revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MODELAGEM MATEMÁTICA A PARTIR DO FUTSAL: UMA INVESTIGAÇÃO COM MESTRANDOS SOB UMA PERSPECTIVA INTERDISCIPLINAR

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.23.395-414

Alex Almeida de Souza[1]
Taíze Cardoso de Sousa[2]
Camilla do Valle Soares Cedraz[3]
José Lucas Matias de Eça[4]

Resumo: Neste relato de experiência, apresenta-se uma atividade desenvolvida com estudantes de um curso de pós-graduação *stricto sensu*, à luz da Modelagem Matemática (MM), segundo a perspectiva de Biembengut (2016). O intuito dessa atividade investigativa no contexto de uma prática esportiva (futsal) foi produzir dados que culminaram na feitura de um modelo matemático que atendesse à situação-problema: qual seria a altura máxima que uma bola alcançaria para encobrir o goleiro e ir direto ao gol? A atividade de modelagem foi desenvolvida com cinco mestrandos, de uma Universidade pública do estado da Bahia. Os instrumentos de coleta de dados utilizados foram questionários, diário de campo e os dados da produção do material pelos envolvidos. Os resultados apontam para o desenvolvimento de autonomia, devido ao empenho na busca pelo saber. Além disso, destaca-se o aspecto interdisciplinar, inovador e investigativo que a atividade baseada na MM oportunizou, principalmente, por ter aproximado, em um mesmo ambiente educativo, as dimensões teórica e empírica, em prol da construção de saberes matematizados a partir de uma prática esportiva do cotidiano do estudante da Educação Básica.
Palavras-chave: Modelagem Matemática. Prática docente. Futsal.

MATHEMATICAL MODELING FROM FUTSAL: A RESEARCH WITH MASTERS UNDER AN INTERDISCIPLINARY PERSPECTIVE

Abstract: In this experience report, an activity developed with students of a *lato sensu* graduate course is presented, under the light of Mathematical Modeling (MM), according to the perspective of Biembengut (2016). The purpose of this investigative activity in the context of a sport practice (futsal) was to produce data that culminated in the creation of a mathematical model that met the problem situation: what will be the maximum height that a ball would reach to cover the goalkeeper and go straight to the goal? The modeling activity was developed with five masters, at a public university in the state of Bahia. The data collection instruments used were questionnaires, a field diary and data on the material's production by those involved. The results point to the development of autonomy, due to the effort in the search for knowledge. In addition, the interdisciplinary, innovative and investigative aspect that the activity based on MM provided, mainly because it brought together, in the same educational environment, the theoretical and empirical dimensions, in favor of the construction of mathematized knowledge through a sports practice in the daily life of Basic Education students.
Keywords: Mathematical Modeling. Teaching practice. Futsal.

[1] Mestre em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz/UESC, E-mail: aasouza27@hotmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0001-5639-0472.
[2] Mestre em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz/UESC, E-mail: tayserangel@gmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-1142-3987.
[3] Mestre em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz/UESC, E-mail: eu_millinha@hotmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-7508-3600.
[4] Mestre em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz/UESC, E-mail: lucasceeft@hotmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0001-5848-2100.

Introdução

Diminuir o distanciamento entre o campo teórico com a sua aplicabilidade no cotidiano, principalmente como sendo indissociáveis no exercício da docência, tem sido um constante desafio para muitos professores da Educação Básica, em especial, para os de Matemática (PIMENTA; LIMA, 2006). Outra constatação que se adiciona a esse desafio é a constante narrativa desmotivacional dos estudantes em relação ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática (BIEMBENGUT, 2016).

Segundo Fiorentini (1995), essas constatações estão associadas à maneira como as aulas de Matemática estão sendo conduzidas por uma expressiva parcela de professores em diferentes etapas, modalidades ou níveis de ensino. Essas ações são caracterizadas pelo engajamento enfático aos objetos matemáticos por si mesmo, sem, no entanto, haver uma articulação desses com os diferentes setores da sociedade, principalmente aqueles que compõem a realidade dos estudantes. Fato que distancia o estudante de uma compreensão holística dos conceitos matemáticos, aliada à produção de significado em sua prática sociocultural diária (BIEMBENGUT, 2016; ROSA; OREY, 2017).

Emanam desse contexto, distintas variáveis, que exigem que o professor realize, na prática, profundas reflexões (PIMENTA; LIMA, 2006). Afinal, por que estudar Matemática é sinônimo de desânimo ou desinteresse para esse público? Não se buscam, aqui, respostas para essa problematização, mas demarcar, apenas, como ponto de reflexão necessária à tensão inicial. Esse cenário, contudo, segundo Skovsmose (2017) e Pinto (2005), transita pela concepção dos próprios professores em relação à Matemática e pela forma como o processo de ensino desse componente está posto, na maioria das aulas, ancorada pelo enaltecimento da formalização, axiomatização, e das regras algorítmicas.

Esse viés educacional, caracterizado por aulas expositivas – vinculadas à transmissão de conhecimento –, e carregadas por uma linguagem técnica e abstrata, produz um cenário de difícil compreensão da Matemática. Além de tornar o estudante um simples receptor passivo do conhecimento depositado pelo docente, ao invés de produtor na construção das etapas de seu próprio conhecimento (SKOVSMOSE, 2000).

Por outro lado, as mudanças nos vetores curriculares educacionais (BRASIL, 2013, 2017), que estão associadas às alterações das demandas sociais, pressupõem uma perspectiva de ensino que torne o estudante ativo no processo de ensino e aprendizagem, por meio de uma abordagem dialética (FREIRE, 1996). Sobretudo, ao considerar – em um processo de escuta –, os interesses, as angústias, as expectativas e os elementos encontrados em seus próprios contextos socioculturais. Uma vez que "[...] não é possível preparar alunos capazes de solucionar problemas ensinando conceitos matemáticos desvinculados da realidade, ou que se mostrem sem significado para eles, esperando que saibam como utilizá-los no futuro" (BIAGGI, 2000, p. 4). Afinal,

> [...] aprender é um ato de conhecimento da realidade concreta, isto é, da situação real vivida pelo educando, e só tem sentido se resulta de uma aproximação crítica dessa realidade. Portanto o conhecimento que o educando transfere representa uma resposta à situação de opressão a que se chega pelo processo de compreensão, reflexão e crítica (LIBÂNEO, 1991, p. 54).

