revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ABORDAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL E QUADRÁTICA A PARTIR DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.22.470-492

Andriceli Richit[1]
Dirlei Salete de Souza[2]
Adriana Richit[3]

Resumo: Este artigo analisa as contribuições de uma atividade de investigação matemática, baseada em materiais manipuláveis e tecnologias digitais, para o desenvolvimento do conceito de função quadrática e exponencial. O estudo foi realizado no contexto de um conjunto de 16 horas-aula de Matemática no Programa de Residência Pedagógica (PRP), promovidas em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico em Alimentos, de uma escola pública federal do oeste catarinense. O material empírico constituiu-se de registros escritos produzidos pelos alunos e pesquisadores e de registros fotográficos realizados durante o desenvolvimento das atividades. A análise qualitativa apontou contribuições das atividades investigativas em duas perspectivas: *a) desenvolvimento do pensamento matemático em relação às propriedades e representações das funções* quadrática e exponencial; *b) articulação de estratégias e recursos para a abordagem destes tópicos curriculares da matemática.*
Palavras-chave: Investigação Matemática. Tecnologias Digitais. Material Manipulável. Funções Quadrática e Exponencial.

EXPONENTIAL AND QUADRATIC FUNCTION CONCEPT APPROACH FROM MATHEMATICAL INVESTIGATIONS

Abstract: The article analyzes the contributions of a mathematical investigation activity, based on manipulable materials and digital technologies, to the development of the concept of quadratic and exponential functions. The study was carried out in the context of a set of 16 classroom hours of Programa de Residência Pedagógica (PRP), held in a class from the first year of Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico em Alimentos of a federal public school in western Santa Catarina. The empirical material consisted of written records produced by the students and the researchers; pictures made during the development of the research activities. The qualitative analysis evidenced contributions from investigative activities in two perspectives: development of mathematical thinking in relation to the properties and representations of the quadratic and exponential functions; articulation of strategies and resources to address these mathematical curriculum topics.
Keywords: Mathematical Investigation. Digital Technologies. Material to manipulate. Exponential and Quadratic Function.

Introdução

No Brasil, os processos de ensino e aprendizagem da Matemática têm se apresentado

[1] Doutorado em Educação Matemática pela Unesp – *Campus* Rio Claro. Docente no IFC – *Campus* Concórdia. ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-1578-2821. E-mail: andricelirichit@gmail.com
[2] Aluna do Curso de Especialização em Educação Matemática do IFC – *Campus* Concórdia. Licenciada em Matemática pelo IFC. ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-5190-2739. E-mail: dirlei.souza22@gmail.com
3 Pós-Doutorado em Didática da Matemática pela Universidade de Lisboa. Doutorado em Educação Matemática pela UNESP, Rio Claro, São Paulo. Professora, nível associado, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, e docente permanente dos Programas de Pós-graduação em Educação (PPGE) e Interdisciplinar em Ciências Humanas (PPGICH), ambos da UFFS. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0778-8198. E-mail: adrianarichit@gmail.com

de forma problemática, o que pode ser observado tanto em testes nacionais quanto internacionais, os quais indicam que os alunos passam longos anos na escola, mas, pouco conhecimento constroem em termos de Matemática (BARALDI, 1999). Assim, muitos desafios se colocam para que o processo de ensino da Matemática seja significativo e cumpra com seu papel, o de promover a aprendizagem. Ademais, várias perspectivas têm emergido a partir de estudos realizados no contexto da Educação Matemática com vistas à melhoria da aprendizagem da Matemática. Dentre estas, tem se destacado a investigação matemática, abordagem para as aulas de Matemática que se constitui em tema de pesquisa consolidado, por promover formas diferenciadas de abordagens de conceitos matemáticos e possibilitar a construção aprofundada destes conceitos (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013).

Neste trabalho, assumimos a investigação matemática como atividade de ensino-aprendizagem que agrega à dinâmica da sala de aula o espírito da atividade matemática em perspectiva de descoberta, isto é, descobrir relações entre objetos matemáticos que se conhece ou não, buscando identificar suas propriedades. Deste modo, as tarefas baseadas na investigação matemática são diferenciadas, pois permitem que os alunos sigam por caminhos diferentes, ainda que tenham iniciado pelo mesmo ponto. Além disso, engajá-los em tarefas investigativas instiga-os a pensar, investigar e levantar suas próprias conjecturas, escolhendo uma melhor forma de resolução de uma determinada situação-problema. Por fim, essa atividade de investigação, baseada em material manipulável e tecnologias, pode favorecer a aprendizagem matemática porque oportuniza ao aluno buscar novas formas de aprender, mobilizando-o a pesquisar, explorar, discutir e conjecturar (RICHIT; MALTEMPI, 2010).

Nesta direção, este trabalho examina as contribuições de uma atividade de investigação matemática, baseada em materiais manipuláveis e tecnologias digitais, para a construção e desenvolvimento do conceito de funções quadráticas e exponenciais. A atividade foi desenvolvida em uma turma de primeiro ano do Curso Técnico em Alimentos do Instituto Federal Catarinense – IFC no segundo semestre de 2019.

Assim, este trabalho pode contribuir para explicitar possibilidades do desenvolvimento de investigação matemática na abordagem de conceitos de função quadrática e exponencial, na medida em que possibilita uma forma articulada de discutir estes conceitos. Ao envolver materiais manipuláveis e tecnologias digitais como recursos basilares nas atividades propostas, a investigação matemática oportuniza ao aluno compreender os conceitos de função exponencial e quadrática de maneira distinta, associando a definição formal às representações tabulares, algébricas e gráficas. Este aspecto é importante na compreensão da Matemática por favorecer a mobilização de recursos cognitivos distintos.

Investigações matemáticas

Pesquisas em Educação Matemática têm apontado potencialidades da investigação matemática no processo de ensino e aprendizagem da Matemática (PONTE *et al,* 2003; PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013; BELINE, 2012; TUDELLA, 1999). Nesse contexto, a investigação matemática tem como premissa tornar o aluno mais responsável por sua aprendizagem, pois investigar constitui uma poderosa forma de construir conhecimento.

Braumann (2002, p.5) destaca a importância de colocar o aluno no centro de seu aprendizado, atuando como sujeito ativo na construção do conhecimento, uma vez que,

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo.

A investigação matemática no contexto do processo de ensino e aprendizagem consiste em lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Procura-se elaborar questões relativamente interessantes, para as quais ainda não se tem respostas prontas, buscando essa resposta de modo fundamentado e rigoroso tanto quanto possível (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013).

Nessa perspectiva, fazer Matemática está ligado à investigação da própria Matemática, e nesse sentido, não é possível fazer Matemática sem colocá-la em prática. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) pontuam que várias experiências em sala de aula têm apontado potencialidades e o alcance das investigações no contexto da aprendizagem, bem como têm, em alguma medida, desenvolvido o entusiasmo dos alunos pela Matemática. Para além disso, Ponte *et al* (2003, p.2) pontuam que:

> [...] investigar não é mais do que conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com que nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos.

