

A APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO QUADRÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA COM A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.23.192-212>

Fernando Guimarães da Silva¹
Rogério de Aguiar²
Ivanete Zuchi Siple³

Resumo: Este artigo é um recorte de uma dissertação de mestrado de Silva (2018), no qual são relatadas as contribuições de uma atividade sobre função quadrática, por meio da modelagem matemática, proposta a uma turma do Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Nesta atividade foi proposto um modelo matemático para descrever o lançamento horizontal de um determinado objeto proveniente de uma aeronave em pleno voo, visando contribuir com uma aprendizagem significativa para os estudantes. Para realização da atividade, utilizaram-se as fases da modelagem matemática de acordo com Almeida (2013), bem como aplicamos de mapas conceituais para verificar indícios de aprendizagem significativa de acordo com Moreira (2010). A coleta de dados foi efetuada por meio de questões sobre a função quadrática e de mapas conceituais produzidos pelos alunos. A partir das análises das produções dos alunos, puderam ser observados indícios de aprendizagem significativa entre esses estudantes do Ensino Médio do Centro de Educação de Jovens e Adultos (CEJA).

Palavras-chave: Função Quadrática. Modelagem Matemática. Aprendizagem Significativa. Educação de Jovens e Adultos.

LEARNING OF QUADRATIC FUNCTIONS: AN EXPERIENCE WITH MATHEMATICAL MODELING AN ADULT EDUCATION PROGRAM

Abstract: This paper describes the partial results of a research project (Silva, 2018), at the Master's level, in which the contributions of an activity about quadratic functions are reported, through mathematical modeling, proposed to an adult education class. In this activity a mathematical model is proposed to describe the horizontal launching of an object from an aircraft in flight to contribute to meaningful learning of the students. To perform the activity, mathematical modeling phases were used according to Almeida (2013) as well as the application of concept maps to verify meaningful learning signs, according to Moreira (2010). The data collection was performed through questions about quadratic functions and concept maps produced by the students. Through the analysis of student productions, evidences of meaningful learning could be observed among these high school students from the adult education program.

Keywords: Quadratic Function. Mathematical Modeling. Meaningful Learning. Adult Education.

1. Mestre em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias pela Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Joinville-SC, Brasil. Professor da Educação Básica. E-mail: fgsbr06@yahoo.com.br - Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1976-855X>.

2. Doutor em Matemática Aplicada. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias do Departamento de Matemática – Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Joinville-SC, Brasil. E-mail: rogerio.aguiar@udesc.br - Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-9372-3528>.

3. Doutora em Engenharia de Produção. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias do Departamento de Matemática – Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Joinville-SC, Brasil. E-mail: ivanete.siple@udesc.br - Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-8640-1336>.

Introdução

Um dos desafios para o ensino de funções é como proporcionar aos alunos a perspectiva de que sua abordagem não seja apenas um conjunto de fórmulas e definições, mas, sobretudo, um instrumento matemático importante para a compreensão de problemas cotidianos oriundos das diversas ciências, constituindo-se como uma maneira de previsão, explicação e controle, pois

As funções são instrumentos por excelência para estudar problemas de variação. Uma dada grandeza pode variar no tempo, variar no espaço, variar segundo outras grandezas, e mesmo variar simultaneamente em diversas dimensões. Essa variação pode ser mais rápida ou mais lenta, pode desaparecer de todo, pode, em suma, obedecer às mais diversas leis ou constrangimentos (PONTE, 1990, p. 5).

Segundo Ponte (1990), a aplicação da Matemática às diversas áreas pode ser feita através da noção de modelo:

Um modelo matemático constitui uma representação duma dada situação, através de objectos, relações e estruturas com que se procura descrever os elementos considerados fundamentais dessa situação, ao mesmo tempo que se ignoram deliberadamente os elementos tidos como secundários (PONTE, 1990, p. 5).

Segundo Brito e Almeida (2005), tabelas, relações funcionais, gráficos, figuras geométricas são alguns exemplos de modelos matemáticos que, segundo os autores, “constituem formas de representação da realidade” (p.65).

Neste contexto, a proposta deste artigo tem como foco o processo de aprendizagem de função quadrática na Educação de Jovens e Adultos (EJA). O EJA é uma modalidade de ensino criada pelo Governo Federal destinada ao ensino de jovens e adultos, que por algum motivo não tiveram a oportunidade de cursar o ensino regular. Essa modalidade de ensino faculta aos alunos retornarem aos estudos e concluí-los em um tempo menor que o do ensino regular, permitindo que se qualifiquem e consigam melhores oportunidades de trabalho.

Em geral, as turmas do Ensino Médio são heterogêneas, tanto no que diz respeito à idade quanto ao nível de conhecimento dos alunos, revelando em seus históricos a falta de oportunidades, a exclusão e pouco acesso a bens materiais e culturais. A maioria desses alunos foram obrigados, por diversos motivos, a entrarem cedo no mercado de trabalho, sendo que os postos de trabalho por eles alcançados em geral não são bem remunerados. Dentre os diversos desafios que os alunos EJA enfrentam encontra-se a fragilidade nos conhecimentos escolares,

particularmente relacionados à matemática e à leitura.

Embora tardia, a escolarização deve possibilitar, aos alunos do EJA, a superação de tal desafio, oportunizando a construção de estratégias para a resolução de problemas, a reflexão e justificativa de resultado, o trabalho colaborativo e a autonomia para enfrentar as adversidades, a fim de contribuir para que o aluno se torne um agente da transformação de seu ambiente.

Nessa perspectiva, essa proposta de atividades contextualizadas em uma prática em sala de aula e voltadas aos alunos do EJA, do Centro de Educação de Jovens e Adultos (CEJA) de Joinville, teve como intuito viabilizar a possível utilização de modelos matemáticos para que os estudantes pudessem estabelecer relações, que tivessem significado, entre os conceitos matemáticos e os conceitos de outras áreas do conhecimento, no caso em questão àqueles inerentes aos fundamentos da Física.

Nesta pesquisa, utilizou-se a modelagem matemática de acordo com as concepções de Almeida (2013). A hipótese a ser considerada consiste em saber se a relação entre função quadrática e o lançamento horizontal de objeto, proveniente de aeronave em pleno voo, proporcionará a aprendizagem significativa dos estudantes do primeiro ano do Ensino Médio da EJA.

