revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA ANÁLISE ÊMICA, ÉTICA E DIALÓGICA DE ETNOMODELOS PARA A DETERMINAÇÃO DE VALORES DO SENO

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.21.138-159

Davidson Paulo Azevedo Oliveira[1]
Milton Rosa[2]
Daniel Clark Orey[3]

Resumo: A Trigonometria era inicialmente uma parte da Astronomia e uma de suas contribuições foi o etnomodelo criado pelo indiano *Bháskara I*. Assim, o objetivo deste artigo é apresentar e analisar o etnomodelo de *Bháskara I* para o cálculo do seno do ponto de vista da Etnomodelagem tendo em vista a sua análise êmica, ética e dialógica. Para isso realizou-se uma pesquisa historiográfica e uma análise ética baseada em uma demonstração com o rigor atual da fórmula e com a utilização de ferramentas tecnológicas. A análise dialógica desse conhecimento possibilitou enfatizar a importância dos aspectos culturais da Matemática no desenvolvimento do *saber/fazer* no decorrer da história e a sua conexão com o conhecimento acadêmico por meio da etnomodelagem.
Palavras-chave: Etnomodelos Dialógicos. Etnomodelos Êmicos. Etnomodelos Éticos. Etnomodelagem. História da Matemática.

AN EMIC, ETIC, AND DIALOGICAL ANALYSIS OF ETHNOMODELS FOR THE DETERMINATION OF SINE VALUES

Abstract: Trigonometry was initially a part of Astronomy and one of its contributions was the ethnomodel created by the Indian *Bháskara I*. Thus, the purpose of this article is to present and analyze the ethnomodel of *Bháskara I* for calculating the sine from the point of view of Ethnomodelling in view of emic, etic, and dialogic analysis. For this, a historiographical research and an etic analysis was conducted based on a demonstration with the rigor of current formula and with the use of technological tools. The dialogical analysis of this knowledge allowed to emphasize the importance of the cultural aspects of mathematics in the development of *knowing/doing* throughout history and its connection to academic knowledge through ethnomodelling.
Keywords: Dialogical Ethnomodels, Emic Ethnomodels. Etic Ethnomodels. Ethnomodelling. History of Mathematics.

Considerações Iniciais

Durante o decorrer da história da humanidade, a trigonometria foi desenvolvida na Índia pelo mesmo motivo que foi originada em outras partes do mundo antigo, ou seja, para resolver os problemas relacionados com a astronomia. Assim, a trigonometria oferece um exemplo notável de transmissão do *saber/fazer* científico no decorrer da história da humanidade. Desse modo, esse campo do conhecimento matemático pode ter se originado na Antiguidade.

[1]Doutor em Educação Matemática. Instituto Federal de Ouro Preto. E-mail: davidson@cefetmg.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2794-8515.
[2]Doutor em Educação - Liderança Educacional. Universidade Federal de Ouro Preto. E-mail: milton.rosa@ufop.edu.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5190-3862.
[3]Doutor em Educação - Currículo e Instrução. Universidade Federal de Ouro Preto. E-mail: oreydc@ufop.edu.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8567-034X.

Por exemplo, de acordo com Berggren (2007), na antiguidade, a trigonometria era considerada como uma parte da Astronomia. Contudo, Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274), um matemático, filósofo e cientista persa, escreveu, em aproximadamente 1250, o tratado intitulado: *Treatise on the Complete Quadrilateral* (*Shakl al-Qatta'*), que foi o primeiro documento que descreveu os conteúdos trigonométricos de modo independente da astronomia.

No entanto, esse tratado não era composto somente por trabalhos inéditos, pois Nasir al-Tusi reuniu o conhecimento trigonométrico de tratados anteriores, sintetizando-os em um único livro escrito, primeiramente, em Persa que, posteriormente, foi traduzido para o árabe. De acordo com Bosworth e Asimov (2003), foi por meio das obras escritas por al-Tusi que a trigonometria alcançou o *status* de um ramo independente da matemática pura, distinto da astronomia, à qual esteve vinculada por muitos séculos.

Historicamente, para Yano (2014), a trigonometria pode ter se originado na Grécia, sendo que os seus pressupostos foram transmitidos para a Índia e, com várias modificações, foram introduzidos no mundo islâmico. Após séculos de desenvolvimento, a trigonometria adentra a Europa medieval.A palavra grega *εὐθεῖα* para *corda* significa uma linha reta que está *subtendida*[4] a um arco.