A investigação matemática demanda um olhar diferenciado para as aulas de Matemática, proporcionando assim, novos desafios para os alunos e para os professores. Em um ambiente de sala de aula permeado pela investigação matemática, o envolvimento do aluno é prerrogativa fundamental para a aprendizagem, visto que a investigação se constitui em uma abordagem de sala de aula que foge do modelo tradicional, onde o professor apresenta as definições, o exemplo e o aluno desenvolve exercícios de acordo com o modelo. Assim, a investigação matemática, enquanto atividade de ensino-aprendizagem no contexto da sala de aula, pressupõe que o aluno seja "chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 23).

Além disso, as investigações matemáticas solicitam um planejamento adequado para o seu bom desenvolvimento, visto que no processo de investigação, abrem-se vários horizontes, muitas vezes não previstos, pois cada estudante segue percursos variados, conferindo, ao mesmo tempo, imprevisibilidade à investigação ao passo que esboça uma variedade diferenciada de caminhos e soluções ao problema proposto. Nessa perspectiva, uma atividade de investigação (que pode tomar uma aula ou conjunto de aulas) desenvolve-se em três fases: i) introdução da tarefa (professor apresenta a proposta à turma de forma oral ou escrita); ii) realização da investigação (que pode ser individual, pequenos grupos ou na turma toda) e iii) discussão dos resultados (alunos explicitam aos colegas as ações do trabalho realizado). Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), essas fases podem se modificar e serem concretizadas de muitas maneiras, mas de modo geral são estas que estão subjacentes a processos investigativos em sala de aula.

Nas investigações matemáticas, a Matemática é desenvolvida a partir de situações (matemáticas) abertas, para as quais o aluno não dispõe de um método que permita sua resolução imediata (PONTE; BROCARDO; OLIVIERA, 2003). Pelo contrário, em um contexto de investigação matemática, há um enunciado apresentando claramente uma situação e que suscita uma solução, entretanto, o mais importante é o processo de construção da resposta, e não a resposta em si. Sobre isto, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 23) destacam que:

> Numa investigação, as coisas são um pouco diferentes. Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes.

A investigação matemática pressupõe caminhos diferenciados para a busca de soluções de problemas matemáticos, de modo que os materiais didáticos ou manipuláveis podem se constituir aliados não somente em atividades de investigação, mas em outras situações que permeiam a aula de Matemática. Lorenzato (2012, p. 18) define material didático (MD) como "[...] qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Portanto, MD pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros".

A este respeito, Silveira (2012) destaca que os materiais manipuláveis se constituem em uma "[...] possibilidade de recurso pedagógico que parte da prática para problematizar e construir conceitos, a fim de minimizar as rupturas dos saberes e favorecer a articulação do cotidiano com o saber escolar".

Assim, os materiais manipuláveis podem auxiliar para desconstruir a aversão dos alunos frente ao estudo da Matemática, bem como podem evidenciar a presença da Matemática no cotidiano de modo a ressaltar sua importância. Também, a utilização de materiais manipuláveis pode colaborar na promoção de reflexões e compreensões matemáticas, pode promover descobertas e, em consequência, contribuir para a aprendizagem, assim como pode antecipar a abordagem de assuntos ou outros conceitos matemáticos.

Lorenzato (2012) acrescenta que a utilização de materiais manipuláveis está sempre ligada com o processo de ensino que possui característica paradoxal, isto é, no caso da Matemática, que é uma ciência abstrata, os materiais manipuláveis podem contribuir com as abstrações, partindo do empírico e concreto. Para Lorenzato (2012, p.23):

> Essa trajetória é semelhante à que se deve fazer para conseguir o rigor matemático: para consegui-lo, com seus vocábulos, expressões, símbolos e raciocínios, é preciso começar pelo conhecimento dos alunos, que é um ponto distante e oposto ao rigor matemático, porque é empírico e baseado no concreto.

A utilização de materiais manipuláveis nas aulas de Matemática altera a relação do aluno com a Matemática, pois, conforme explicita Santos (2015, p. 37),

> [...] com o uso de materiais concretos em aula o aluno é desafiado, de modo a despertar o encanto e fascinação pelo estudo de matemática, estabelecendo de forma crítica e dinâmica a construção do seu próprio conhecimento, uma vez que fica iminente a possibilidade de abstrair o conhecimento sobre os conteúdos abordados quando se consegue concretizar e manipular as suas aplicações.

Por outro lado, a utilização de materiais manipuláveis ou materiais didáticos alteram a dinâmica das aulas de Matemática, pois ao amalgamar atividades concretas/experimentais e conceitos abstratos pode

> [...] promover uma aprendizagem mais eficaz, pois estimula o cálculo

> mental, a dedução de estratégias, o domínio das operações fundamentais, a construção de conceitos e o desenvolvimento do raciocínio lógico. E estes são os pontos cruciais para a efetivação do verdadeiro conhecimento matemático (GERVÁZIO, 2017, p. 45).

Nesta perspectiva, compreendemos que o desenvolvimento de investigações matemáticas a partir de atividades baseadas em materiais manipuláveis pode fomentar a descoberta em Matemática. Além disso, tais investigações em Matemática podem ser estimuladas pelo uso de recursos das tecnologias digitais, tais como *softwares* de geometria dinâmica, pelo fato desses recursos oportunizarem abordagens diferenciadas.

As tecnologias digitais estão atualmente muito presentes no cotidiano de todas as pessoas, e obviamente, permeiam o cotidiano de todos os alunos. Para Kenski (2002), as tecnologias ampliam nossa visão de mundo, modificado os hábitos, as linguagens, criando novos padrões éticos e novas maneiras de apreender a realidade. Acrescenta que o professor não limita-se a ensinar o conteúdo sob a perspectiva estrutural e linear de apresentação, mas sim, propõe possibilidades de encaminhamento das reflexões, das possibilidades de outras relações entre as áreas do conhecimento aparentemente distintas (KENSKI, 1998).

> A história do conhecimento, produzido pela humanidade, é permeada e condicionada pelas diferentes tecnologias da inteligência, oralidade, escrita e informática. O conhecimento nunca é produzido somente por humanos, mas também por atores não humanos. As tecnologias são produtos humanos, e são impregnadas de humanidade (BORBA; VILARREAL, 2005, p. 302).

Os recursos das tecnologias para o ensino de Matemática podem despertar o interesse dos alunos, uma vez que o professor em sala de aula se depara com algumas dificuldades no processo de ensino e aprendizagem. Outro aspecto importante diz respeito ao fato de os alunos não conseguirem perceber a relação entre a representação gráfica e a representação algébrica ou numérica de uma função. No entanto, essa dificuldade pode ser superada pelo professor ao lançar mão de *software* para promover a compreensão. Assim, no contexto das tecnologias digitais o *software* GeoGebra se apresenta como uma tecnologia auxiliar no estudo variacional e das propriedades de uma função. Sobre isto, Rezende, Pesco e Bortolossi (2012, p.78) acrescentam que:

> No GeoGebra, pontos podem ser criados sobre gráficos de funções de modo que, ao movê-los, eles continuem sempre sobre o gráfico da função. Os valores das coordenadas desses pontos podem ser então recuperados e usados em cálculos ou na criação de outros elementos geométricos (pontos, segmentos e retas). Esse tipo de recurso permite ao usuário estudar (graficamente, algebricamente e numericamente) como, por exemplo, características locais da função (taxas de variação média e instantânea)

mudam de acordo com a posição do ponto sobre o gráfico da função.