Fundamentação teórica

A aprendizagem significativa é uma teoria proposta por David Paul Ausubel (1918-2008) que “ocorre quando as ideias novas estão ligadas a informações ou conceitos já existentes na estrutura cognitiva do indivíduo” (SOARES, 2009, p. 53). O conhecimento prévio do aluno é fundamental na aprendizagem significativa e, para que essa ocorra, é necessário ampliar e reconfigurar ideias já existentes na estrutura mental possibilitando o acesso e a conexão com novos conteúdos. Para isso, Ausubel nos traz a noção de subsunçores:

Uma das principais argumentações de Ausubel em sua teoria é a de que para ocorrer nova aprendizagem, é necessário partir daquilo que o aluno já sabe. Aquilo que o aluno já sabe ou deveria saber em cada nova situação de aprendizagem é caracterizado pelo autor como “subsunçores” e a literatura, em geral, refere-se a eles como “conhecimentos prévios” (ALMEIDA, 2013, p. 36).

No intuito de verificar o conhecimento prévio dos estudantes, no que se refere à função quadrática, foi proposta uma atividade na qual os estudantes trabalharam em sala de aula, individualmente. Para a obtenção de evidências de aprendizagem significativa fez-se uso

de mapas conceituais. Segundo Moreira (2012, p.41), “de um modo geral, mapas conceituais, ou mapas de conceitos, são apenas diagramas indicando relações entre conceitos ou entre palavras que usamos para representar conceitos”.

Os mapas conceituais são instrumentos que podem levar a profundas modificações na maneira de ensinar, de avaliar e de aprender. Marco Antônio Moreira indica que os mapas conceituais permitem uma visualização panorâmica dos conceitos:

Como instrumento de avaliação da aprendizagem, mapas conceituais podem ser usados para se obter uma visualização da organização conceitual que o aprendiz atribui a um dado conhecimento. Trata-se basicamente de uma técnica não tradicional de avaliação que busca informações sobre os significados e relações significativas entre conceitos-chave da matéria de ensino segundo o ponto de vista do aluno. É mais apropriada para uma avaliação qualitativa, formativa, da aprendizagem (MOREIRA, 2012, p. 45).

A disponibilização de cada conceito em um mapa conceitual é importante porque identifica o nível de compreensão dos estudantes. Quanto maior a intensidade de relação entre conceitos, maior a compreensão que o estudante demonstra no processo de aprendizagem. Essa compreensão de um determinado conteúdo matemático consiste no estudante aprender com significado, estabelecendo relações entre os conhecimentos adquiridos.

Na análise dos mapas conceituais, deve-se observar a existência de rigor conceitual, a hierarquia nas disposições dos conceitos e a inclusividade. No topo do mapa conceitual deve vir o conceito inclusor que é o conceito de maior generalização, ou seja, é o conceito mais abrangente ou, ainda, menos específico na relação com os outros conceitos existentes.

A hierarquia está relacionada com a disposição dos conceitos: quanto mais próximos do conceito inclusor no topo, mais gerais e inclusivos, e quanto mais próximos da base, menos inclusivos. A inclusividade é retratada pela existência de conceitos essenciais e de conceitos complementares, ligados ao conceito inclusor, e também deve ser observada na análise de um mapa conceitual. Além disso, o mapa conceitual deve possuir clareza e simplicidade com uma boa organização geral do mapa, sem excessos de conceitos ou de linhas conectoras.

É importante salientar que o esquecimento é uma continuidade do processo de aprendizagem. Se o esquecimento for rápido e praticamente total, como se o indivíduo nunca tivesse aprendido determinado conteúdo, é provável que a aprendizagem tenha sido mecânica. Por outro lado, se o esquecimento for residual, a aprendizagem é significativa, sendo que o conhecimento pode estar presente na estrutura cognitiva do aprendiz e pode ser reaprendido com relativa facilidade (MOREIRA, 2012).

As nossas práticas de ensino, quando bem realizadas, colaboram na promoção da aprendizagem significativa dos estudantes. A utilização da modelagem matemática é uma alternativa nos processos de ensino e aprendizagem em sala de aula, onde se tenta estabelecer a relação entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. De acordo com Almeida e Dias (2004, p. 2), “No contexto da Matemática, a aprendizagem nesta perspectiva está vinculada às ações em que o aluno tem oportunidade de experimentar, modelar, analisar situações e desenvolver um espírito crítico a respeito das soluções encontradas”.

A modelagem matemática diz respeito a uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema identificada em outras áreas do conhecimento ou na vida cotidiana. Assim, uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (o problema a ser investigado) e uma situação final (o modelo matemático), que serve para descrever, representar e, em alguns casos, prever aspectos associados ao problema (ALMEIDA e SILVA, 2016).

A aplicação da Matemática, no cotidiano dos estudantes, é uma forma bastante promissora para se atingir a aprendizagem, uma vez que se procura justificar a esses estudantes a sua importante utilização. A Matemática está presente, constantemente, em nosso dia a dia, logo a modelagem matemática possibilita, no ambiente escolar, relações com outras áreas do conhecimento, como por exemplo, com os conceitos relacionados aos fundamentos da Física – explorados neste trabalho –, propiciando aos estudantes motivação e reflexão sobre a Matemática.

Almeida e Dias (2004) entendem a modelagem matemática como uma possibilidade de aprender Matemática por meio de situações cotidianas, sendo assim:

A modelagem matemática é uma alternativa para o ensino e aprendizagem da Matemática escolar, que pode proporcionar aos alunos oportunidades de identificar e estudar situações-problema de sua realidade, despertando maior interesse e desenvolvendo um conhecimento mais crítico e reflexivo em relação aos conteúdos da Matemática (ALMEIDA; DIAS, 2004, p.7).

Este trabalho se refere a um recorte de uma dissertação de mestrado de Silva (2018), em que foi utilizada a modelagem matemática, no processo de aprendizagem da função quadrática, em uma situação-problema relacionada ao lançamento horizontal de um objeto, proveniente de uma aeronave em voo.

Barbosa (2001) propõe 3 (três) possíveis casos para aplicar, metodologicamente, a modelagem matemática em sala de aula. Nessa pesquisa, optou-se pelo Caso 1, em que o professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à

sua resolução e o problema formulado, cabendo aos estudantes o processo de resolução.

