura 5: Triângulo epistemológico que tem como contexto de referência o problema da atividade



Fonte: Os autores.

A equação $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \dots + mx_n = 10000$, signo associado às diversas soluções do problema, juntamente com a declaração de L3 de que “*não é possível dizer qual a quantidade exata colocar na máquina para lavar*” provoca as alunas a buscarem por outros meios que possibilitasse explorar as múltiplas possibilidades de soluções. A opção das alunas foi pelo software GeoGebra. Essa escolha mostra, ao mesmo tempo, afinidade delas com os recursos computacionais, e também um desconhecimento quanto ao uso dos métodos de resolução de problemas de otimização.

A Figura 6, que ilustra a tela do software GeoGebra, exemplifica uma das possíveis soluções para o caso da lavagem de dois tipos de peças: 11 camisetas e 14 camisas. Nela identificamos que a estratégia adotada pelas alunas foi a criação de controles deslizantes, de modo que para as peças não consideradas na lavagem é atribuído o valor zero.



Fonte: Relatório final.

A busca por soluções para o problema tendo como base essa construção no Geogebra não foi suficiente para as alunas perceberem que a escrita matemática no software tinha

equivocos, já que, por exemplo $6400 \neq 10000$, apesar delas expressarem acerca disso: “o INMETRO recomenda não atingir o volume máximo da máquina, pois pode causar danos a ela, encontramos que a quantidade de peças deve ser maior ou igual a 5 e menor que 50” (L2 durante socialização da atividade com os colegas).

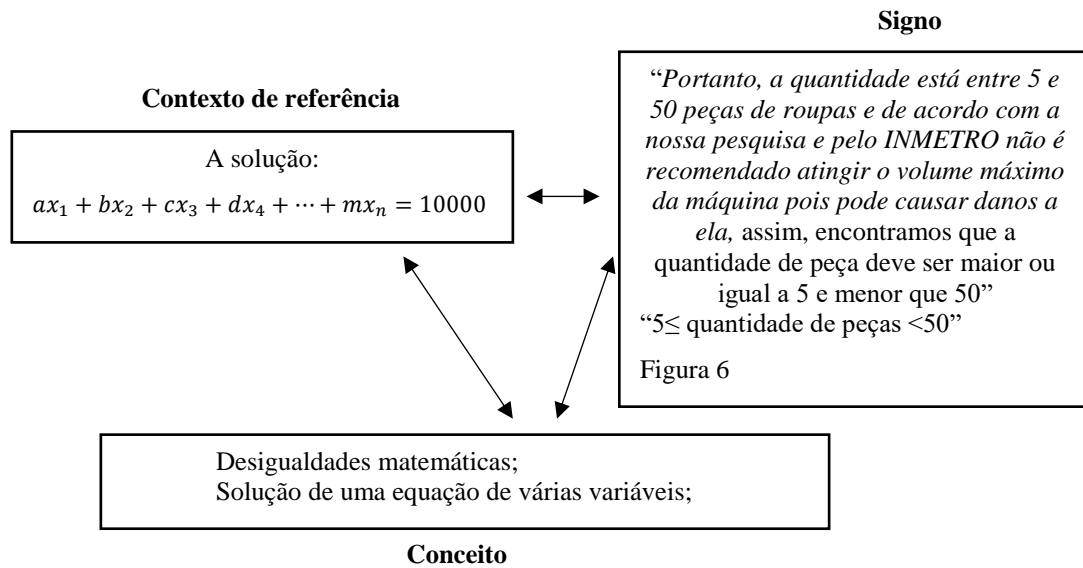
Devido à ausência de reflexão acerca da expressão matemática, ilustrada na Figura 6, em associação com a informação do INMETRO, as alunas não reescrevem o modelo matemático, considerando que a quantidade total de roupas deve ser igual ou menor à capacidade da máquina, ou seja, $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \dots + mx_n \leq 10000$.