Convergindo com a ideia de Libâneo (1991), segundo Skovsmose (2017), a prática docente do professor de Matemática deve pautar-se em princípios metodológicos que envolvam situações reais e lúdicas, pautadas em ações investigativas. Salienta-se que, sob esse viés, o estudante cria estratégias, explora possibilidades, conjectura hipóteses, reformula possíveis resoluções, ou seja, desenvolve o pensamento crítico. Com efeito, constroem-se, nesse espectro, condições para que o estudante desenvolva competências e habilidades para tornar-se autônomo em variados contextos sociais.

Aliado a esse propósito, diferentes tendências da Educação Matemática (EM) debruçam-se em construir um arcabouço teórico que visa fundamentar as ações pedagógicas para que professores de diferentes etapas, modalidades, ou níveis da Educação, consigam promover um ambiente educacional (SILVA, 2017) em que os estudantes interajam nos processos que envolvem o ensino e a aprendizagem. Principalmente, tornando-se coautores da construção de seus próprios saberes, de modo participativo, autônomo e crítico. Essas mudanças de perspectiva requerem – segundo o Documento Curricular Referencial da Bahia (DCRB) – "[...] um olhar mais criterioso em relação às escolhas das temáticas das tendências em Educação Matemática e a sua aplicação como proposta metodológica para o ensino dessa disciplina" (BAHIA, 2019, p. 325).

Desse modo, dentre as tendências da EM que se apresentam como alternativas para o ensino de Matemática sob esses vieses, o escopo deste trabalho basear-se-á na utilização da MM como método de ensino, segundo a perspectiva de Biembengut (2016). Essa forma de ensino possibilita a exploração Matemática, no plural, desmistificando, assim, uma abordagem unitarista dessa área, que valoriza, sobretudo, os elementos formais, ao invés da construção do pensamento/raciocínio matematizado, que pode se constituir de modo diferente para cada indivíduo. Elementos que se distanciam da perspectiva tradicional de ensino que, após a homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), perdeu espaço nos ambientes educativos formais.

Na tentativa de articular o ensino de Matemática de maneira lúdica e com significado para o estudante da Educação Básica, em especial, aqueles da rede pública de ensino, optou-se, como temática norteadora desta investigação, por uma prática esportiva relacionada ao contexto do público infanto-juvenil dessa etapa. Na tentativa de construir possibilidades de construção de saberes matemáticos tendo como leme direcional o interesse à aprendizagem pelo próprio estudante, que, por vezes, o modelo de transmissão do saber, não proporciona, vislumbra-se por meio deste trabalho a intencionalidade de envolver as

> [...] práticas esportivas voltadas ao ensino da matemática, tendo como foco o lúdico como instrumento facilitador, buscando romper as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos e, ao mesmo tempo, desenvolvendo o interesse e a motivação em aprender matemática (BEZERRA, 2016, p. 2).

Esse cenário educacional distancia-se do conhecimento formalista e estático e se aproxima da experimentação, do dinamismo na/para a construção do saber (SKOVSMOSE, 2000). Isso implica o rompimento com a zona de conforto entre os envolvidos no processo e a abertura de uma zona inquietante pela busca do saber. Nessa mesma linha de pensamento, Garcia, Brito e Santos (2015, p. 2) enaltecem que a articulação entre a Matemática e a prática esportiva, pode fazer com que "[...] o professor e o aluno trabalhem juntos, conduzindo assim o ensino-aprendizagem" de maneira mútua.

Considerando o breve exposto, neste trabalho, relatam-se as etapas de uma atividade de matemática desenvolvidas à luz da MM no âmbito de um curso de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Para tanto, este texto está estruturado, além desta introdução, que descreve os aspectos globais da temática e define o objetivo do trabalho, em quatro seções subsequentes, a saber: um panorama da perspectiva de MM, segundo Biembengut (2014; 2016), que foi utilizado na investigação; a descrição do percurso metodológico da investigação; a análise da atividade de MM desenvolvida; e, por fim, a exposição das conclusões decorrentes dos resultados.

Modelagem Matemática

Constantemente, no ambiente escolar, professores são indagados, pelos estudantes, sobre o real motivo para estudar determinados objetos de conhecimento matemático e/ou de que forma esses estudos serão utilizados em suas vidas cotidianas. Isto é, para que serve a Matemática? Dentre as variáveis que contribuem para essa visão, destaca-se, aqui, a desmotivação do estudante como elemento catalisador de processos que envolvem o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Diante dessa constatação, surge a ideia de levar a MM como método de ensino para intermediar esse processo, pois essa tendência possibilita que o estudante realize uma ligação entre as representações abstratas da matemática e o mundo (BASSANEZI, 2010). Vale ressaltar que o trabalho com Modelagem – construção de modelos – surgiu nos cursos de engenharias e demais cursos que utilizam os conhecimentos matemáticos para solucionar problemas reais vinculados a essas áreas do conhecimento.

O emprego da MM, nesse sentido, propicia a construção do senso crítico; a autonomia na tomada de decisões; e o exercício da cidadania. Além disso, esse método, de certo, distancia-se do paradigma tradicional de ensino e descentraliza a figura do professor (SKOVSMOSE, 2000), pois dá a oportunidade ao estudante de participar ativamente de todas as ações do processo educativo. Ainda, essa perspectiva é caracterizada por um método que visa a solução de situações-problema advindas da realidade por meio do conhecimento matemático (BIEMBENGUT, 2009). Corroborando com isso, Bassanezi (2010) afirma que a MM é a forma de traduzir problemas reais para a linguagem matemática, a fim de solucioná-los.

Associado a isso, na MM propõe-se a trabalhar com a construção de modelos matemáticos para a resolução de situações-problema, ou para a compreensão de algum fenômeno, utilizando-se alguma teoria do âmbito matemático. Ou seja, um conjunto de ações que permite representar a realidade por meio de um modelo matemático que, por sua vez, descreve tal realidade. Dessa forma, Bassanezi (2010) caracteriza o modelo matemático como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representa, de alguma forma, o objeto estudado.

Sob o olhar de Biembengut e Hein (2013, p. 12), o modelo matemático é "[...] um conjunto de representações matemáticas para traduzir de alguma forma um problema do cotidiano, utilizando-se de elementos matemáticos formais para essa construção". Apesar de existirem diferentes definições na literatura científica para modelo matemático, todas se resumem em uma representação (fórmula, desenho, maquete, objetos matemáticos, entre outros) simplificada da realidade vivenciada pelo investigador, conforme a sua visão, que responde adequadamente à situação-problema.