Um *software* pode proporcionar ao aluno um cenário investigativo no qual ele tem a oportunidade de levantar hipóteses, testá-las e analisar os resultados encontrados. Assim concebidas, as tecnologias digitais constituem-se em um recurso que pode modificar os processos de ensino e ampliar, dar continuidade, às aprendizagens dos alunos.

Nessa direção, utilizar tecnologias na perspectiva de experimentação permite abordar conceitos matemáticos com o uso de tecnologias ou explorar problemas matemáticos, a qual pode oferecer formas diferenciadas de compreensão de conceitos matemáticos abrindo inclusive caminhos para o surgimento de novos problemas. Ao propor atividades de matemática ancoradas na noção de experimentação[4] com tecnologias, o professor oportuniza ao aluno desenvolver o pensamento matemático mediante a: i) proposição de conjecturas matemáticas; ii) exploração de diversas formas de resolução; iii) manipulação dinâmica de objetos construídos; iv) criação e conexão entre diferentes (e múltiplos) tipos de representações de objetos matemáticos; v) exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014).

Portanto, as tecnologias digitais no estudo de conceitos matemáticos podem ampliar as possibilidades de estudar a Matemática, transformando abordagens expositivas e que pouco impactam nos processos de ensinar e aprender.

Aspectos metodológicos

O estudo segue os pressupostos da pesquisa qualitativa e descritiva com análise interpretativa (MINAYO, 2004), pois buscamos examinar as contribuições de uma atividade de investigação matemática, baseada em materiais manipuláveis e tecnologias digitais, para a construção e desenvolvimento do conceito de função quadrática e exponencial.

O material empírico do estudo foi constituído ao longo da regência da segunda autora do artigo, no âmbito das atividades do Programa de Residência Pedagógica (PRP)[5] em Matemática no segundo semestre do ano de 2019, como equivalentes ao Estágio Supervisionado IV. A prática da regência tomou 16 horas/aula e desenvolveu-se em uma

[4] A noção de experimentação na perspectiva de Borba, Scucuglia e Gadanidis por ser [...]entendida como o uso de tecnologias informáticas no estudo de conceitos ou na exploração de problemas matemáticos (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p.51).
[5] O Programa de Residência Pedagógica é uma das ações que integram a Política Nacional de Formação de Professores e tem por objetivo induzir o aperfeiçoamento da formação prática nos cursos de licenciatura, promovendo a imersão do licenciando na escola de educação básica a partir da segunda metade de seu curso. Mais informações em Edital 06/2018 – Capes.

turma constituída de 32 alunos do primeiro ano do Curso Técnico em Alimentos do Instituto Federal Catarinense – IFC. As atividades matemáticas abordavam os conceitos de função quadrática e exponencial e foram desenvolvidas em uma perspectiva de investigação matemática, a partir de materiais manipuláveis e tecnologias digitais. Nas aulas de investigação sobre esses tópicos curriculares, os alunos trabalharam em grupos de 4 integrantes.

Em específico, apresentamos situações que ocorreram no âmbito da regência as quais denominamos de “episódios de ensino”, que se refere a um pequeno trecho de uma aula (MORTIMER; SCOTT, 2002) considerado relevante para as investigações matemáticas realizadas. Neste estudo, tomamos a abordagem de função quadrática a partir de material manipulável, por meio do qual os alunos construíram uma parábola utilizando recursos diferentes da forma usual que utilizam para representar graficamente funções quadráticas. Este episódio oportunizou-os a representar a parábola pela perspectiva da Geometria Analítica, na qual são estudadas as cônicas (parábolas, hipérboles, circunferências e elipses).

Apresentamos também aspectos relacionados a outro “episódio de ensino”, centrado na abordagem do conceito de função exponencial, na qual, a partir de material manipulável (Torre de Hanoi), investigação matemática e tecnologias digitais (*software* GeoGebra), os alunos construíram conhecimentos acerca de função exponencial de maneira investigativa e com maior protagonismo.

De modo específico, a análise que apresentamos está pautada no “Episódio de Ensino 1 – Representação da função quadrática (parábola) a partir de material manipulável” e “Episódio de Ensino 2 – Função exponencial a partir de material manipulável, investigação matemática e tecnologias digitais”.

Os dados consistem em anotações das pesquisadoras, de registros fotográficos, de registros escritos dos alunos ao longo do desenvolvimento das aulas e atividades. As anotações das pesquisadoras e dos alunos contribuíram para a compreensão de como os materiais manipuláveis, investigação matemática e tecnologias digitais contribuíram para a construção de conhecimento das funções supracitadas.

Episódios de ensino “representação de parábolas a partir de dobraduras” e “função exponencial (torre de hanoi e *software* GeoGebra)”

As atividades que constituem o material empírico da investigação foram produzidas no âmbito dos episódios de ensino dedicados ao estudo da função quadrática e da função exponencial.

Episódio de Ensino 1 – Representação de parábolas a partir de dobraduras

Neste episódio de ensino, os alunos, organizados em grupos de 4 pessoas, foram mobilizados a representar uma parábola (gráfico representativo de uma função quadrática) a partir de dobraduras. De maneira usual, no contexto de aulas de Matemática e em livros didáticos, há orientações quanto à representação gráfica a partir da substituição de valores na função dada, e após, é realizada a marcação dos pontos e por fim traça-se a parábola que tais pontos representam no plano cartesiano. No entanto, como forma de ampliar as compreensões acerca do estudo de parábolas, lançamos mão de dobraduras para a representação das mesmas, de modo a explicitar aos alunos que parábolas são objetos geométricos mais gerais do que os gráficos das funções quadráticas (LOUZADA, 2013), isto é, as parábolas constituem um dos tópicos estudados no contexto das cônicas, referente à Geometria Analítica.

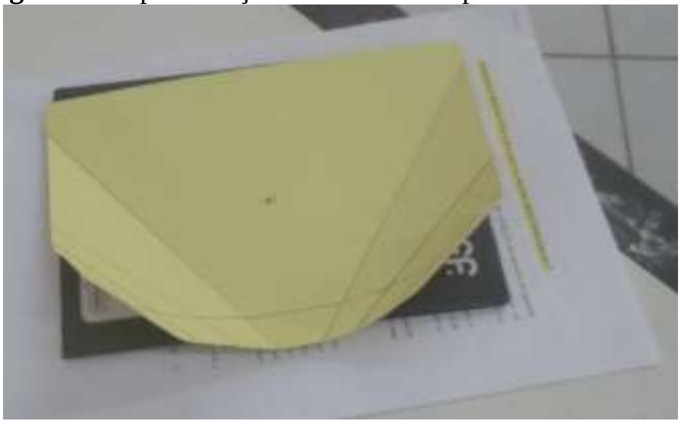
Para tanto, os alunos, a partir de cartolina, régua e caneta, seguiram o passo a passo conforme apresentado na sequência para a representação da parábola por meio de dobradura.