Esse termo foi traduzido para o sânscrito como jīva ou jyā, que significada *corda de um arco* por sua semelhança com essa aparência. Contudo, o termo original foi traduzido para o árabe como *jyb*, que foi vocalizado como *jayb* que, em árabe, significa *dobra*. Posteriomente, esse termos foram traduzidos para o latim como *sinus*, cujos termos equivalentes em inglês é *sine* e em português é *seno* (YANO, 2014).

É importante ressaltar que, para Gupta (1967), os indianos foram os primeiros povos a utilizarem a função seno representada pela metade da corda de qualquer arco de um círculo. Hiparco, considerado como o *Pai da Trigonometria*, lidou apenas com cordas e não com metade de cordas como foi feito pelos indianos. Ptolomeu resumiu todas as importantes características da Trigonometria Grega em seu famoso trabalho: *O Almagesto*, que também utilizou apenas cordas.

E uma das grandes contribuições à Trigonometria está um modelo do indiano Bhaskara I para a determinação do seno de um arco que era apresentado em palavras. Esse modelo era válido para arcos de 0 a 180 graus e será analisado a partir de análises êmica e

[4]Subtender se refere ao ato de estender por baixo de, como, por exemplo, na geometria indica o ato de formar uma corda pela união das extremidades de um arco.

ética além do contexto cultural e a importância da Trigonometria na Índia. A análise ética é baseada nos trabalhos de Gupta (1967) que apresentou cinco demonstrações com o rigor atual para o modelo sendo que uma delas é apresentada em detalhes neste trabalho que também utiliza recursos computacionais para a análise ética do que realizou o indiano Bhaskara I.

Desse modo, o principal objetivo desse artigo teórico é apresentar esse modelo para o cálculo dos senos de *Bháskara I* e analisá-lo do ponto de vista da Etnomodelagem e suas premissas ética, êmica e dialógica.

Etnomodelagem e os etnomodelos êmicos e éticos

Historicamente, o conhecimento matemático local foi desenvolvido em várias regiões do mundo pelos membros de grupos culturais distintos por meio de um conjunto de características relacionadas com as ideias, os procedimentos e as práticas matemáticas que são distintas daquelas frequentemente estudadas na academia. Esse conjunto de características pode ser traduzido entre sistemas de conhecimentos matemáticos distintos pelo processo da Etnomodelagem (ROSA; OREY, 2012).

Desse modo, a tradução de práticas matemáticas locais possibilita que os membros de grupos culturais distintos valorizem a transculturalidade presente nesse processo, pois quando os espaços social, político e físico possibilitam a expansão do conhecimento desenvolvido por seus membros; os regionalismos e o determinismo da herança social são rompidos porque ultrapassam as fronteiras culturais (ROSA; OREY, 2017).

Por conseguinte, em concordância com Nicolescu (1999), a transculturalidade assegura a tradução do conhecimento adquirido pelos membros de grupos culturais distintos para os membros de outros grupos por meio da interação dialógica, impedindo a homogeneização do conhecimento adquirido de geração em geração.

Contudo, a compreensão dos pesquisadores e educadores (éticos) sobre os atributos culturais pode ser considerada como uma interpretação que somente enfatiza as características supérfluas do conhecimento matemático produzido pelos membros de grupos culturais distintos (êmicos), colocando em risco o entendimento e a interpretação das ideias, procedimentos e práticas matemáticas que são localmente desenvolvidas e difundidas entre as gerações.

Nesse direcionamento, os membros de grupos culturais distintos compartilham a própria interpretação de sua cultura (abordagem êmica) contrapondo com a interpretação propiciada pelos pesquisadores e educadores (abordagem ética) que podem ser alheias às essas manifestações culturais.

A abordagem ética se relaciona com o ponto de vista dos pesquisadores e educadores em relação às crenças, aos costumes e aos conhecimentos matemático desenvolvido pelos membros de um determinado grupo cultural. Esses observadores externos (éticos, outsiders) possuem um ponto de vista culturalmente universal ou global (SUE; SUE, 2003).