No vasto campo da EM pesquisadores (BIEMBENGUT, 2016; BASSANEZI, 2010; BURAK, 2005; CALDEIRA, 2009; BARBOSA, 2004, entre outros), conceituam e apresentam a MM de diversas formas, tendo como foco em comum a busca pela melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática. E das diferentes formas que a MM se apresenta no campo teórico, a que melhor se coaduna com os objetivos desta pesquisa, e a escolhida foi a concepção de Biembengut (2016, p. 177), ao afirmar que

> *Modelagem na Educação* é um método em que se utiliza a essência do processo na Modelagem no ensino e na aprendizagem da Educação formal. Orienta-se pelo ensino do conteúdo do programa curricular da disciplina (e não curricular) a partir de um *tema/assunto* e, paralelamente, pela orientação dos estudantes à pesquisa sobre algo que lhe possa interessar (grifos no original).

Sobre esses aspectos, Biembengut (2016) propõe o desenvolvimento da MM a partir de três fases, a saber: Percepção e Apreensão; Compreensão e Explicitação; e, por fim, Significação e Expressão. Apresenta-se, sucintamente, cada fase a seguir:

- *Percepção e apreensão*: é o momento em que há a escolha do tema – seja pelo estudante ou pelo professor – a ser explorado. Para que essa temática seja envolvente para todos, de modo horizontal, segundo Biembengut (2016), é importante que a preferência de escolha seja do estudante. A partir da definição do tema, inicia-se com a ampliação das informações pertinentes em uma busca por meio da pesquisa. Isso faz com que haja uma compreensão do tema escolhido, o que, de certa maneira, contribui para a delimitação da situação-problema a ser modelada.
- *Compreensão e explicitação*: após o levantamento de dados ocorrido na fase anterior, passa-se para o momento de construir o modelo que atenda à resolução da situação proposta. Para isso, faz-se necessária a formulação de hipóteses e constantes indagações que levam à feitura do modelo. Isto é, representa o momento em que "[...] transpõe-se o problema de alguma realidade para a Matemática onde será tratado através de teorias e técnicas próprias desta Ciência" (BASSANEZI, 2010, p. 25).
- *Significação e expressão*: por fim, a incumbência dessa fase sintetiza-se pela busca da validação do modelo elaborado. Ou seja, pretende-se, aqui, saber se o modelo atende ou não à situação-problema proposta na primeira fase. Se esse modelo não atender à solução do problema inicial, Biembengut (2016) salienta que devem ser retomadas as fases anteriores, a fim de reorganizar e/ou ampliar os dados, para que, assim, seja possível construir um modelo compatível com as expectativas do problema proposto.

Sob o olhar de Biembengut (2016), o processo de MM deve seguir as três fases apresentadas anteriormente, pois esses processos garantem ao estudante

> [...] apreender e compreender melhor assuntos acadêmicos que fazem parte do programa curricular; saber ler, interpretar, formular e resolver situações-problema; conhecer os diferentes contextos envolvidos na Modelação; despertar os sensos críticos e criativo deles ao explicitar um modelo, 'modelado' nas diferentes linguagens requeridas na comunicação deles (BIEMBENGUT, 2016, p. 179, grifo no original).

Dessa maneira, percebe-se que a MM pode auxiliar nas aulas de Matemática, ao possibilitar uma nova maneira de lecionar; proporcionando possibilidades de construção de saberes por meio da pesquisa e despertando o interesse dos estudantes. Na próxima seção, serão apresentadas as ações adotadas para o desenvolvimento da atividade de MM.

Procedimentos metodológicos

A presente investigação pautou-se pelo caráter qualitativo, segundo Bogdan e Biklen (2010), uma vez que se pretendeu melhor compreender o fenômeno analisado por meio da interpretação dos dados provenientes dos sujeitos envolvidos. Participaram deste estudo cinco mestrandos de um programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática de uma Universidade Estadual da Bahia. Salienta-se que os mestrandos são professores que atuam na rede pública de ensino nos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

A atividade aqui relatada foi requerida pela professora do componente curricular Tópicos Especiais em EM, oferecido no primeiro semestre do curso, após os mestrandos terem estudado a parte teórica da MM. Com o intuito de melhor entender os pressupostos que se baseiam nessa tendência, no período final desse componente, foi orientada uma atividade realizada à luz desse método de ensino.

Diante das diversas concepções sobre a MM posta na literatura, optou-se pela perspectiva de Biembengut (2016), por entender que esse método possui características pedagógicas de ensino que se alinham aos interesses desta investigação. Principalmente pelo fato de reunir uma gama de possibilidades metodológicas que privilegiam a construção holística do saber – de modo participativo – entre todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, ao invés de concentrar esse intento apenas no ofício docente.

Essa investigação, que teve como temática central as práticas esportivas mais usuais entre o público infanto-juvenil, ocorreu durante três encontros de 70 minutos cada, intercalados semanalmente, sendo que cada encontro representou uma fase proposta por Biembengut (2016), como descrito a seguir. Antes disso, é importante destacar que os cinco participantes foram divididos em dois grupos: Grupo A, com três integrantes e, Grupo B, com dois integrantes. E, por limitação de escrita, optou-se pela escolha de apenas um dos grupos para a análise dos dados (Grupo A). A escolha favoreceu a maior participação e interação dos componentes de cada grupo em todas as etapas. Para operacionalizar a proposta de Biembengut (2016), as ações da atividade de MM ocorreram como apresentado no Quadro 1.

Quadro 1: Planejamento das ações do projeto

Fases da MM Propostas por Biembengut (2016)	**Ações /Objetivo**	**Responsáveis**
1ª fase – percepção e apreensão	Discutir os aspectos gerais entre a Matemática e as práticas esportivas, com o intuito de sensibilizar os participantes sobre o tema	Professora e participantes
	Apresentar um vídeo com a intenção de aproximar os participantes da temática envolvida	Professora
	Debater as possibilidades de associação entre o ensino de Matemática com as práticas esportivas, a fim de delimitar o tema e o problema de investigação	Professora e participantes
	Ampliar as informações pertinentes à temática por meio de busca/pesquisas/leituras, com o objetivo de reunir um conjunto de dados pertinentes que possa contribuir para a resolução do problema inicial	Participantes
2ª fase – compreensão e explicitação	Transitar os elementos contidos no contexto investigado para a linguagem matemática, com o objetivo de utilizar as técnicas da Matemática como auxílio para o problema investigado	Participantes
	Formular hipóteses para a feitura do modelo, com a pretensão de encontrar a resolução do problema inicial	Participantes
3ª fase – percepção e apreensão	Verificar se as hipóteses construídas atendem à situação-problema proposta, cuja intenção é validar o modelo elaborado	Professora e participantes

Fonte: Os autores.