Orientação para a construção da Parábola a partir de Dobradura

1. Com auxílio da régua, marque uma linha (reta diretriz) horizontal na folha entregue;
2. Fora dessa linha, marque um ponto F (foco da parábola);
3. Marque um ponto qualquer sobre a reta;
4. Dobre o papel de forma que o ponto coincida com o ponto F.
5. Repita o processo o maior número de vezes possíveis, pois, quanto maior o número de pontos marcados, mais visível ficará a parábola.
6. Para realçar o gráfico da parábola, marcar as linhas e os pontos de encontro das marcações formadas pelas dobraduras.

Após concluir a construção da parábola com dobradura, os alunos se surpreenderam com a possibilidade de representá-la dessa forma, por que, para eles, os gráficos de funções somente são possíveis de representar a partir de pares ordenados no plano cartesiano, o que pode ser feito com lápis e papel ou um *software*. Este aspecto revela a abordagem predominante no estudo de funções, especialmente na representação, na qual a construção de parábolas pela perspectiva da Geometria Analítica não é considerada. A partir da construção da parábola por meio de dobraduras, os alunos puderam ampliar suas compreensões acerca do tópico parábola, o qual não constitui apenas a representação gráfica de função quadrática, pois é também um objeto de estudo da Geometria Analítica, nomeadamente as cônicas. Para Lorenzato (2012), a utilização de material didático ou manipulável pode antecipar a abordagem de tópicos matemáticos, o que, na situação apresentada não seria possível se não fosse pela dobradura, conforme figura 1, apresentada na sequência:

Figura 1: Representação de Parábolas a partir de dobraduras



Fonte: Souza (2019)

O objetivo da atividade consistia em oportunizar aos alunos realizar a construção de parábolas a partir de material concreto e, com isso, visualizar os elementos constituintes da curva obtida, que neste caso eram as linhas produzidas pelas dobras do papel. Ressaltamos que em nenhum momento, desde o início da atividade, o professor antecipou aos alunos a definição da curva que seria gerada pelas dobraduras. Os alunos apenas receberam um protocolo de construção da dobradura, o qual foi seguido, passo a passo. Em seguida, a professora iniciou a discussão sobre a curva delimitada pelas dobras do papel. Ou seja, na medida em que os alunos dobravam mais e mais vezes o papel, em relação ao ponto definido, tornava-se visível um conjunto de marcas (retas) que tangenciavam uma curva imaginária, cujo desenho é uma parábola.

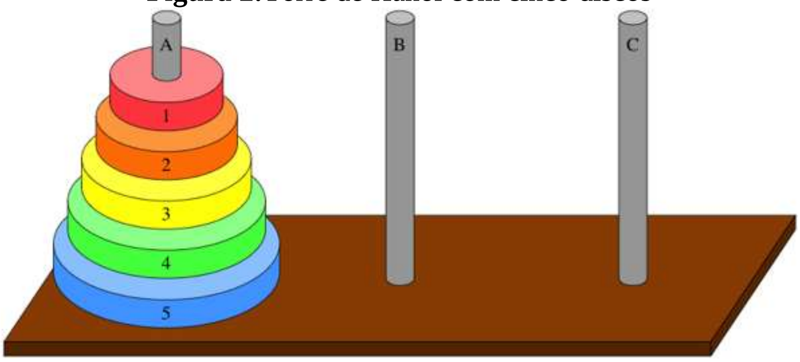
Portanto, por meio desta atividade os alunos puderam reconhecer a curva delimitada pelo conjunto de marcas (retas) como a representação de uma parábola. As atividades propostas permitiram momentos de interação entre os alunos e momentos de reflexão sobre a representação da parábola, a partir da qual foi possível realizar a discussão de algumas das propriedades através da simetria entre os pontos marcados na parábola e os pontos marcados sobre a reta. Ademais, foram realizadas discussões acerca do vértice e concavidade da parábola.

Relativamente ao aprofundamento da compreensão sobre o vértice da parábola, a atividade oportunizou aos alunos reconhecerem este ponto como sendo o ponto de intersecção do eixo de simetria da parábola com a própria parábola. Sobre a concavidade, os alunos compreenderam que a posição do ponto fixo (foco) em relação à reta diretriz determina a concavidade da parábola. Nessa perspectiva, a aprendizagem dos alunos não se deu pela estrutura do material manipulável em si nem pela manipulação do mesmo, mas foi resultado das reflexões sobre a ação manipulativa (LORENZATO, 2012) e da investigação matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013). Com ênfase, a investigação matemática foi potencializada pelo material concreto, o qual fomentou a observação, análise e o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, constituindo-se em aliados importantes para auxiliar os alunos na construção do conhecimento. Além disso, a atitude investigativa dos alunos no desenvolvimento da tarefa de dobradura os mobilizou na construção de conhecimentos relativos à função quadrática, bem como os aproximou de discussões de propriedades das parábolas, que são próprias da Geometria Analítica.

Episódio de Ensino 2 – Função exponencial (torre de Hanoi e *software* GeoGebra)

O episódio de ensino 2 foi estruturado em duas partes. A **primeira parte** refere-se a uma investigação matemática envolvendo o conceito de função exponencial a partir da Torre de Hanoi. Primeiramente, os alunos se envolveram em uma atividade de familiarização e exploração da Torre de Hanoi[6], que consiste de um quebra-cabeça inventado pelo matemático francês Édouard Lucas. Este quebra-cabeça é constituído de uma base contendo três pinos, em dois dos quais estão dispostos alguns discos, estando estes sobrepostos em ordem decrescente de diâmetro, isto é, estão organizados do maior para o menor, de baixo para cima. O problema inerente ao quebra-cabeça consiste em passar todos os discos do pino inicial a qualquer um dos outros dois pinos, usando um dos pinos como auxiliar, de modo que um disco maior nunca fique sobre um disco menor. A quantidade de discos pode variar sendo o mais simples composto de três discos. A figura 2 apresenta um modelo da Torre de Hanoi.

Figura 2: Torre de Hanoi com cinco discos



Fonte: < https://pt.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/towers-of-hanoi/a/towers-of-hanoi>. Acesso em: 01 nov. 2020

[6] Maiores informações em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_Han%C3%B3i. Acesso em: 01 de nov. 2020.

Em seguida, visando aproximar os alunos do estudo do conceito de função exponencial, foi apresentado aos mesmos o jogo e a seguinte investigação foi proposta.

Atividade de Investigação: Torre de Hanoi

1. Passe os discos de um dos pinos a qualquer um dos outros dois;
2. Anote a quantidade de movimentos necessária para movimentar:

a) Um disco;
b) Dois discos;
c) Três discos;
d) Quatro discos;
e) Cinco discos;

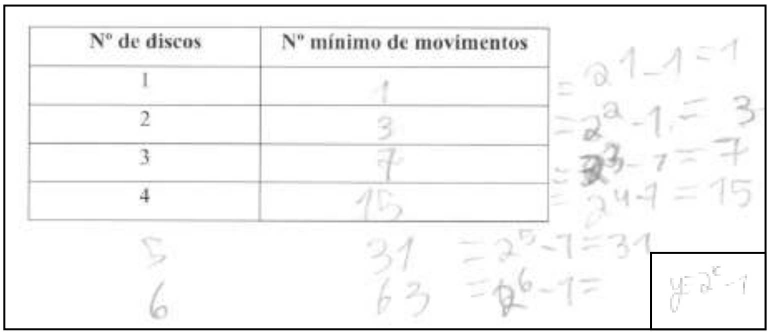
Nº de discos	**N° de movimentos**
1	
2	
3	
4	
5	
...	