O depoimento “*analizando as opções, temos que a quantidade está entre 5 (para o caso de se lavar apenas edredom) e 100 peças (para o caso de se lavar apenas fronhas, mas esta é uma roupa de cama, que não se troca todos os dias, dificilmente teremos 100 peças de fronhas para lavar [...] encontramos que a quantidade de peças deve ser maior ou igual a 5 e menor que 50*”, indica que as alunas refletiram sobre o valor encontrado e foram capazes de fazer inferências, descartando alguns valores que não eram condizentes com o problema em estudo. Porém, elas desconsideraram outros, como no caso de parecerem assumir que na máquina caberiam 5 edredons.

O signo “*encontramos que a quantidade de peça deve ser maior ou igual a 5 e menor que 50*”, denota um conhecimento sobre desigualdades matemáticas, que também é evidenciado na produção do signo “ $5 \leq \text{quantidade de peças} < 50$ ” presente no relatório entregue pelas alunas, mas sugere que elas se distanciaram da situação em estudo quando assumem esse intervalo. Elas encontram uma resposta para o problema matemático, mas essa resposta não é solução para a situação investigada.

Tomando a equação $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + \dots + mx_n = 10000$ como contexto de referência do triângulo epistemológico da Figura 7, associamos a esse contexto os signos e conceitos mobilizados durante este processo de averiguação da solução.

Figura 7 : Triângulo epistemológico que tem como contexto de referência a solução para o problema



Fonte: Os autores.

Esses triângulos epistemológicos por nós construídos, que consideram os signos produzidos/manifestos pelas alunas sugerem uma possibilidade de analisar, semioticamente, a atividade de modelagem matemática “Lavagem de roupas” e inferir acerca dos (des)conhecimentos dessas alunas, seja relativo ao fazer modelagem matemática, seja em relação aos objetos matemáticos.

Na próxima seção trazemos algumas ponderações e inferências acerca dos signos em associação com os outros dois vértices do triângulo epistemológico.

Resultados e discussões

Na análise que empreendemos não somente os signos matemáticos são importantes para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Olhamos para todos os signos, reconhecendo-os, como sugere Peirce (2005), que eles são instrumentos pelos quais conhecimentos são manifestos.

O olhar para os signos no contexto de triângulos epistemológicos, contudo, nos possibilita considerá-los em associação com os outros dois vértices do triângulo: contexto de referência e conceito. Nesse modo de olhar, os signos não são vistos em separado, mas analisados segundo o objeto que referenciam.

O triângulo epistemológico da Figura 4, que considera conexões entre signos, conceito e contexto de referência atrelados ao tema ou fenômeno estudado, contém signos “preliminares”, que de certa forma, foram produzidos pelas alunas quando consideraram

alguns aspectos do fenômeno em estudo, mas, desconsideram outros, por exemplo, quando as alunas formulam uma hipótese inicial sem considerar, na prática, como se dá a organização das roupas para realizar a lavagem.

Inferimos, a partir desses signos, que elas inicialmente se distanciam do problema em si e consideram apenas a necessidade de elaborar hipóteses, já que estão desenvolvendo uma atividade de modelagem matemática. Ou seja, elas incorporam o que os referenciais teóricos enfatizam: que “a busca por uma relação entre o problema e um objeto matemático é explicitada na elaboração de hipóteses” (RAMOS, 2020, p. 40) e, sem querer, ao enunciar a hipótese inicial se distanciam do problema investigado. Somente após diálogo com a professora da disciplina é que conhecimentos até então desconsiderados na atividade são “ativados” e conduzem à reformulação dessa hipótese.

Lembrando o que apontam Almeida, Silva e Vertuan (2012), Ramos (2020) e Silva (2013), sobre o papel do professor no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, ponderamos que, nessa atividade, a intervenção da professora foi determinante para que as alunas refletissem acerca das escolhas e encaminhamentos que estavam assumindo e avaliassem outras possibilidades de encaminhamentos. Isso levou à produção de novos signos, sinalizando que elas associaram conhecimentos relativos à situação analisada com outros que não haviam se atentado até então.

Nesse triângulo também indicamos que há signos que incorporam conhecimentos adquiridos a partir do contato com informações acerca da temática investigada. A informação obtida acerca de como a massa da roupa deve ser considerada na lavagem constituiu-se em um novo conhecimento, manifesto por meio do signo: “*Por isso que a gente fez a experiência com a roupa seca. A gente não considerou a roupa molhada*”, que permitiu com que as alunas refletissem acerca de suas ideias iniciais.