Para a produção dos dados, foram utilizados os seguintes instrumentos: questionários; diário de campo; e registros da produção do material construído pelos participantes. A reprodução de todos os dados aqui apresentados tem o consentimento dos envolvidos. Na próxima seção, descrevem-se as fases da atividade, bem como apresenta-se a análise dos dados produzidos pelos mestrandos durante a prática de MM.

Apresentação e discussão da prática de MM

A análise foi realizada por meio de três categorias, elencadas a partir das três fases da MM. Assim, esta seção está organizada em três subseções, de acordo com a nomeação das categorias – Percepção e Apreensão; Compreensão e Explicitação; e, por fim, Significação e Expressão – como seguem.

Percepção e Apreensão

Esta primeira categoria de análise refere-se ao movimento inicial de investigação, em que foi discutido e escolhido o tema a ser explorado na atividade embasada na perspectiva de Biembengut (2016). Para tanto, foi proposto, aos mestrandos, que investigassem sobre uma prática esportiva relacionada ao contexto do público infanto-juvenil da Educação Básica, a fim de familiarizar os envolvidos com o tema. Com o intuito de mobilizar os participantes a aguçarem os seus próprios conhecimentos a respeito do enfoque da pesquisa, foi proposta uma discussão ampla, a partir das seguintes problematizações: *existem conhecimentos matemáticos nessas práticas esportivas? Quais os elementos da matemática que podem ser explorados?*

O debate a respeito dessas indagações iniciais convergiu para o entendimento dos participantes de que há diferentes objetos de conhecimento matemáticos que podem ser explorados nas diversas práticas esportivas, perpassando, inclusive, por todas as unidades temáticas previstas na BNCC, sob uma perspectiva inovadora, interdisciplinar e investigativa – como se propõe a fazer na MM.

Assim, nesse primeiro movimento de familiarização com a temática, houve um consenso entre os envolvidos de que o ambiente esportivo pode ser um espaço propício para se introduzir, construir, ou ressignificar saberes matemáticos. Articulando, sobretudo, aspectos teóricos e empíricos, de maneira a não privilegiar uma dimensão em detrimento de outra.

Com o intuito de ampliar os horizontes sobre o contexto, foi exibido um vídeo[5] que relaciona a Matemática com o esporte. Logo após, houve uma reflexão sobre os elementos mais significativos encontrados no vídeo, com as seguintes interpelações: *é possível lecionar matemáticas a partir de uma prática esportiva? Como isso poderia ser feito?* Tais reflexões conduziram os participantes a discorrerem sobre os processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Após amplo debate sobre essas inquietações, foi solicitado, aos grupos, que escolhessem uma única prática esportiva a ser investigada, ou seja, o tema da investigação. A proposta está em convergência com o pensamento de Bassanezi (2010, p. 46), quando afirma que

> É muito importante que os temas sejam escolhidos pelos alunos que, desta forma, se sentirão corresponsáveis pelo processo de aprendizagem, tornando

[5] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=CFCoQhh2b1M. Acesso em: 8 ago. 2021.

> sua participação mais efetiva. É claro que a escolha final dependerá muito da orientação do professor que discursará sobre a exequibilidade de cada tema, facilidade na obtenção de dados, visitas, bibliografia etc.

Em paralelo a essa solicitação, pediu-se que os participantes considerassem a percepção que possuem – oriunda de suas próprias experiências – em relação ao interesse dos estudantes da faixa etária infanto-juvenil pertencente à Educação Básica das redes públicas de ensino, público-alvo desta pesquisa. Esse olhar pretendeu unir as características pertencentes ao gosto e à realidade dos estudantes, para, assim, ampliar o significado ao ambiente educacional, uma vez que “quando envolvemos os alunos com algo que eles sentem prazer e emoção, eles podem se sentir estimulados em aprender, o que faz com que o processo de ensino-aprendizagem ocorra de forma mais fácil e prazerosa” (BEZERRA, 2016, p. 4).

A propósito, essa linha de raciocínio pode tornar o cenário de investigação (SKOVSMOSE, 2000) mais produtivo, pois a ênfase e o foco são o interesse do aprendiz, tornando-o, assim, parte envolvente e central do processo educativo. Com isso, ambos os grupos escolheram o futsal, mas com abordagens diferentes. O Grupo A, enfoque desta pesquisa, optou por investigar os conceitos matemáticos presentes nas cobranças de faltas e/ou pênaltis, especificamente, ao responder o problema inicial: *em uma cobrança de falta, ou pênalti, qual será a altura máxima que uma bola alcançaria para encobrir o goleiro e ir direto ao gol?*

O tema foi propulsor para despertar a curiosidade e o aumentar o envolvimento dos participantes na atividade realizada, pois a integração de práticas esportivas com a Matemática, em um movimento interdisciplinar, pode ser um contexto propício para descobertas, tendo a curiosidade como elemento catalisador (PEREIRA, 2012), uma vez que “nesse processo, o planejamento, a busca por melhores jogadas, a utilização de conhecimentos adquiridos anteriormente propiciam a aquisição de novas ideias, novos conhecimentos” (BEZERRA, 2016, p. 3).

Nesse aspecto, Garcia, Brito e Santos (2015, p. 2) contribuem afirmando que essa associação entre a Matemática e a prática do futsal “[...] pode levar a um aprendizado mais prazeroso”, inclusive, abrindo a possibilidade de encontrar, por meio da investigação, uma gama de variáveis e descobertas matemáticas que, a *priori*, nem estavam sendo consideradas. Evidencia-se, sob esse prisma, a relação existente entre diferentes áreas do conhecimento; e justifica-se, assim, o carácter interdisciplinar envolvido nesse contexto (PEREIRA, 2012).

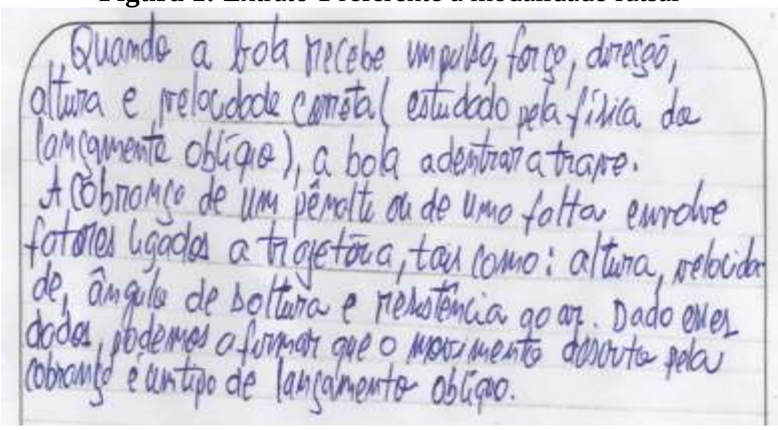
A esse respeito, os participantes enfatizaram as possibilidades que podem ser construídas a partir da prática do futsal, uma vez que existem, nesse contexto, elementos associados a diferentes áreas do saber, como, por exemplo, a Física, a Educação Física e a Matemática. Isso foi constatado a partir do depoimento de componentes do Grupo A, com base no questionamento: *quais elementos ou conceitos vocês conseguem identificar nesse contexto?*