Vale lembrar, no entanto, que a aplicação da modelagem matemática pode ser realizada a partir de vertentes diversificadas, sendo que neste trabalho a experiência foi embasada de acordo com as concepções de Almeida (2013), cuja primeira fase da modelagem matemática consiste na “Inteiração”, havendo o primeiro contato dos estudantes com a situação-problema. Assim, os estudantes tratam de termos relacionados a elementos não-matemáticos, na linguagem usual, de modo a entender o que ocorre no lançamento horizontal mencionado.

A “Matematização”, que é a fase seguinte, é o momento no qual os estudantes começam a lidar com os elementos matemáticos existentes na situação-problema, em que as representações algébrica e gráfica da função quadrática entram em cena. O conhecimento dos conceitos matemáticos inerentes a este tipo de função é importante, para que os estudantes possam efetuar a transição para fase posterior à matematização, chamada de “Resolução”.

Na fase de “Resolução”, os estudantes têm a oportunidade de utilizar os modelos matemáticos, visando à solução da situação-problema. Nesta fase, os estudantes podem estabelecer as relações entre os conceitos matemáticos e físicos, mais especificamente entre os elementos da função quadrática e o estudo do movimento relacionado ao lançamento horizontal.

Na utilização desses modelos matemáticos, tem-se a quarta fase denominada “Interpretação de resultados e validação”, na qual a atividade contou com o suporte do *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra, haja vista as potencialidades desse *software* no que diz respeito tanto nas representações da função quanto na simulação do modelo envolvido na situação-problema.

Neste contexto, é necessário ter o conhecimento sobre os elementos físicos que envolvem o estudo do lançamento horizontal. No momento que um objeto qualquer é lançado de uma determinada altura, horizontalmente, ocorrem dois movimentos simultâneos:

O lançamento oblíquo é um movimento bidimensional distinguido por uma posição de lançamento (x_0, y_0) , um ângulo de arremesso Θ com a horizontal (direção x) é o Movimento Retilíneo e Uniforme (MRU) e o movimento no comando vertical (direção y) é o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) devido à força gravitacional, cujo módulo do campo gravitacional ou aceleração da gravidade é igual a g , ou seja, $9,8 \text{ m/s}^2$ (FERREIRA, 2014, p.14).

Desta forma, pode-se considerar que neste lançamento passa a existir o primeiro tipo de movimento, o horizontal, em que a velocidade do objeto lançado é constante, ou seja, nos

intervalos de tempo iguais, o objeto percorre distâncias iguais, devido ao seu movimento retilíneo e uniforme. De acordo com Alvarenga e Máximo (2006), a velocidade é constante e a distância percorrida por um objeto é diretamente proporcional ao tempo decorrido deste percurso.

O segundo tipo de movimento em estudo, o vertical, é caracterizado por ter variação da sua velocidade no transcorrer do tempo de queda, sendo classificado como movimento retilíneo uniformemente variado. Se representarmos por v_1 o valor de sua velocidade no instante t_1 e o movimento do corpo for variado, no instante t_2 a sua velocidade terá o valor de v_2 , diferente de v_1 , sofrendo uma variação (ALVARENGA; MÁXIMO, 2006).

Neste trabalho, o foco de estudo é o movimento que corresponde a sua componente vertical e o seu modelo matemático, segundo Lima (2017), é representado pela função quadrática:

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c \text{ (Equação 1)}$$

a qual é caracterizada pelo MRUV, considerando-se que $f(t)$ é a posição do objeto que fora lançado num instante t , o coeficiente a corresponde à aceleração da gravidade que atua na queda deste objeto, b representa a sua velocidade inicial e c , a sua posição inicial na ocasião do lançamento. Ressalta-se que aqui estamos analisando somente a variação da altura do objeto em relação ao seu intervalo de tempo durante a queda até o solo.

No contexto da Equação 1, ocorrem algumas variações na função estabelecida, de acordo com o referencial adotado. Se considerarmos que o objeto é lançado, tendo como referencial alguém a bordo da aeronave, que é capaz de observar o movimento desse objeto em queda, afastando-se da aeronave para baixo, temos os seguintes dados:

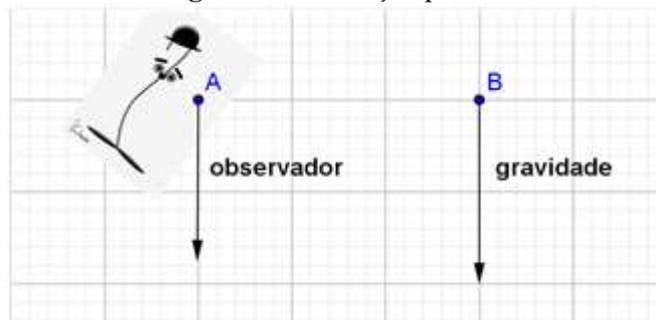
- ✓ No início da contagem dos tempos, para $t = 0s$ (zero segundo), a posição inicial do objeto em relação ao tempo é $c = 0m$ (zero metro);
- ✓ A velocidade inicial do objeto, ao ser lançado, tem valor $b = 0m/s$ (zero metro por segundo), considerado a partir do repouso em relação à sua componente vertical;
- ✓ A aceleração da gravidade, ao considerarmos $a = 10m/s^2$ (dez metros por segundo ao quadrado), aproximadamente, atua sobre o corpo em queda, tendo sentido único de cima para baixo. Em virtude dessas considerações, a função que descreve o movimento é $f(t) = 5t^2$ e se $t = 0s$, então $f(0) = 0m$.

Quando o objeto começa, efetivamente, a efetuar o movimento para baixo, tem-se:

- ✓ No tempo de $t = 1s$ (um segundo) a posição do objeto é alterada. Por outro lado, a sua posição inicial $c = 0m$ (zero metro) e a sua velocidade inicial $b = 0m/s$ (zero metro por segundo) são conhecidas, continuando as mesmas para efeito de cálculos;

- ✓ Um observador (Figura 1) que representa o referencial de estudo do movimento do objeto, estando localizado a bordo da aeronave em voo e olhando de cima para baixo, a partir do ponto A. Existe, ainda, um vetor imaginário que parte do ponto B, de cima para baixo, sendo relativo ao sentido da aceleração da gravidade que atua no corpo em queda:

Figura 1: Aceleração positiva



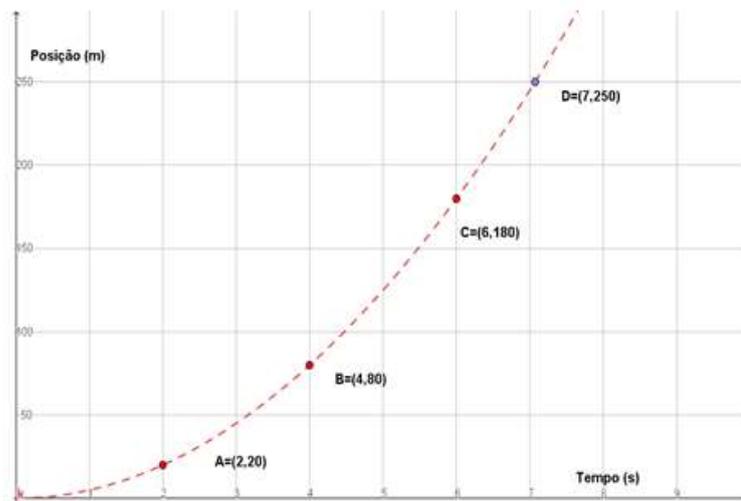
Fonte: Elaborado pelos autores.

O valor da aceleração da gravidade é uma parte importante na interpretação do modelo matemático, haja vista envolver o parâmetro que, fisicamente, representa a taxa de variação da velocidade do objeto (componente vertical) em relação ao seu tempo de queda, além de definir a concavidade da parábola, que é a representação gráfica de $f(t)$ – uma função quadrática.

É possível observar que o vetor aceleração tem o mesmo sentido do referencial adotado, por meio do qual se pode deduzir que a aceleração da gravidade é positiva ($a > 0$) na situação em pauta. Assim, as representações algébricas para os tempos de 2 (dois), 4 (quatro) e 6 (seis) segundos, tendo como referência a função $f(t)=5t^2$, são as seguintes: para $t=2$ temos $f(2)=20$; para $t=4$, $f(4)=80$; e para $t=6$ temos $f(6)=180$. Na análise algébrica do movimento, o objeto foi lançado da origem $0m$ (zero metro) e se afastou $20m$ (vinte metros) do observador, localizado a bordo da aeronave, no sentido para baixo, quando se passaram $2s$ (dois segundos); afastou-se $80m$ (oitenta metros) quando se passaram $4s$ (quatro segundos); e se afastou $180m$ (cento e oitenta metros) quando se passaram $6s$ (seis segundos) de sua queda.

Conforme ilustra a Figura 2, pode-se observar que a representação gráfica da função é uma parábola de concavidade voltada para cima, devido ao coeficiente da variável de maior grau (Equação 1) ser positivo e, por conseguinte, a aceleração da gravidade a ser positiva. Tem-se os resultados gráficos para os tempos de 2 (dois), 4 (quatro) e 6 (seis) segundos, com os afastamentos do objeto nas distâncias de 20 (vinte), 80 (oitenta) e 180 (cento e oitenta) metros, relativas aos pontos A, B e C, respectivamente.

Figura 2: Modelo matemático para aceleração positiva



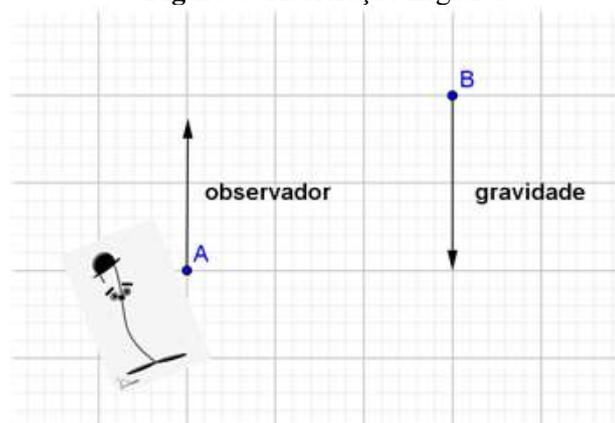
Fonte: Elaborado pelos autores.

Esta característica do movimento do objeto, em queda, ocorre até atingir o solo. Por exemplo, se a aeronave estiver a 250m (duzentos e cinquenta metros) do solo, então o tempo total de queda seria aproximadamente de 7s (ponto D), conforme o modelo matemático ilustrado na Figura 2.

Por outro lado, ao se considerar que o objeto é lançado, tendo como referencial um observador no solo, tem-se:

- ✓ No início da contagem dos tempos, para $t = 0s$ (zero segundo), pode-se considerar que a posição inicial do objeto em relação ao tempo é de $c = 250m$ (duzentos e cinquenta metros) de altura;
- ✓ A velocidade inicial do objeto, ao ser solto no ar, tem valor de $b = 0m/s$ (zero metro por segundo), em relação à sua componente vertical;
- ✓ O observador (Figura 3) representa o referencial de estudo, estando localizado no solo, observando a aeronave de baixo para cima, a partir do ponto A:

Figura 3: Aceleração negativa



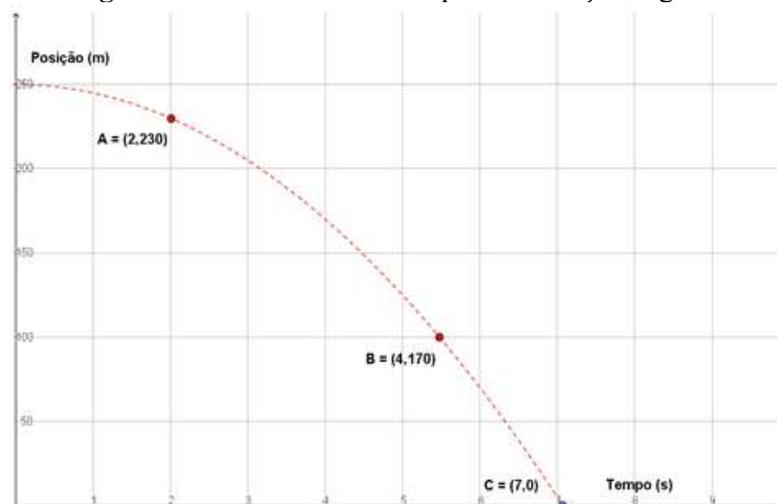
Fonte: Elaborado pelos autores.

Existe, ainda, o vetor imaginário que parte do ponto B, de cima para baixo, sendo relativo ao sentido da aceleração da gravidade atuando no corpo em queda. A aceleração da gravidade tem o valor aproximado, em módulo, de $a = 10m/s^2$ (dez metros por segundo ao quadrado), sendo ilustrada pelo vetor que parte do ponto B, de cima para baixo. Em razão de o vetor aceleração ser oposto ao referencial adotado, pode-se concluir que a aceleração da gravidade é negativa ($a < 0$) para a nova situação.