Ponderamos então que, os signos produzidos pelas alunas com referência ao tema em estudo, revelam, sobretudo, conhecimentos extramatemáticos e, embora não se refiram diretamente a objetos matemáticos, carregam em si, aspectos dos conceitos matemáticos que são aludidos como sendo importantes diante do fenômeno estudado. Isso nos provoca a inferir que tais signos também trazem à tona conhecimentos das alunas sobre o *fazer* modelagem matemática.

O processo de busca por uma solução para a questão eleita para estudo nessa atividade de modelagem matemática é ilustrado no triângulo epistemológico da Figura 5. As conexões entre contexto de referência (problema), signo e conceito, indicam, a partir dos signos produzidos/manifestos pelas alunas, a investigação empreendida por elas e as ferramentas ou

objetos matemáticos que recorrem com vistas a solucionar a questão investigada.

O modo como as alunas resolvem a equação ($ax = 10000$), manifesto nos signos que produzem em associação com o problema, revela, ao mesmo tempo, que elas consideram o problema em estudo, mas se distanciam do que efetivamente, na prática, é possível colocar de roupa na máquina para lavar. Nesse sentido, elas parecem assumir que têm um problema matemático para resolver, sem levar em conta que esse problema é oriundo de uma situação com referência na realidade. Inferimos, portanto, que elas se distanciam da compreensão de Almeida, Silva e Vertuan (2012) no que se refere ao que vem a ser uma atividade de modelagem matemática.

Outro signo que denota que as alunas se distanciam do problema em estudo é explicitado nas combinações indicadas no Quadro 3. Ao considerar tais combinações elas apresentam as possibilidades de lavagem, considerados os três grupos de roupas (G1, G2 e G3) que organizam amparadas nas hipóteses assumidas, mas isso não responde ao problema que está sendo investigado. O abandono desses signos, no entanto, sinaliza que as alunas reconhecem que se distanciaram do problema.

Os signos indicados nesse triângulo epistemológico denotam que as alunas além de se preocuparem em responder à questão que elegeram para estudo, buscam encontrar uma solução, em forma de modelo matemático, que considera as diversas possibilidades de lavagem de roupas por elas adotadas. Contudo, o signo que se configura um modelo matemático para a situação em estudo não carrega todas as especificidades dessa situação. Por exemplo, as alunas não incorporam ao modelo matemático o conhecimento de que se pode colocar uma quantidade menor que a capacidade da máquina de lavar. Nesse sentido, o triângulo epistemológico da Figura 5 revela que nem todos os conhecimentos matemáticos acionados no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática estavam em conexão com o contexto de referência em foco nessa fase da atividade, a saber, o problema em estudo.

No triângulo epistemológico da Figura 7, que considera conexões entre signos, conceitos e contexto de referência relacionados à análise acerca da solução obtida para o fenômeno estudado, os signos produzidos/manifestos pelos alunos se associam tanto a conhecimentos matemáticos como não matemáticos. Por exemplo, na tentativa de responder ao problema investigado, L2 incorpora à solução um conhecimento oriundo de suas experiências cotidianas e descarta a opção de se lavar 100 peças de fronhas a partir do signo: *“mas esta é uma roupa de cama, que não se troca todos os dias, dificilmente teremos 100 peças de fronhas para lavar. Portanto, a quantidade está entre 5 e 50 peças de roupas”*, que enuncia. Porém, por outro lado, desconsidera que é totalmente impossível lavar, em uma

mesma lavagem, 5 edredons.

O signo da Figura 6 assumido pelas alunas para representar que o problema investigado pode assumir infinitas soluções, denota que elas reconhecem que um problema em Modelagem Matemática não precisa ter resposta única. A possibilidade de fazer alterações nos controles deslizantes, considerando os grupos de roupas que podem ser lavadas juntas, ao mesmo tempo que indica o caminho adotado por elas para a obtenção de uma variedade de soluções para o problema investigado, sinaliza que elas entendem que uma atividade de modelagem matemática precisa ter as soluções dos problemas validadas no contexto do fenômeno analisado. Além disso, elas parecem entender o que significa o processo de interpretação das soluções, indicado como uma das fases da modelagem matemática.