Destaca-se o seguinte excerto da resposta a essa questão feita pelos componentes do grupo A: "São inúmeros os conteúdos físicos presentes em uma partida de futsal. Podemos notar leis físicas desde o momento em que o jogador, ao correr atrás da bola, se movimenta (estudado pela cinemática) e ao alcançá-la o chute (provocando um par de forças de ação e reação) em direção ao gol. Ao entrar em movimento, a bola, inicialmente em repouso, sai de seu estado de inércia e adquire energia cinética (velocidade) e potencial (ao percorrer distâncias verticais no ar)" (Extrato do questionário do grupo A).

Configura-se, com base no extrato acima, que os participantes elencaram alguns elementos da Física que interferem em uma partida de futsal. No entanto, essas informações ainda são insuficientes para a feitura do modelo que se apresentaria como solução para a problemática inicial.

Nesse sentido, após a busca de outras informações para melhor desenvolver o modelo, ao serem interpelados se existem outras variáveis pertinentes para a resolução da situação-problema, os envolvidos associaram que a velocidade da bola, ao ser chutada, combinada com o ângulo de seu lançamento, determina – o que é denominado na Física – o lançamento oblíquo, em que há um deslocamento do objeto tanto para cima quanto para frente. A constatação pode ser percebida no relato reproduzido no extrato 1 (Figura 1).

Figura 1: Extrato 1 referente à modalidade futsal


Quando a bola recebe impulso, força, direção, altura e velocidade correta (estudado pela física do lançamento oblíquo), a bola adentrará a trave. A cobrança de um pênalti ou de uma falta envolve fatores ligados a trajetória, tais como: altura, velocidade, ângulo de batida e resistência ao ar. Dado esses dados, podemos afirmar que o movimento descrito pela cobrança é um tipo de lançamento oblíquo.

Fonte: Dados coletados na pesquisa.

A descrição do extrato 1 é importante para ilustrar um direcionamento que visa a construção de um possível modelo para atender aos requisitos de adequação à situação-problema elaborada, o que será exposto na próxima seção.

Compreensão e Explicitação

Após os participantes elencarem os possíveis objetos matemáticos que estavam envolvidos na situação, iniciou-se o movimento de transição entre as variáveis do contexto estudado para a linguagem formal da Matemática, com foco na resolução da situação-problema (BIEMBENGUT, 2016). Assim, o objeto matemático Função Quadrática ganhou visibilidade, pois esse objeto possui características que se adéquam às possibilidades de resolução do problema inicial.

Essa fase, portanto, objetivou criar um modelo para o problema elaborado na fase anterior. Assim, foi orientado que os participantes construíssem hipóteses para a situação-problema, sendo sugerido que eles fossem à quadra poliesportiva da universidade com o intuito de reunir mais dados que pudessem contribuir para a feitura do modelo.

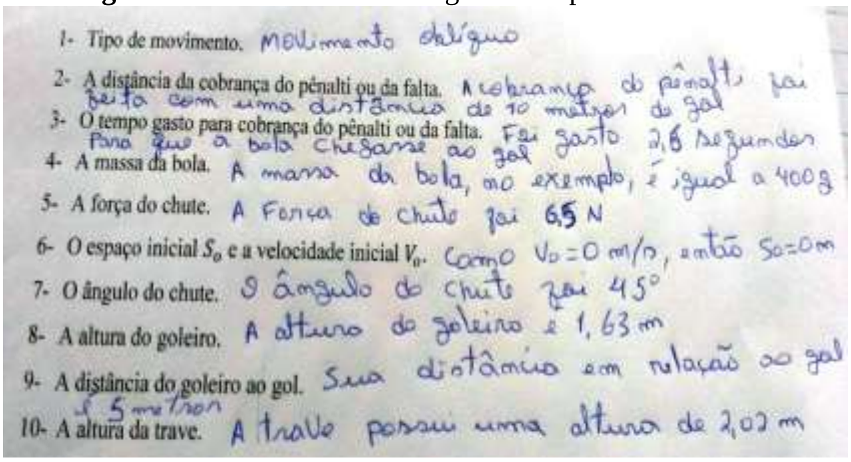
Munidos de trena, aparelhos celulares e bolas de futsal, os participantes realizaram uma dinâmica investigativa *in loco*, visando elaborar hipóteses mais próximas e adequadas à situação-problema. Para isso, entre outras medidas, mediram as dimensões da trave; simularam cobranças de falta com diferentes distâncias no sentido do gol; mediram o tempo gasto nessas cobranças; filmaram essas cobranças para melhor observar a trajetória percorrida pela bola até o gol, como consta na Figura 2.

Figura 2: Coleta de dados na quadra poliesportiva

Fonte: Dados coletados na pesquisa.

Em posse desses dados, os participantes do Grupo A retornaram à sala de aula da Pós-graduação para socializar e reunir as informações mais relevantes para a construção de um roteiro, visando a conjecturar algumas alternativas que levassem à resolução da situação-problema por meio de um modelo adequado. Para isso, foi criado um roteiro com o intuito de reunir informações que conduzam à resolução do problema, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3: Dados coletados e organizados pelos mestrandos

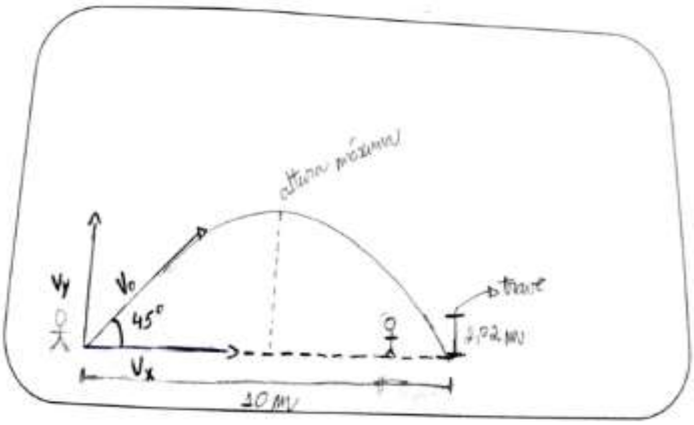


1- Tipo de movimento. Movimento oblíquo
2- A distância da cobrança do pênalti ou da falta. A cobrança do pênalti foi feita com uma distância de 10 metros do gol
3- O tempo gasto para cobrança do pênalti ou da falta. Foi gasto 2,6 segundos para que a bola chegasse ao gol
4- A massa da bola. A massa da bola, no exemplo, é igual a 400g
5- A força do chute. A Força do chute foi 6,5 N
6- O espaço inicial S_0 e a velocidade inicial V_0. Como $V_0 = 0$ m/s, então $S_0 = 0$ m
7- O ângulo do chute. O ângulo do chute foi 45°
8- A altura do goleiro. A altura do goleiro é 1,63 m
9- A distância do goleiro ao gol. Sua distância em relação ao gol é 5 metros
10- A altura da trave. A trave possui uma altura de 2,02 m

Fonte: Dados coletados na pesquisa.