3. Investigue para outros números de discos;
4. Qual a quantidade de movimentos necessários para movimentar “n” discos.
5. Defina uma “lei matemática” que permita determinar a quantidade de movimentos para qualquer número de discos.

Após o momento inicial da aula, conforme preconizam Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), isto é, o momento de apresentar aos alunos a tarefa proposta, demonstrando e explicando as regras do jogo referente à Torre de Hanoi e garantindo aos alunos a compreensão do sentido da tarefa proposta e aquilo que se esperava deles, os alunos iniciaram a investigação sobre a relação entre a quantidade de peças movimentadas e a quantidade necessária de movimentos para deslocar os discos do primeiro pino para qualquer um dos outros dois. Esta atividade foi bastante instigante para os alunos, porque permitiu que cada grupo experimentasse o jogo e estimasse a quantidade de movimentos relacionados ao número de discos. Houve situações em que cada componente do grupo estimou um número de movimentos diferente dos colegas de grupo. Diante desta divergência, repetiam atentamente os movimentos até chegar a um consenso. Observaram que poderiam fazer a transferência dos discos de um pino a outro, tal como o jogo propunha, no entanto poderiam realizar movimentos desnecessários, e era isto que causava a divergência na relação entre o número de discos e a quantidade de movimentos a ele associados.

Após algum tempo experimentando a passagem dos discos de um pino ao outro, os alunos estabeleceram conjecturas sobre o número de movimentos em função da quantidade de discos. A generalização apresentada na figura a seguir foi consensuada na discussão coletiva, a partir das conjecturas apresentadas pelos grupos. Sobre isso ressaltamos que dentre os nove grupos, dois deles haviam chegado a essa representação na etapa do trabalho com os pares.

Figura 3: Conjectura de um dos grupos de alunos



Nº de discos	Nº mínimo de movimentos	
1	1	$= 2^1 - 1 = 1$
2	3	$= 2^2 - 1 = 3$
3	7	$= 2^3 - 7 = 7$
4	15	$= 2^4 - 1 = 15$
5	31	$= 2^5 - 1 = 31$
6	63	$= 2^6 - 1 =$

$y = 2^x - 1$

Fonte: Grupo A

De acordo com os registros das atividades, constatamos que os alunos relacionaram a quantidade de movimentos em relação aos discos, a partir da relação entre potências de base 2, chegando à expressão geral da relação, que foi generalizada pela função 2^n-1, onde n representa a quantidade de discos. Os alunos observaram que o valor do expoente da base 2 corresponde ao número de discos transladados.

Além disso, os alunos observaram a partir da socialização dos resultados, que para uma Torre de Hanoi com maior número de discos, a quantidade de movimentos aumentaria substancialmente, e nesse sentido, ficaria difícil a contagem. Também, observaram que a quantidade de movimentos poderia ser identificada a partir da substituição do número de discos na lei matemática encontrada.

Figura 04: Atividade Torre de Hanói

Fonte: Andriceli Richit (2019)

Após as experimentações de cada grupo, teste de conjecturas a partir da lei matemática estabelecida, passou-se a discussão da investigação. Esse momento de partilha foi muito importante, pois alguns grupos não haviam conseguido conjecturar sobre a lei matemática, no entanto, haviam conseguido identificar a quantidade de movimentos ao fazer a passagem dos discos de um pino ao outro, isto é, a partir de experimentação concretamente no jogo. Assim, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), o compartilhamento das soluções contribuiu para o desenvolvimento da capacidade de comunicar ideias matematicamente, assim como possibilitou a realização de boas discussões, despertando nos alunos a importância da justificação matemática das conjecturas e do espírito investigativo destes.

Depois da investigação com a Torre de Hanoi, buscando identificar a quantidade de movimentos em função do número de discos mediante o diálogo junto aos alunos, conjecturou-se que a relação identificada constitui uma função exponencial, pois a variável encontra-se no expoente. A partir da lei matemática definida para a relação entre os movimentos e quantidade de discos da Torre de Hanoi, definiu-se função exponencial. Portanto, a partir da manipulação da Torre de Hanoi e da investigação promovida, o conceito de função exponencial assumiu outra perspectiva, pois esteve relacionado a algo concreto, o que contribuiu para a compreensão e aprofundamento do conhecimento dos alunos sobre este tipo de função.

A **segunda parte** referente ao "Episódio de Ensino 2" consistiu na investigação de propriedades e noções da função exponencial a partir do *software* GeoGebra. Assim, além da investigação envolvendo a Torre de Hanoi e a relação entre o número de discos e a quantidade de movimentos, também os alunos desenvolveram investigações acerca da representação gráfica da função exponencial.

Após a investigação matemática, lançando mão da Torre de Hanoi, a professora apresentou aos alunos a definição e algumas das propriedades envolvendo a função exponencial. No entanto, a representação gráfica e suas características foram desenvolvidas a partir de um roteiro investigativo no *software* GeoGebra, conforme apresentado na sequência.

Conjecturando sobre gráficos de Funções Exponenciais

1. Digite na caixa de entrada $y = a^x$ através do comando y = a^x, em seguida teclamos "Enter". Surgirá uma janela com a opção de menu "Criar Controles Deslizantes". Clicamos sobre ele. Assim estará visível na "Janela de Álgebra" uma função cuja lei se apresenta como $f(x)=1^x$. Após isso, observe o gráfico plotado. Agora responda, que gráfico é este representado pelo *software* GeoGebra? Quais são suas características?

2. Com a ferramenta "mover" selecionada, arraste o controle deslizante para onde desejar. O

que acontece ao mover o controle deslizante (parâmetro a)? Que tipos de representações gráficas você observou? Há alguma mudança no gráfico representado quando os valores de "a" são modificados?

3. Clique agora com o botão direito do mouse sobre o "controle deslizante" seguindo em propriedades, surgirá uma janela onde escolheremos o menu "controle deslizante" para alterar o intervalo para um mínimo de 0 e máximo de 5. Assim, os valores de "a" irão variar apenas de 0 a 5. Por fim, clicamos no "quadradinho" no canto superior da janela próximo ao "X" cuja função é exibir a janela principal.

4. Novamente clique com o botão direito do mouse sobre o "controle deslizante" e marque a caixa "Animar". A partir de então, a base "a" será alterada automaticamente enquanto seu gráfico se movimenta. Surgirá próximo a caixa de entrada uma nova ferramenta com a função de "pausar" animação. Basta clicar sobre ela para parar e iniciar. O que você observou ao animar o controle deslizante? Descreva.

5. Pause a animação e arraste o controle deslizante até uma das extremidades. Clique com o botão direito sobre a lei da função expressa na "Janela Álgebra" e selecione "Habilitar Rastro" (o procedimento é o mesmo para desabilitar). Agora reative a animação para observar o comportamento gráfico da função. Há alguma correspondência entre certos valores da base "a" e sua representação gráfica? Identifique o que observou.