No início das contagens dos tempos, para $t = 0s$ (zero segundo), a posição inicial do objeto em queda é $c = 250m$ (duzentos e cinquenta metros) e a aceleração da gravidade atuante nesse objeto, nesta situação específica, é de $a = -10m/s^2$ (dez metros por segundo ao quadrado negativos). Em virtude dessas considerações, a função que descreve o movimento é $f(t) = -5t^2 + 250$ e se $t=0s$, então $f(0) = 250m$.

Da mesma forma, quando passados os tempos de 2 (dois), 4 (quatro) e 7 (sete) segundos, as posições do objeto, em metros, são as seguintes: para $t=2$ temos $f(2) = 230$; para $t=4$, $f(4) = 170$; e para $t=7$ temos $f(7) = 0$. Na análise algébrica do movimento, o objeto foi lançado de uma altura de $250m$ (duzentos e cinquenta metros), havendo um observador no solo e no instante $0s$ (zero segundo). Este objeto, ao se movimentar por $2s$ (dois segundos), aproximou-se do solo e ficando na altura de $230m$ (duzentos e trinta metros). Após terem passados $4s$ (quatro segundos), o objeto cai para altura de $170m$ (cento e setenta metros), sendo que após $7s$ (sete segundos) o objeto atinge o solo. Diante da variação de posição $f(t)$, o modelo matemático que resolve a situação-problema está ilustrado na Figura 4:

Figura 4: Modelo matemático para aceleração negativa



Fonte: Elaborado pelos autores.

Observa-se que a parábola tem a concavidade voltada para baixo, devido ao

coeficiente da variável de maior grau ser negativo, como já discutido anteriormente, e por conseguinte a aceleração da gravidade ser negativa.

Metodologia

Esta pesquisa é do tipo qualitativa, haja vista que “considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números” (KAUARK et al, 2010, p. 26). Trata-se, também, de uma pesquisa exploratória, além de ser um estudo de caso, com um público específico pertencente à Educação de Jovens e Adultos (EJA).

O local da experimentação foi o Centro de Educação de Jovens e Adultos (CEJA) e onde, também, foram realizados 2 (dois) encontros para as tarefas abaixo especificadas (Tabela 1), nos dias 27 fev. 2018 e 06 mar. 2018, respectivamente. No Encontro 1, participaram das tarefas oito alunos e no Encontro 2, seis alunos, em cada encontro ocorreram cinco aulas de quarenta minutos. Vale salientar que os envolvidos no processo assinaram os termos de consentimento livre e esclarecido (TCLE), previstos pelo Conselho de Ética.

Tabela 1: Tarefas sobre o lançamento horizontal

Encontro	Tarefa n.º	Descrição da tarefa	Quantidade de alunos
1	1.1	Verificar o conhecimento de função quadrática	8
	1.2	Elaborar os mapas conceituais relativos à função quadrática	
	1.3	Abordar a situação-problema do lançamento horizontal	
	1.4	Elaborar os mapas conceituais relativos ao lançamento horizontal	
	1.5	Efetuar a matematização da situação-problema	
2	2.1	Continuar a matematização da situação-problema	6
	2.2	Elaborar os mapas conceituais na tentativa de estabelecer a relação entre a função quadrática e o lançamento horizontal	
	2.3	Utilizar os modelos matemáticos, relacionados ao lançamento horizontal	
	2.4	Preencher os questionários de opinião	

Fonte: Elaborado pelos autores.

Os procedimentos realizados em sala de aula tiveram como foco a aprendizagem de função quadrática, com significado, utilizando-se a modelagem matemática aos estudantes do primeiro ano do Ensino Médio (EJA). A forma escolhida para conduzir as atividades deu-se de acordo com o Caso 1, proposto por Barbosa (2001), que consiste em o professor apresentar uma situação-problema com todas as informações necessárias à sua resolução, cabendo aos estudantes o processo de resolução, conforme já mencionado no referencial teórico. Neste trabalho, os estudantes receberam as informações do pesquisador, relacionadas ao fenômeno do lançamento horizontal de objeto proveniente de aeronave em voo.

As tarefas relativas à aplicação da modelagem matemática foram gravadas, para que as discussões entre os estudantes pudessem ser mais bem observadas e analisadas, visando detectar os pormenores do desenvolvimento do conteúdo matemático. O professor da disciplina de Matemática esteve presente durante toda a aplicação da atividade, efetuada por este pesquisador, limitando-se a observar as ações realizadas e esclarecendo alguma dúvida que porventura ocorresse entre os estudantes da EJA.

Coleta de dados

A coleta de dados ocorreu na verificação do conhecimento prévio dos estudantes, por meio de 4 (quatro) questões básicas sobre o conceito de função quadrática; a apresentação de uma situação-problema a ser resolvida – por meio da modelagem matemática; a aplicação de mapas conceituais – para a verificação de indícios de aprendizagem significativa; e a aplicação de um questionário de satisfação – para obter a percepção dos estudantes, em relação ao desenvolvimento das atividades em sala de aula.

A atividade começou com a verificação do conhecimento prévio individual dos oito estudantes presentes no Encontro 1, o qual se referia à função quadrática. O passo seguinte foi dividir esses estudantes em quatro duplas, para que tivessem o primeiro contato com a situação-problema, na fase de Inteiração da modelagem matemática, tendo como enunciado:

“Uma aeronave do tipo AMX (Figura 5) se aproxima de uma área, a uma velocidade de 800 km/h (oitocentos quilômetros por hora) e efetua o lançamento de um artefato que não tem motor próprio, estando a uma altura de 180m (cento e oitenta metros) e visa atingir um determinado alvo”.

Figura 5: Aeronave AMX



Fonte: Poder Aéreo⁴

No lançamento horizontal, o objeto adquire movimento ao ser lançado com ângulo nulo. Na realidade, ocorrem dois movimentos simultâneos pelo artefato: da queda livre (na vertical) e do movimento horizontal devido ao vetor velocidade do avião.

O movimento de queda livre é classificado como movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), sendo que o objeto, ao cair de uma determinada altura, adquire velocidade com o passar do tempo e sofre a ação constante da gravidade. Concomitante ao movimento vertical, ocorre o movimento horizontal pelo objeto, classificado como movimento retilíneo uniforme (MRU).