Posteriormente, após a análise crítica das informações obtidas, os integrantes do grupo criaram um leque de hipóteses para preparar um modelo para a situação investigada, utilizando, para tanto, o conhecimento sobre Funções Quadráticas. Dessa forma, os participantes construíram dois diferentes registros: na forma figural e na forma algébrica. Na primeira representação, ilustrada na Figura 4, reproduz-se o esboço figural da cobrança da falta que se utiliza de conceitos físicos, como vetores e velocidade, além de conceitos matemáticos, como o plano cartesiano, a distância e altura máxima de um ponto.

Figura 4: Processo de obtenção do modelo na forma figural

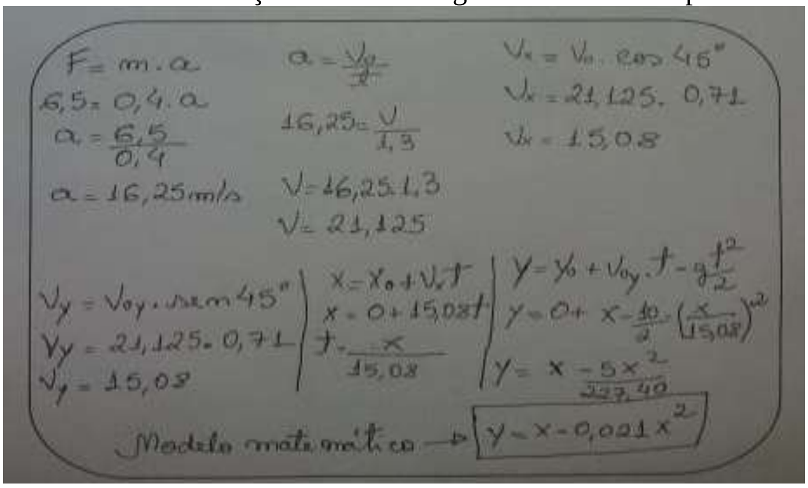


Fonte: Dados coletados na pesquisa.

Os participantes representaram, por meio desse esboço, uma cobrança de falta, destacando a velocidade da bola, que foi decomposta em duas, a saber: uma velocidade vertical (para cima) e outra na horizontal (para frente). Nota-se, com isso, que o intuito dessa ilustração é melhor compreender a situação a ser modelada.

Por outro lado, a segunda construção, na forma algébrica – que representa uma função quadrática –, pode descrever o deslocamento da bola na vertical (altura); o deslocamento na horizontal (espaço percorrido); a trajetória e a altura máxima atingida pela bola durante a cobrança, conforme se observa na Figura 5.

Figura 5: Processo de obtenção do modelo algébrico encontrado pelos mestrandos



Fonte: Dados coletados na pesquisa.

Inicialmente, os participantes utilizaram a relação $F = m.a$, em que: F representa a força (N) do jogador ao chutar a bola; m significa a massa (kg) da bola; e, por fim, a equivale à aceleração (m/s^2) desse objeto durante a trajetória do corpo do seu ponto inicial (bola parada) até o ponto final (gol). A partir dessa relação, foi possível encontrar o valor da velocidade, pois a aceleração foi calculada pela relação $a = \frac{v}{t}$, onde v é a velocidade e t é o tempo. Em seguida, os participantes calcularam as velocidades v_x e v_y do movimento da bola na horizontal (i) e na vertical (ii), posto que o percurso realizado pela bola descreveu um lançamento oblíquo. Para tal, utilizaram, respectivamente, as equações:

- (i) $x = xo + vt$ que advém do Movimento Uniforme (MU), sendo x a variável que representa a distância percorrida pela bola com o passar do tempo; x_o a posição inicial; v, a velocidade da bola, e t *o* tempo gasto na trajetória da bola durante o percurso, encontrado, assim, a equação $x = 15{,}08\, t$;
- (ii) $y = y_o + v_{oy}.t - \frac{g}{2}\, t^2$ que advém do Movimento Uniformemente Variado (MUV), em que y é a altura da bola no decorrer do tempo (t) de lançamento; y_o é a altura de lançamento; v é a velocidade vertical; e g é a aceleração da gravidade; obtendo, assim, a equação (modelo) $y = x - 0{,}021x^2$.

Como os participantes observaram na ilustração, a solução construída refere-se à questão inicial, isto é, representa um possível modelo para a situação-problema. Para a análise dessa constatação, faz-se necessário um aprofundamento sobre os elementos do contexto que pertencem a conceitos físicos e matemáticos, o que aconteceu antes do processo de validação do modelo que será retratado na seção a seguir.

Significação e Expressão

A base fundante desta fase concentra-se na validação do modelo e, para isso, como visto anteriormente, foi preciso estudar os diferentes conceitos físicos pertencentes a esse contexto, a fim de dialogar sobre o conhecimento mobilizado e aprendido pelos participantes. Para tanto, os participantes responderam o roteiro de questões descrito no Quadro 2.

Quadro 2: Roteiro de questões da fase 3 da atividade de MM, segundo Biembengut (2016)

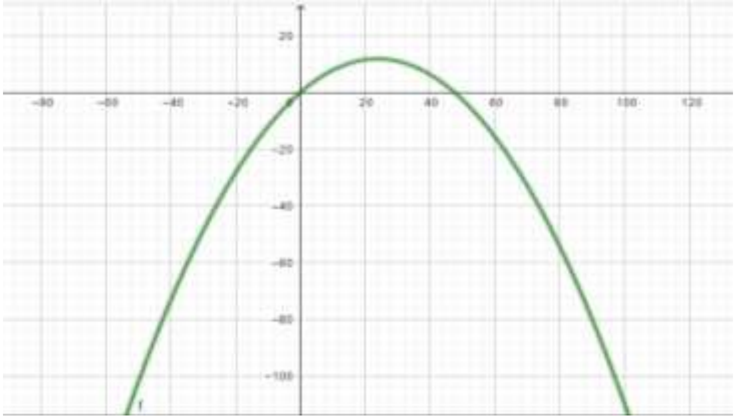
1)	Que tipo de curva a bola descreve ou se assemelha em sua trajetória do instante da cobrança até o gol?
2)	O modelo executado responde à questão inicial? Quais indícios de elementos são relevantes?
3)	Saberiam dizer que tipo de função o modelo representa? Por quê?
4)	Nesse tipo de modelo, quais são os elementos que o caracterizam?
5)	Qual é a altura máxima atingida pelo objeto/corpo?