Esta atividade foi realizada em Laboratório de Informática, usando o *software* GeoGebra, a partir do qual os alunos realizaram as investigações propostas. Os alunos já haviam tido contato prévio com a definição formal de função exponencial, bem como com algumas de suas propriedades. No entanto, a definição e as propriedades se deram apenas em um plano teórico e conceitual, não tendo realizado construções gráficas ou representações geométricas para compreender ou verificar as propriedades discutidas em momento anterior.

Com relação ao item 1 do Roteiro de Investigação "*Digite na caixa de entrada* $y = a^x$ *através do comando* $y = a^x$*, em seguida teclamos "Enter". Surgirá uma janela com a opção de menu "Criar Controles Deslizantes". Clicamos sobre ele. Assim estará visível na "Janela de Álgebra" uma função cuja lei se apresenta como* $f(x)=1^x$*. Após isso, observe o gráfico plotado. Agora responda, que gráfico é este representado pelo software GeoGebra? Quais são suas características?",* as conjecturas dos alunos foram:

- ✓ *É representado um gráfico constante. Ele é, sempre será paralelo ao eixo x, sendo assim, ficarão lado a lado e jamais se interceptarão (ESTUDANTE 1).*
- ✓ *É uma função do primeiro grau, o gráfico forma uma reta paralela ao eixo dos x (ESTUDANTE 10).*
- ✓ *O gráfico é uma função de primeiro grau, e era paralela ao eixo x (ESTUDANTE 11).*
- ✓ *Apenas uma linha reta, onde vários valores de x estão associados a um único y (ESTUDANTE 16).*
- ✓ *É representado como gráfico constante. Ele é, e sempre será paralelo ao eixo x, sendo assim, ficarão lado a lado e jamais se interceptarão (ESTUDANTE 22).*

- ✓ *O gráfico é constante, pois y é o mesmo valor. X cresce e o valor de um em um e y possui mesmo valor (ESTUDANTE 24).*

As respostas dos alunos sinalizam que eles chegaram à conclusão de que a função y = $1^{x,}$ correspondia ao gráfico de uma função constante, pois o gráfico representativo exibido no *software* GeoGebra era de uma reta paralela ao eixo dos x. Além disso, ao observarem o gráfico representativo, compreenderam que a forma algébrica da função y = 1^x, correspondia a uma função do primeiro grau, concepção desconstruída associando a expressão algébrica dada (y=1^x) a uma função de primeiro grau (y = ax +b). Ao propor a investigação da função y = a^x no *software* GeoGebra considerando diferentes valores para a base “a”, esperava-se que a partir da representação gráfica os alunos pudessem compreender as propriedades e a própria definição de função exponencial.

Para Borba *et al* (2014), o caráter inovador do *software* GeoGebra consiste em permitir a articulação entre diferentes formas de representação matemática, isto é, a algébrica (expressões), a geométrica (retas, parábolas, curvas, etc) e a numérica (conjunto de pontos). Além disso, trabalhar os conceitos sob suas diferentes representações consolida alguns conhecimentos e descontrói equívocos e incompreensões acerca de conceitos, a exemplo do que os alunos concluíram quando relacionaram o gráfico representativo de y = 1^x à uma função de primeiro grau, o que contraria a definição de função do primeiro grau. Este aspecto corrobora a perspectiva de Rezende, Pesco e Bortolossi (2012), segundo os quais o GeoGebra permite a criação de pontos sobre gráficos de funções de modo que, ao movê-los, eles continuam sempre sobre o gráfico da função. Além disso, as coordenadas desses pontos podem ser recuperadas, examinadas para embasar operações matemáticas e a criação de outros elementos geométricos (pontos, segmentos ou retas). Em síntese, esse recurso permite ao aluno estudar (gráfica, algébrica e numericamente) as propriedades de funções, tais como taxas de variação média e instantânea, as quais mudam de acordo com a posição do ponto sobre o gráfico da função (REZENDE; PESCO; BORTOLOSSI, 2012), além de favorecer a aprendizagem matemática do aluno mediante a pesquisa, a exploração, discussão e proposição de conjecturas (RICHIT; MALTEMPI, 2010).

Na continuidade do desenvolvimento do roteiro de atividades exploratório-investigativas, o item 2 do roteiro propunha o seguinte: *“2. Com a ferramenta “mover” selecionada, arraste o controle deslizante para onde desejar. O que acontece ao mover o controle deslizante (parâmetro a)? Que tipos de representações gráficas você observou? Há alguma mudança no gráfico representado quando os valores de “a” são modificados?”*

Ao engajaram-se na exploração a partir do *software* GeoGebra, os alunos apontaram o seguinte:

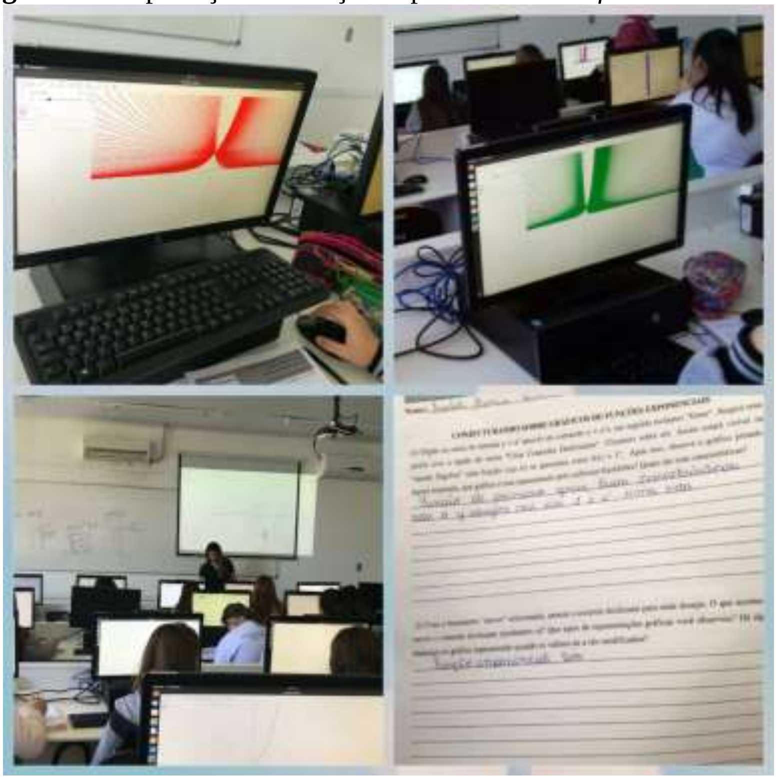
- ✓ *É formada uma curva conforme é mexido no botão, função exponencial (ESTUDANTE 3).*
- ✓ *Função exponencial. Sim, quando a > 1 a função é crescente, quando a for [estiver] entre 0 e 1 vai ser uma reta e quando a<1 a função é decrescente. Sendo que a não pode ser <0 (ESTUDANTE 13).*
- ✓ *O gráfico representado é uma função exponencial. Quando o controle deslizante é acionado o valor de a é modificado, sendo assim a representação gráfica é modificada. A tem que ser maior que zero. Quando a for maior que 1 a função será crescente, quando for entre 0 e 1 a função será decrescente. E quando a é igual a 1 a função será afim, ou seja, a representação gráfica será uma reta (ESTUDANTE 14).*
- ✓ *É uma curva que não encosta no eixo x, sempre vai passar pelo ponto (0,1) quando seus valores são positivos a curva vai seguir pelos valores negativos de x e subirá a partir da Coordenada (0,1), será diferente para diversos valores (ESTUDANTE 16).*
- ✓ *Observei uma curva, quanto maior o valor de a (acima de 1) a curva é crescente, quanto menor decrescente (entre 0 e 1) (ESTUDANTE 18).*