Desta forma, os estudantes tiveram a oportunidade de discutir entre si, bem como foram realizadas as mediações necessárias entre as duplas de estudantes e o mediador. Houve discussões relativas a três questões básicas, dentre elas: “No lançamento de determinada carga de um avião em voo, o piloto pretende atingir um alvo que se encontra no solo. Para que ele obtenha sucesso, deve lançar esta carga antes ou depois de sobrevoar um alvo? Por quê?”

No ambiente lápis e papel, houve a possibilidade de se estabelecer a relação entre as áreas do conhecimento. Os oito estudantes presentes no Encontro 1 foram divididos em quatro duplas (A, B, C e D), já no Encontro 2, foi necessário dividir os seis estudantes presentes em três duplas (E, F e G). Em ambos os encontros, esses estudantes tiveram a oportunidade de trocar informações entre si e seguir as orientações do mediador, visando encontrar soluções para 7 (sete) questões disponibilizadas na fase de Matematização, dentre elas:

“Existem semelhanças entre as três funções $f(x)=ax^2+bx+c$; $g(x)=x^2+2x+5$; e $h(t)=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+h_0$? Se existem, quais são? Se não existem, por quê?”

⁴ Ressurreição do AMX?! Poder Aéreo, 22 de agosto de 2008, Noticiário Internacional Disponível em: <https://www.aereo.jor.br/2008/08/22/ressureicao-do-amx/>. Acesso em: 31/5/2021.

Na tarefa sobre a possibilidade de relação entre as áreas do conhecimento, no ambiente do *software* matemático GeoGebra, os seis estudantes presentes no Encontro 2 foram divididos em três duplas, na tentativa de encontrar respostas para as nove questões disponibilizadas nas fases de Resolução e Interpretação de Resultados, sendo uma delas “Qual a função que representa o movimento do artefato, em relação ao tempo de queda”?

Nas tarefas inseridas no contexto dos mapas conceituais, tivemos: os oito estudantes presentes no Encontro 1 que, divididos em quatro duplas, traçaram os mapas conceituais dos conceitos relativos à função quadrática e ao lançamento horizontal, de forma distinta; e os seis estudantes presentes no Encontro 2, divididos em três duplas, tiveram a oportunidade de traçar os seus mapas conceituais sobre a possível relação entre a função quadrática e o lançamento horizontal do objeto proveniente de aeronave em voo.

O questionário de satisfação teve um total de dezesseis questões abertas/fechadas/mistas, contendo perguntas sobre as percepções dos estudantes na aplicação da atividade, dentre elas, incluíram-se informações sobre gênero, idade e tempo de dedicação aos estudos dos estudantes do CEJA.

Análise de dados

A análise de dados, em um primeiro momento, abordará os resultados referentes à aplicação da modelagem matemática e aos respectivos extratos das discussões em sala de aula, por intermédio das questões e gravações de áudio realizadas entre os envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem. A seguir, estão apresentados os resultados referentes aos mapas conceituais, cuja finalidade consiste em observar indícios de aprendizagem significativa entre os estudantes da EJA.

Em relação à tarefa de verificação do conhecimento prévio do conteúdo de função quadrática, realizada individualmente, os oito estudantes presentes não detinham conhecimento do conceito de função quadrática. Diante desta informação, iniciou-se a fase de Inteiração, ou seja, a tarefa de familiarização com a situação-problema.

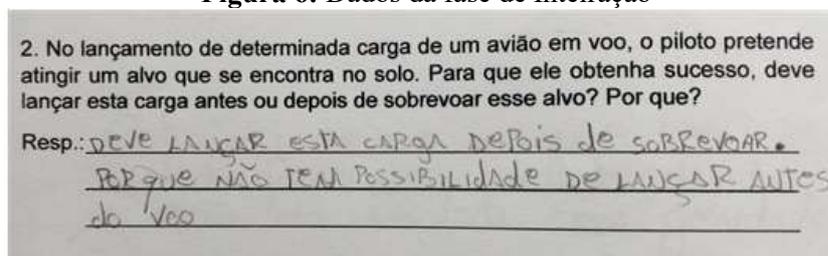
Após as discussões realizadas sobre o tema, o ALUNO_A1 da Dupla A menciona o seguinte: “Na primeira questão... é ... pergunta se a gente tiver numa praia... qual o movimento que a gente observa de um objeto caindo de um avião em movimento... então a gente chegou à conclusão de que nada que cai em movimento desce numa reta... ele não cai reto... ele vai fazendo um movimento curvilíneo... uma leve curva”. Observa-se que é pertinente essa colocação, uma vez que se for adotado o referencial no solo, o movimento do

objeto observado apresenta a sua trajetória na forma de uma parábola. Deve-se lembrar de que não é esta trajetória que está, efetivamente, em análise, porém a busca pela compreensão do aspecto físico-matemático do fenômeno, na variação da altura (posição) do objeto em relação ao tempo.

Na segunda questão (Figura 6), outra dupla não compreendeu o contexto da situação-problema e deixaram de considerar o tempo de queda do objeto para atingir o alvo.

Na fase de Inteiração, tivemos três questões para quatro duplas (A, B, C e D), em um total de doze respostas, sendo oito certas, uma parcialmente certa e três erradas (Tabela 2).

Figura 6: Dados da fase de Inteiração



Fonte: Acervo dos autores.

Tabela 2: Desempenho dos estudantes nas fases de modelagem matemática

Duplas / Fases	Inteiração			Matematização			Resolução		
	C	PC	E	C	PC	E	C	PC	E
A	3	0	0	3	2	0	4	4	1
B	2	0	1	3	0	2	6	3	0
C	2	0	1	4	0	1	6	2	1
D	1	1	1	4	1	0	-	-	-
E	-	-	-	1	1	0	-	-	-
F	-	-	-	1	1	0	-	-	-
G	-	-	-	1	1	0	-	-	-
TOTAL	8	1	3	17	6	3	16	9	2

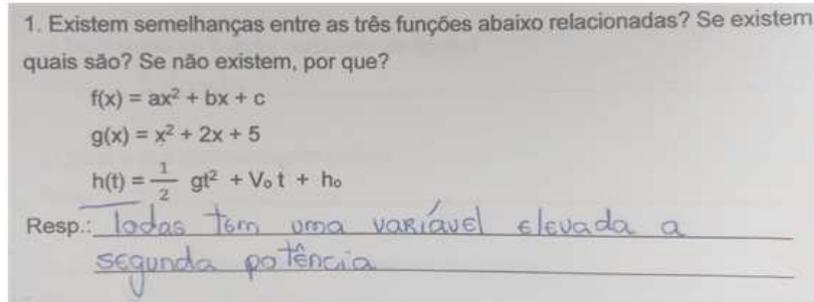
Legenda: C = Certa; PC = Parcialmente Certa; E = Errada

Fonte: Elaborado pelos autores.