Fonte: Silva (2018), adaptado pelos autores.

Após o debate das questões e da percepção de que o grupo estava alinhado em relação à compreensão dos diferentes conceitos interdisciplinares do contexto estudado, deu-se início ao processo de validação do modelo. Para esse fim, os participantes utilizaram o *software* Geogebra, visto que seria possível verificar se a representação da função quadrática encontrada descreve adequadamente a trajetória da bola após a cobrança até o gol. Assim, foi verificado se o modelo confeccionado estava condizente com a solução da situação-problema.

Para iniciar o processo de validação, os participantes representaram o modelo encontrado na fase anterior no *software* Geogebra, como é apresentado na Figura 6.

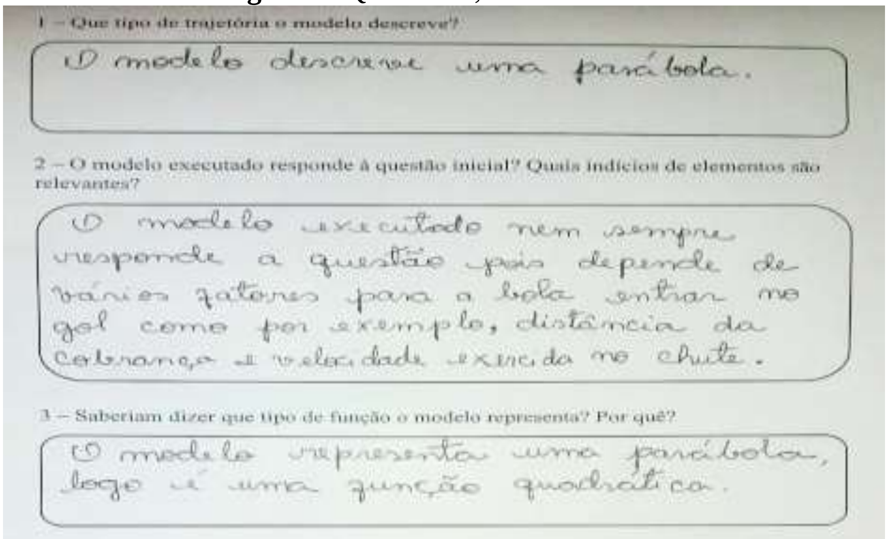
Figura 6: Modelo encontrado pelos discentes no *software* Geogebra



Fonte: Dados coletados na pesquisa.

Apesar da aparente percepção semelhante à trajetória da bola, os participantes não puderam garantir que o modelo encontrado correspondeu ao modelo "exato", por isso, foi necessário encontrar outros dados para garantir a validação. Dessa forma, ainda nessa fase, foi disponibilizado um roteiro para que os participantes pudessem responder se o modelo executado respondia à questão inicial, conforme é apresentado na Figura 7.

Figura 7: Questões 1, 2 e 3 do roteiro



1 – Que tipo de trajetória o modelo descreve?

O modelo descreve uma parábola.

2 – O modelo executado responde à questão inicial? Quais indícios de elementos são relevantes?

O modelo executado nem sempre responde a questão pois depende de vários fatores para a bola entrar no gol como por exemplo, distância da cobrança e velocidade exercida no chute.

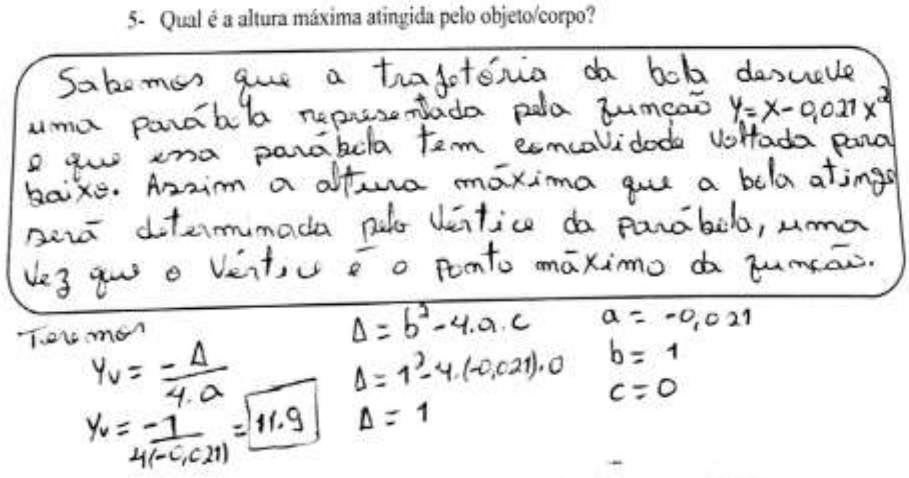
3 – Saberiam dizer que tipo de função o modelo representa? Por quê?

O modelo representa uma parábola, logo é uma função quadrática.

Fonte: Dados coletados na pesquisa.

As respostas evidenciaram algumas conclusões obtidas pelos participantes, como: a trajetória descrita pela bola durante a cobrança da falta ou pênalti era uma curva oblíqua, e, portanto, tratava-se de um movimento parabólico; as variáveis envolvidas (a velocidade excedida no momento do chute, a distância da cobrança, a força empregada) para criação do modelo variam; o modelo encontrado representa uma Função Quadrática, mas que se altera, de acordo com a mudança das variáveis postas em cada chute. Na Figura 8, estão ilustradas as constatações.

Figura 8: Questão 5 do roteiro


5- Qual é a altura máxima atingida pelo objeto/corpo?

Sabemos que a trajetória da bola descreve uma parábola representada pela função $y = x - 0{,}021x^2$ e que essa parábola tem concavidade voltada para baixo. Assim a altura máxima que a bola atinge será determinada pelo Vértice da parábola, uma vez que o Vértice é o ponto máximo da função.