As conjecturas dos alunos a partir da manipulação no *software* apontam que as diferentes compreensões deles com base na visualização são variadas e bastante profundas. Conforme já explicitamos, o caráter inovador do *software* GeoGebra é essencial para que a atividade proposta cumpra com seu objetivo. Para além disso, conforme estabelecem Baldini e Cyrino (2012, p. CLXII-CLXIII) “[...] o computador ou a utilização do GeoGebra por si só, não garante o sucesso dos processos de ensino e da aprendizagem”. Em complemento, concordamos com Borba *et al* (2014, p.48) os quais destacam que:

> Além das potencialidades oferecidas, existem outros aspectos fundamentais a serem considerados com relação ao uso educacional de uma tecnologia como, por exemplo, o papel do professor, o *design* ou natureza da atividade proposta, dentre outros. A organização do cenário (imaginado) condiciona a natureza das interações, os diferentes tipos de negociações de significados e os conhecimentos produzidos no ambiente de aprendizagem construído.

Assim, com o *software* GeoGebra, os alunos puderam explorar tais funções a partir dos gráficos produzidos a partir da visualização e manipulação de pontos. As atividades propostas foram pensadas de maneira que os alunos pudessem levantar conjecturas, que envolvem a representação gráfica de uma função exponencial e a partir disto, compreender aspectos que as influenciam. A figura 5, apresentada na sequência, expõe os aspectos mencionados.

Figura 05: Exploração da Função exponencial no *Software* GeoGebra



Fonte: Andriceli Richit (2019)

Buscando compreensões dos alunos acerca do papel da base "a" na função exponencial do tipo $y = a^x$, a partir do item 4 do roteiro *"Novamente clique com o botão direito do mouse sobre o "controle deslizante" e marque a caixa "Animar". A partir de então, a base "a" será alterada automaticamente enquanto seu gráfico se movimenta. Surgirá próximo a caixa de entrada uma nova ferramenta com a função de "pausar" animação. Basta clicar sobre ela para parar e iniciar. O que você observou ao animar o controle deslizante? Descreva.",* os alunos expuseram o seguinte:

- ✓ *A curva se movimenta, dependendo do número do controle deslizante forma-se curva crescente, decrescente ou uma reta (ESTUDANTE 2).*
- ✓ *Observe que a linha nunca toca o eixo x pois nenhuma potenciação terá como resultado 0 (ESTUDANTE 4).*
- ✓ *Ele se comporta não encostando no eixo x e encostando apenas num ponto do eixo y (ESTUDANTE 19).*
- ✓ *Conforme os valores aumentam na animação onde se observa valores positivos, onde decresce e cresce onde de 0 à 1 é decrescente e maior que 1 é crescente (ESTUDANTE 21).*
- ✓ *A linha foi se modificando mas o eixo y que é igual 1 permanece o mesmo ao longo das diferentes curvas (ESTUDANTE 23).*
- ✓ *É possível visualizar a extremidade positiva. No 1º e 2º quadrante, indo em direção ao infinito. Nunca encostando no eixo x e y. *O valor nunca poderá ser negativo (ESTUDANTE 24).*

As respostas dos alunos evidenciam o caráter inovador do *software* nas conjecturas por eles levantadas. A seu modo, e a sua forma de explicar, os alunos apontaram características que são intrínsecas à função exponencial, as quais mostram as potencialidades das tecnologias digitais no estudo da referida função, onde os alunos, a partir da atividade investigativa, construíram compreensões acerca da função em estudo. O estudante 23, por exemplo, aponta que para todos os valores para a base "a" experimentados, a função exponencial interceptou o eixo y em (0,1), o que constitui uma característica da função exponencial. Analogamente, o estudante 21 conjecturou uma importante propriedade das bases da função exponencial, as quais assumem valores entre 0 e 1, isto é, $0 < a < 1$ ou valores maiores que 1, qual seja, $a > 1$. Além disso, os alunos observaram que para $a = 1$ a função representada era uma reta constante em $y = 1$, o que não constitui gráfico de função exponencial. Evidenciamos que a exploração da função com várias possibilidades de valores para a base "a" possibilitou aos alunos estabelecer condições de existência para a função exponencial, o que seria impossível em um ambiente estático ou no qual o docente apenas apresentasse as definições e propriedades da função, exemplos e após siga o modelo. Por fim, a experimentação no *software* permitiu que os alunos pudessem compreender o porquê das condições para a base "a" ($0 < a < 1$ ou $a >1$) em termos de definição de função exponencial. As variações que são possíveis de serem produzidas com o *software*, de forma simultânea, permitem a construção mais integral e profunda do conhecimento matemático, o que seria praticamente impossível em um ambiente de quadro negro e giz.

Em um último momento da exploração da função exponencial, foi proposto aos alunos o seguinte: *"5. Pause a animação e arraste o controle deslizante até uma das extremidades. Clique com o botão direito sobre a lei da função expressa na "Janela Álgebra" e selecione "Habilitar Rastro" (o procedimento é o mesmo para desabilitar). Agora reative a animação para observar o comportamento gráfico da função. Há alguma correspondência entre certos valores da base "a" e sua representação gráfica? Identifique o que observou".*

As ponderações dos alunos acerca do exposto foram as seguintes:

- ✓ *Observa-se valores positivos quando a>1 e negativos quando a < 1*
  a>1 , crescente
  a<1, decrescente (ESTUDANTE 1).
- ✓ *Pude identificar que entre os valores 0 e 1 é decrescente e valores acima de 1 é crescente, porém, no y o valor de 1 se mantém (ESTUDANTE 17).*
- ✓ *Sim, valores maiores que 1, crescente, e valores menores que 1 será decrescente. Sim, há correspondências. Observei várias representações que modificaram-se conforme os valores para "a" (ESTUDANTE 21).*
- ✓ *Observa-se valores positivos onde 0 à 1 os valores são decrescentes e maior que 1 ela é crescente (ESTUDANTE 23).*

- ✓ *Decrescente e crescente de acordo com os valores vistos no gráfico em relação a "a".*
  - a>1
  - a<1
  - a =1 (ESTUDANTE 24)

As conclusões dos alunos evidenciam, portanto, o papel do *software* enquanto importante aliado na construção do conhecimento matemático constituindo-se um "interlocutor-de-matemática (PAPERT, 1988), oportunizando aos alunos autonomia para promover investigações matemáticas, expressar suas ideias e conclusões, propor e testar conjecturas, desenvolvendo novos conhecimentos (RICHIT, 2005) sobre função exponencial.