A seguir tecemos algumas considerações sobre o estudo realizado.

Considerações Finais

A proposta de discutir acerca de aspectos da Modelagem Matemática revelados nos triângulos epistemológicos que consideram os signos produzidos/manifestos por alunos ao longo de uma atividade de modelagem matemática que teve como tema a “Lavagem de roupas” nos levou a reescrever essa atividade a partir de três triângulos epistemológicos.

Em tais triângulos, as conexões estabelecidas entre signos, contexto de referência e conceito elucidam que os contextos de referências se alteram e se modificam ao passo que as alunas avançam no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Da mesma forma, o conceito evocado em cada fase da atividade também se altera, trazendo à tona os conhecimentos mobilizados pelas alunas para transitar da situação inicial para a situação final.

Essa alternância dos três elementos do triângulo epistemológico, representada nos triângulos epistemológicos dessa atividade de modelagem matemática ratifica o caráter dinâmico, que segundo Steinbring (2005) é característico do triângulo epistemológico. Além disso, essa dinamicidade ilustrada nos triângulos que construímos enaltecem os elementos característicos de uma atividade de modelagem matemática e revelam aspectos relacionados ao modo como essas alunas compreendem o *fazer* modelagem matemática.

Os signos, produzidos/manifestos pelas alunas, que indicamos nos triângulos epistemológicos que construímos denotam que conhecimentos matemáticos e não matemáticos foram ativados ou construídos ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, muito embora, nem sempre, atrelados ao que de fato era requerido naquela fase da atividade.

A partir dos três triângulos epistemológicos dessa atividade de modelagem matemática evidenciamos que os signos produzidos/manifestos tendo um contexto de referência como âncora, se articulam com os signos produzidos/manifestos em associação com outro contexto de referência, e assim por diante. Com isso, inferimos que esses vértices dos triângulos epistemológicos se alteraram, e o que foi reconhecido como signo em um momento da atividade de modelagem matemática, em outro, pode ser identificado como contexto de referência. Essa alternância entre esses dois vértices também provoca com que o conceito evocado nessas conexões entre signos e contexto de referência se altere, se modifiquem ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

A impossibilidade de retratar uma atividade de modelagem matemática a partir de um único triângulo epistemológico nos sugere que é o conjunto de triângulos epistemológicos da atividade de modelagem matemática que traz à tona o caráter dinâmico inerente à Modelagem Matemática.

Além dessas considerações, destacamos que a autonomia vislumbrada no contexto das atividades de modelagem matemática desenvolvidas no 3º momento (ALMEIDA, DIAS, 2004) se fez presente, já que as alunas, no âmbito de seu grupo, discutiram, investigaram e escolheram, livremente, as estratégias que culminaram na busca por solução para o problema em estudo. Isso também provocou com que conhecimentos de diversas naturezas fossem mobilizados e signos de diversos tipos fossem produzidos/manifestos.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, n. temático, p. 387-414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, ano 17, n.22, pp. 19-35. Rio Claro SP: SBEM, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 31, n. 57, p. 202-219, abr., 2017.

BURAK D. Modelagem Matemática sob um olhar de educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, Vol. 1, 10-27, 2010.

CARREIRA, S. P. G.. Where there's a model, there's a metaphor: Metaphorical thinking in students' understanding of a mathematical model. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 3, n. 4, p. 261-87, 2001.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2005.

RAMOS, D. C. **Modelagem Matemática: uma análise semiótica das experiências dos alunos**. (Tese de doutorado) – Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2020.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. Coleção Primeiros Passos. São Paulo: Brasiliense, 2003.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática e Semiótica: implicações para a atribuição de significado**. (Tese de doutorado) – Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2013.

STEINBRING, H. **The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: an epistemological perspective**. Mathematics Education Library, vol. 38, New York: Springer, 2005.

STEINBRING, H. What makes a sign a Mathematical Sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. **Educational Studies in Mathematics**. New York: Ed. Springer, v. 61, n. 1, p.133-162, feb. 2006.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática**. Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida. 2013. 176 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

Recebido em: 01 de setembro de 2021
Aprovado em: 08 de outubro de 2021