Teremos

$Y_v = \frac{-\Delta}{4.a}$

$Y_v = \frac{-1}{4(-0{,}021)} = \boxed{11.9}$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = 1^2 - 4.(-0{,}021).0$

$\Delta = 1$

$a = -0{,}021$

$b = 1$

$c = 0$

Fonte: Dados coletados na pesquisa.

Após as discussões supracitadas, há uma aceitabilidade do modelo encontrado como resposta adequada à questão investigada. Ressalta-se que os participantes obtiveram êxito na elaboração do modelo, pois o desenvolveram, tendo como base as habilidades já adquiridas em momentos anteriores dos conteúdos que foram exigidos na construção do modelo, o que, sobretudo, ajudou a dar fluidez aos processos que compõem as fases da atividade de MM.

Considerações finais

Neste artigo, objetivou-se apresentar as etapas de uma atividade de Matemática à luz da MM, no âmbito de um curso de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. A proposta da atividade foi articular o ensino de Matemática com uma prática esportiva, escolhida a partir da percepção dos participantes em relação ao interesse dos estudantes da rede pública de ensino da Educação Básica. O intuito, com isso, foi estabelecer – no processo de ensino e aprendizagem de Matemática – um cenário educativo prazeroso, pautado nos princípios de investigação, inovação e no viés interdisciplinar, por meio da MM.

O desenvolvimento da experiência possibilitou alinhar uma prática docente requerida nos documentos oficiais da Educação brasileira, uma vez que o método de ensino utilizado reúne em suas múltiplas dimensões teórico e práticas, o desenvolvimento de habilidades e competências que podem ser atreladas a problemas locais e globais, principalmente aquelas que envolvam elementos de interesse dos estudantes.

Como plano de fundo, a partir das possibilidades que a MM estabelece, pretendeu-se definir estratégias metodológicas que favorecessem: a investigação de soluções para um problema, ao invés do cumprimento de etapas "prontas" para o desenvolvimento de um exercício; a formulação de hipóteses ao invés de cumprimento de tarefas; o desenvolvimento de um pensamento autêntico, por meio de diferentes interpretações de um contexto, ao invés da mecanização de processos definidos; o fortalecimento do estudante ativo e participativo, na apreensão do conhecimento, ao invés de expectador do processo; a valorização da construção coletiva de conhecimento, ao invés da individualizada; dentre outros aspectos.

Pretendeu-se, com esta pesquisa, também, proporcionar uma ressignificação da percepção dos envolvidos sobre as diferentes naturezas que envolvem o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Posto que, fundamentar a prática docente, tendo como suporte a MM, representa para o professor: refletir a respeito das relações interpessoais com seus estudantes; viabilizar espaços de participação ativa e autônoma dos estudantes; promover situações que favoreçam o exercício da cidadania em torno de sua localidade; construir um diálogo no processo de construção do conhecimento com todos os envolvidos; desenvolver a autonomia do estudante. Esses aspectos puderam ser constatados durante todo o processo da pesquisa.

Referências

BAHIA. Secretaria da Educação. Superintendência de Políticas para Educação Básica. União Nacional dos Dirigentes Municipais da Bahia. **Documento curricular referencial da Bahia para educação infantil e ensino fundamental**. 475p., 2019. Disponível em: http://escolas.educacao.ba.gov.br/sites/default/files/private/midiateca/documentos/2020/documentocurricularbahia.pdf. Acesso em: 8 jul. 2022.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? Por quê? Como? *In:* **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_veritati_jonei.pdf. Acesso em: 8 set. 2020.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2010.

BEZERRA, A. R. A prática esportiva voltada para o ensino da matemática. **Cadernos PDE**, 2016. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_ufpr_almirrogeriobezerra.pdf. Acesso em: 12 jul. 2021.

BIAGGI, G. V. Uma nova forma de ensinar matemática para futuros professores administradores: uma experiência que vem dando certo. **Revista de Ciência da Educação**. Ano 2, n. 20, 2000.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed., 3. reimpr. São Paulo: Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, M. S. Modelagem Matemática & Resolução de Problemas, Projetos e Etnomatemática: Pontos Confluentes. Alexandria – **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia.** Ano 7, n.2, 2014.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto, 2010.

BRASIL. **Base nacional comum curricular**. 3. versão. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 8 set. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica. -** Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

BURAK, D. Modelagem matemática: experiências vividas. **Analecta**, v. 6, n. 2, p. 33-48, 2005. Disponível em: https://revistas.unicentro.br/index.php/analecta/article/view/2671/2141. Acesso em: 8 set. 2020.

CALDEIRA, A. D. Modelagem matemática: um outro olhar. **Alexandria** – **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 33-54, 2009. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37940. Acesso em: 14 mar. 2021.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, v. 3, n. 1, p. 1-38, 1995. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877/15035. Acesso em: 8 set. 2020.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GARCIA, A. de F.; BRITO, F. W. M.; SANTOS, H. B. dos. A prática do futsal como instrumento de ensino-aprendizagem na matemática. **Fiep Bulletin**, v. 85, special edition, article I, 2015. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/d3ac/7093ecabfb247bc769853ccc88d3b6c29ebc.pdf. Acesso em: 3 jul. 2021.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1991.

PEREIRA, C. A. L. Educação física e matemática: uma proposta de interdisciplinaridade. **REI – Revista de Educação do Ideau**, v. 7, n. 15, –jan./jun. 2012. Disponível em: https://www.bage.ideau.com.br/wp-content/files_mf/2a2c36d25e854feea817f99f6576287453_1.pdf. Acesso em: 5 jul. 2021.

PIMENTA, S. G.; LIMA, M. S. L. Estágio e docência: diferentes concepções. **Revista Poíesis Pedagógica**, RJ, v. 3, n. 3, p. 5-24, 2006. Disponível em: https://www.revistas.ufg.br/poiesis/article/view/10542. Acesso em: 8 set. 2020.

PINTO, N. B. Marcas históricas da matemática moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 5, n.16, p.25-38, 2005. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/156658/dialogo-600.pdf?sequence=1. Acesso em: 13 jun. 2021.

ROSA, M.; OREY, D. C. **Etnomodelagem**: a arte de traduzir práticas matemáticas locais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

SILVA, S. C. **O estudo da função quadrática na perspectiva da modelagem matemática no *software* Modellus.** 2018. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. *In*: **Bolema**, n. 14, 2000.

SKOVSMOSE, Ole. O que poderia significar a educação matemática crítica para diferentes grupos de estudantes? *In*: **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 6, n.12, p.18-37, jul./dez. 2017.

Recebido em: 28 de agosto de 2021
Aprovado em: 21 de outubro de 2021