Na tarefa de buscar elementos matemáticos na situação-problema – fase de Matematização (Figura 7), perguntou-se sobre a existência de semelhanças entre as funções, sendo que uma dupla compreendeu parcialmente o seu contexto. Os estudantes observaram que se tratava de uma função do segundo grau, mas não atentaram para outras características,

tais como a existência dos parâmetros na sua representação algébrica e na sua representação gráfica (parábola).

Figura 7: Dados da fase de Matematização



Fonte: Acervo dos autores.

Nesta fase, ainda, nas discussões da Dupla A, com a participação do mediador, tem-se:

PESQUISADOR: Dada a função... existem variáveis que se relacionam com a situação-problema... quais são as variáveis que se relacionam... vocês fizeram no mapa conceitual... qual o nome? Uma é o g... o que é g?

ALUNO_A1: Gravidade...

PESQUISADOR: O que é o v?

ALUNO_A1: Velocidade...

PESQUISADOR: O que é o h?

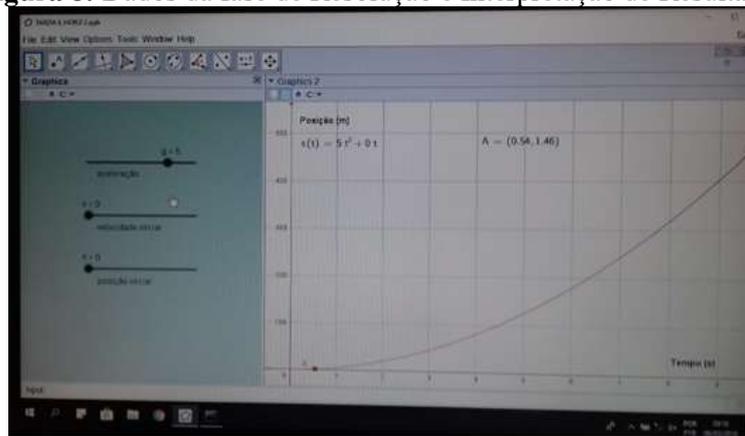
ALUNO_A2: Altura...

A dupla dialoga com o mediador e procura reconhecer as variáveis que estão envolvidas no processo, tais como a aceleração da gravidade, a velocidade e altura do objeto que está sendo lançado. Essas variáveis são fundamentais para que haja a compreensão da situação-problema e consequente viabilização para a próxima fase, na aplicação da modelagem matemática em sala de aula.

A fase da Matematização (Tabela 2) ocorreu em dois dias de aplicação, sendo que quatro duplas (A, B, C e D) participaram no primeiro dia e responderam a cinco questões, além de três duplas (E, F e G) participarem no segundo dia e responderem a duas questões complementares. O resultado da tarefa foi o seguinte: tivemos um total de vinte e seis respostas, sendo dezessete certas, seis parcialmente certas e três erradas.

Na tarefa sobre a possibilidade de relação entre as áreas do conhecimento, na qual os estudantes puderam utilizar os modelos matemáticos no ambiente do *software* matemático GeoGebra – fase de Resolução, uma dupla compreendeu a representação gráfica para resolução da situação-problema (Figura 8):

Figura 8: Dados da fase de Resolução e Interpretação de Resultados



Fonte: Acervo dos autores.

Para se atingir esse estágio, as interpretações entre os estudantes foram realizadas, em que o referencial adotado é representado por alguém a bordo da aeronave, a aceleração da gravidade é positiva e o objeto lançado se distancia desse referencial, à medida que o tempo passa – esta fase foi a de Interpretação de Resultados.

Nas discussões entre os integrantes da Dupla B, com a participação do mediador, foram registradas as seguintes observações sobre o comportamento do objeto ao ser lançado da aeronave, em relação à componente vertical:

PESQUISADOR: O objeto começa a se movimentar... qual a velocidade inicial?

ALUNO_B1: É um... né?

ALUNO_B2: Começa a andar do um?

PESQUISADOR: Quando você está no repouso... qual a sua velocidade?

ALUNO_B1: Ah... zero... zero...

PESQUISADOR: E qual a posição inicial?

ALUNO_B1: Eu acho que é um... né?

PESQUISADOR: Em relação ao avião... qual a posição inicial? Está juntinho do avião... considere isso como origem...

ALUNO_B1: Zero

Os alunos discutiram as variáveis que são importantes para se encontrar o modelo matemático, visando a sua validação e resolução da situação-problema. Além disso, eles estavam imersos na interpretação dos dados, para que ocorresse a devida compreensão, tanto de elementos matemáticos quanto de elementos não-matemáticos (as variáveis físicas do modelo).

Na fase de Resolução e Interpretação dos Resultados (Tabela 2), tivemos nove questões para três duplas – A, B e C, em um total de vinte e sete respostas, sendo dezesseis certas, nove parcialmente certas e duas erradas.

Diante dos resultados apresentados na aplicação da atividade, pôde-se concluir que a

quantidade de duplas que compreenderam as questões foi superior àquelas que não compreenderam essas questões relacionadas ao lançamento horizontal.

Na continuação desta atividade, houve a elaboração de mapas conceituais durante as fases da modelagem matemática, com a finalidade de verificar os indícios de aprendizagem significativa entre os estudantes da EJA. Segundo Moreira, Mendonça e Silveira (2010), os mapas conceituais podem ser avaliados da seguinte maneira: o “mapa bom” contém informações conceituais relevantes, estão bem organizados e hierarquizados, com o conceito inclusor no topo e em seguida os intermediários; o “mapa regular” apresenta alguns conceitos relevantes sobre o tema em estudo e dispõe de uma hierarquia ainda apreciável; e o “mapa deficiente” é muito pobre em conceitos sobre o conteúdo trabalhado.