Borba *et al* (2014) destacam que as possibilidades que emergem da realização de atividades investigativas abrem caminhos para processos matemáticos, tais como a formulação e testagem de conjecturas, assim como possibilitam o refinamento de conjecturas iniciais e familiarização com notações, etc, o que é importante no processo de aprender Matemática.

Considerações Finais

A partir do desenvolvimento da abordagem investigativa sobre função quadrática e exponencial, baseada em materiais manipuláveis e tecnologias digitais, podemos inferir que a utilização desta perspectiva contribuiu para a aprendizagem dos estudantes, de modo a aprofundar os conceitos abordados, bem como promover a compreensão a partir de diferentes representações destes conceitos. Em específico, a análise qualitativa apontou contribuições das atividades investigativas em duas perspectivas: *desenvolvimento do pensamento matemático* em relação às propriedades e representações das funções quadrática e exponencial; *articulação de estratégias e recursos para a abordagem destes tópicos curriculares da matemática.*

Por meio da investigação matemática os alunos puderam desenvolver o trabalho em grupo e estabeleceram relação entre o número de discos e os movimentos a eles associados, como potências de base 2. Além disso, puderam aprofundar a compreensão de função exponencial e assim, formular conjecturas acerca das propriedades da potenciação e da representação gráfica da função exponencial. A partir do material manipulável (Torre de Hanoi), os alunos se engajaram na atividade, buscando cumprir com as regras do jogo da Torre de Hanoi e puderam associar a quantidade de discos e movimentos a uma função exponencial, o que conferiu uma aproximação com o tópico em estudo. A discussão coletiva sobre essa atividade oportunizou aos alunos consensuar a generalização de um modelo matemático para determinar o número de movimentos necessários para cumprir a meta do jogo em função do número de discos usados em cada partida.

Também, ao realizar as dobraduras como forma de representação concreta da parábola no âmbito do estudo de funções quadráticas, avançaram em termos de abordagens de conceitos, dado que em um sentido mais amplo, as parábolas fazem parte do estudo da Geometria Analítica e são geralmente abordadas na terceira série do ensino médio, no entanto os alunos ainda cursavam a primeira série do Ensino Médio. Os alunos tiveram a oportunidade de identificar alguns elementos da parábola e explorar as suas propriedades, a exemplo da relação entre o eixo de simetria e o vértice da parábola.

Com o *software GeoGebra*, os estudantes puderam ter uma melhor visualização da representação das funções quadráticas e exponenciais, ao explorá-las por meio dos gráficos gerados pelo *software*, desenvolvendo o pensamento matemático e senso crítico em relação aos conceitos abordados. Em complemento, a abordagem a partir das tecnologias digitais possibilitou a compreensão e aprofundamento de algumas propriedades, as quais são usualmente discutidas em sala de aula a partir de uma perspectiva algébrica.

Assim, a proposta de investigação apresentada, assinala que atividades investigativas baseadas em material manipulável e tecnologias digitais, apontam caminhos alternativos e significativos à abordagem de conceitos de função quadrática e exponencial, bem como se constituem em alicerces no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que promovem a abordagem articulada de múltiplos conceitos. O papel do professor em uma abordagem investigativa é primordial, quer seja no processo de elaboração das atividades, na escolha de recursos que melhor se ajustem ao escopo e objetivo da aula e à da abordagem dos conceitos de modo a promover a aprendizagem dos alunos.

Referências

BELINE, Willian. **Formação de professores de Matemática em Comunidades de Prática**: um estudo sobre identidades. 2012. 314f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Londrina. Londrina.

BALDINI, L.A.F; CYRINO, M.C.C.T. **Função seno:** uma experiência com o software GeoGebra na formação de professores de Matemática. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v.1. p. CL-CLXIV, 2012.

BARALDI, I. M. **Matemática na escola**: que ciência é essa? Bauru: EDUSC, 1999.

BRASIL. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Edital nº 06/2018 CAPES**. Programa de Residência Pedagógica. Editais e seleções. Disponível em: < https://www.capes.gov.br/images/stories/download/editais/01032018-Edital-6-2018-Residencia-pedagogica.pdf>. Acesso em: 22 set. 2020.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, New York: Springer, 2005

BORBA, M. C; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIEGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. **As atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2002. p. 5 – 24.

GERVÁZIO, S. N. Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa. C.Q.D. – **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 9, 42 - 55, 2017.

KENSKI, V.M. Novas tecnologias: o redimensionamento do espaço e do tempo e os impactos no trabalho docente. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 08, maio/junho/julho/agosto, 1998. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/pdf/rbedu/n08/n08a06.pdf. Acesso em: 29 nov. 2020.

KENSKI, V. M. Processos de interação e comunicação mediados pelas tecnologias. In: ROSA, D., SOUZA, V. (Orgs.). **Didática e práticas de ensino**: interfaces com diferentes saberes e lugares formativos. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 2 ed. – Campinas. 2012

LOUZADA, S. **Relações entre Cônicas e Funções no Ensino Médio**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=40882>. Acesso em: 31 out. 2020.

MINAYO, M. C. S. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In: ______. (Org.) **Pesquisa Social**: Teoria, Método, e Criatividade. Petrópolis: Vozes, 2004. pp. 9-29.

MORTIMER, E.F.; SCOTT, P. Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. **Investigações em Ensino de Ciências**. Porto Alegre, v.7, p.283-306, 2002.

PAPERT, S. Logo: **computadores e educação**. São Paulo: Brasiliense, 1988.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H**. Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3 ed. ver. ampl., Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

REZENDE, W.M.;PESCO, D.U.; BORTOLOSSI, H.J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v.1,p.74-89, 2012.

RICHIT, Adriana. **Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria Dinâmica**: repensando a formação inicial docente em Matemática. 2005. 215f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

RICHIT, Adriana; MALTEMPI, M.V. Desafios e Possibilidades do Trabalho com Projetos e com Tecnologias na Licenciatura em Matemática. **ZETETIKÉ**, Campinas, v.18, n.33, 2010.

SANTOS, L.A. (2015). **Utilização de Material Concreto no Ensino de Matemática**: uma experiência com o teodolito caseiro no ensino de trigonometria. (Dissertação de Mestrado em Matemática). Fundação Universidade Federal de Rondônia, Rondônia.

BELINE, Willian. **Formação de professores de Matemática em Comunidades de Prática**: um estudo sobre identidades. 2012. 314f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Londrina. Londrina.

SOUZA, D. S; **Tecnologias digitais na abordagem de função quadrática e exponencial**: perspectivas de ensino e aprendizagem no contexto de uma turma do primeiro ano de ensino médio. 2019. 168f. Relatório de Estágio Supervisionado (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal Catarinense, Concórdia, 2019.

SILVEIRA, D.S. **Professores dos anos iniciais**: experiências com o material concreto para o ensino de Matemática. 2012. 109 f. Mestrado (Educação em Ciências – Química da Vida e Saúde) – Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2012.

Recebido em: 13 de janeiro de 2020
Aprovado em: 31 de março de 2021