Neste trabalho, houve a elaboração de mapas conceituais relacionados à função quadrática e ao fenômeno aviônico em estudo, estabelecendo-se a possibilidade de relação entre os conceitos da função e do fenômeno mencionados. Na elaboração dos mapas conceituais do lançamento horizontal, por exemplo, uma dupla de estudantes apresentou um “mapa bom” (Figura 9), isso porque os conceitos relevantes estavam disponibilizados de forma hierarquicamente correta, o conceito inclusor estava no topo, além de haver intensidade nas relações entre esses conceitos inseridos no contexto dos elementos físicos.

Figura 9: Mapa Bom



Fonte: Acervo dos autores, 2021

Nesta atividade de modelagem matemática, os mapas conceituais foram traçados pelos estudantes do Ensino Médio da EJA, visando à aprendizagem significativa e viabilizando reflexões sobre o tema abordado. Observa-se na Tabela 3 que houve indícios de aprendizagem significativa durante os três momentos de elaboração dos mapas conceituais:

Tabela 3: Avaliação por mapas conceituais

Função Quadrática			Lançamento Horizontal			Relação entre as áreas		
MD	MR	MB	MD	MR	MB	MD	MR	MB
1	3	0	0	2	2	1	2	0

Legenda: MB=Mapa Bom; MR=Mapa Regular; MD=Mapa Deficiente

Fonte: Elaborado pelos autores.

A análise dos questionários de satisfação da pesquisa, aplicados aos estudantes do CEJA, no Encontro 2, apresentou os seguintes dados: dois estudantes do sexo masculino e quatro do sexo feminino estavam presentes; a média da idade era de trinta e quatro anos; quatro estudantes estavam trabalhando em tempo integral e dois não estavam trabalhando; em relação ao tempo de dedicação aos estudos, quatro estudantes se dedicavam de uma a três horas, um, de quatro a sete horas e um, mais de sete horas.

Considerações finais

Neste trabalho foi possível aplicar a modelagem matemática em sala de aula, visando a aprendizagem significativa dos estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, no que se refere à função quadrática. A modelagem foi utilizada de acordo com as concepções de Almeida (2013) e a aplicação dos mapas conceituais, para verificar indícios de aprendizagem significativa, foi de acordo com as concepções de Moreira (2010).

Ampliaram-se as informações sobre os elementos físicos, em específico ao lançamento horizontal de objeto proveniente de aeronave em voo, na tentativa de estabelecer a relação entre a função quadrática e este tipo de lançamento, lembrando que existem diferenças de comportamento das representações gráficas possíveis neste tipo de função, quando a aceleração da gravidade é positiva ou negativa, dependendo do referencial adotado, sendo condição determinante para encontrar o modelo matemático na resolução de uma situação-problema.

Na atividade, ainda, foi possível observar indícios de aprendizagem significativa, de acordo com os mapas conceituais traçados pelos estudantes. Assim, nesta prática, pôde-se ilustrar como a modelagem matemática proporcionou aos estudantes estabelecer relações entre a função quadrática e o lançamento horizontal, propiciando-lhes identificar indícios de aprendizagem significativa em sala de aula, haja vista os resultados apresentados na realização da atividade de modelagem matemática, junto a esses estudantes do Ensino Médio

Referências

ALMEIDA, L.W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

ALMEIDA, L.W.; SILVA, K. P. A ação dos signos e o conhecimento dos alunos em atividades de modelagem matemática. **Boletim Online de Educação Matemática**, 2016. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0202.pdf>. Acesso em: 31 mai. 2021.

ALMEIDA, L.W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Boletim Online de Educação Matemática**, 2004. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10529>. Acesso em: 31 mai. 2021.

ALVARENGA, B.; MAXIMO, A. **Física Ensino Médio**. São Paulo: Editora Scipione, 2006.

BARBOSA, J.C. **Modelagem na educação matemática**: contribuições para o debate teórico. In: Reunião anual da ANPED, 24, 2001. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf. Acesso em: 31 mai. 2021.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L.W. O conceito de função em situações de modelagem matemática. **Zetetiké**, Unicamp, 2005. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646980/13881>. Acesso em: 31 mai. 2021.

FERREIRA, D. A. **Utilização de uma simulação computacional como ferramenta para o ensino de lançamento oblíquo**: uma proposta para o ensino de física. Universidade Estadual da Paraíba, 2014. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/9339/1/PDF%20-%20DOUGLAS%20ALVES%20FERREIRA.pdf>. Acesso em: 31 mai. 2021.

KAUARK, F. S.; MANHÃES, F. C.; MEDEIROS, C. H. **Metodologia da pesquisa**: um guia prático. Itabuna: Via Litterarum Editora, 2010.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2017.

MOREIRA, M. A. **Mapas conceituais e aprendizagem significativa**. São Paulo: Centauro Editora, 2010.

MOREIRA, M. A.; MENDONÇA, C. A. S. SILVEIRA, F. P. R. de A. **Mapa conceitual**: um recurso didático para o ensino dos conceitos sobre sistema respiratório. Programa internacional de doutorado em ensino de ciências da Universidade de Burgos/UFRGS, 2010. Disponível em: http://abrapecnet.org.br/atas_enpec/viii/enpec/resumos/R1195-1.pdf. Acesso

em: 31 mai. 2021.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa, organizadores prévios, mapas conceituais, diagramas V e unidades de ensino potencialmente significativas.** Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física, 2012. Disponível em:

http://www.profjudes.unir.br/uploads/44444444/arquivos/TAS_1518397339.pdf. Acesso em: 31 mai. 2021.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de matemática. **Educação e Matemática**, n. 15. Universidade de Lisboa, 1990. Disponível em:

<https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4473/1/90%20Ponte%20EM%2015.pdf>. Acesso em: 31 mai. 2021.

SILVA, F.G. **A aprendizagem de função quadrática por meio de modelagem matemática envolvendo o movimento em aeronaves.** Dissertação de Mestrado da Universidade do Estado de Santa Catarina, 2018. Disponível em:

https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.xhtml?popup=true&id_trabalho=6410415. Acesso em: 23 out. 2021.

SOARES, L. H. **Aprendizagem significativa na educação matemática: uma proposta para aprendizagem de geometria básica.** Dissertação de Mestrado da Universidade Federal da Paraíba, 2009. Disponível em:

<http://www.fisica.ufpb.br/~romero/pdf/DissertacaoHavelange.pdf>. Acesso em: 31 mai. 2021.

Recebido em: 22 de junho de 2021
Aprovado em: 01 de outubro de 2021