Por outro lado, a abordagem êmica se relaciona com o ponto de vista dos membros de grupos culturais distintos em relação aos seus próprios costumes e crenças e também ao desenvolvimento de seu conhecimento matemático. Os membros desses grupos (locais, insiders) possuem um ponto de vista considerado culturalmente específico ou local (SUE; SUE, 2003).

Conforme Harris (1980), a abordagem ética pode ser equiparada com a explicação objetiva de um fenômeno sociocultural a partir do ponto de vista externo enquanto que a abordagem êmica é identificada com a compreensão da experiência subjetiva adquirida pelos membros de um determinado grupo cultural.

Nessa perspectiva, a abordagem ética pode ser considerada como a visão externa dos observadores, que estão olhando de fora, em uma postura transcultural, comparativa e descritiva enquanto que a abordagem êmica pode ser considerada como a visão interna dos observados, que estão olhando de dentro, em uma postura cultural própria, particular e prescritiva (ROSA; OREY, 2017).

Nesse contexto, os etnomodelos são representações externas precisas e consistentes com o conhecimento científico que é socialmente construído e compartilhado pelos membros de grupos culturais distintos. Nessa perspectiva, o objetivo primordial para a elaboração de etnomodelos é a tradução dos procedimentos envolvidos nas práticas matemáticas presentes nos sistemas retirados da realidade, que são sistemas simbólicos organizados pela lógica interna dos membros desses grupos culturais (ROSA; OREY, 2012).

Nesse contexto, Rosa e Orey (2017) afirmam que os etnomodelos éticos referem-se à representação das características do conhecimento matemático de uma determinada cultura a partir das categorias daqueles que a observa como os pesquisadores e os educadores. Por outro lado, os etnomodelos êmicos buscam representar as características matemáticas dessa cultura com base nos referenciais e categorias desenvolvidas pelos seus membros.

Assim, as investigações em etnomodelagem estão relacionadas com a compreensão dos procedimentos e práticas matemáticas desenvolvidas pelos membros dos grupos culturais distintos, como, por exemplo, os indianos, que visam organizar essas práticas matemáticas para resolver as situações-problema e os fenômenos que enfrentam em seu cotidiano.

Desenvolvimento do conhecimento matemático êmico no subcontinente indiano

Em seus estágios iniciais, a Matemática se desenvolveu com o desenvolvimento de duas tradições matemáticas relevantes: a) a geométrica e b) a aritmética e a algébrica. Contudo, considerando as antigas civilizações, é no subcontinente indiano que emerge uma ênfase nessas duas tradições matemática. Posteriormente, a tradição matemática indiana também se direcionou para o desenvolvimento da trigonometria (DUTTA, 2002).

Consequentemente, uma parte relevante da evolução da trigonometria na Índia está relacionada com a utilização da fórmula desenvolvida por *Bháskara I*[5] para a construção de uma tabela de senos. Além disso, os antigos livros indianos onde eram encontradas as fórmulas matemáticas nem sempre tinham foco na Matemática, pois, muitas vezes, estavam relacionados com a astronomia ou a religião. No entanto, a Matemática estava presente no cotidiano dos indianos, inclusive em rituais religiosos (PLOFKER, 2007).

De acordo com Dutta (2002), os indianos originaram um conhecimento matemático sofisticado que estava relacionado com os rituais védicos. Então, historicamente, a era *védica*[6] foi um período fecundo no desenvolvimento da Matemática indiana. Esse período foi desencadeado entre a civilização que emergiu no Vale do Rio Indo, de 2500 a.C.-1700 a.C.

Em seguida, uma segunda civilização surgiu quando os povos indo-arianos migraram para o noroeste da Índia e habitaram o vale norte do Rio Indo, de 1800 a.C.-500 a.C., sendo que foram os fundadores da religião védica. As suas obras são as primeiras evidências literárias que mostram o desenvolvimento da cultura indiana, incluindo o conhecimento matemático (DATTA, 2003).

De acordo com Shastri, Hankey, Sharma e Patra (2017), o termo védico está relacionado com a sabedoria, o conhecimento ou a visão, sendo que funciona como uma manifestação do idioma dos deuses na fala humana. As leis dos *Vedas* determinaram os costumes sociais, legislativos, domésticos e religiosos do povo indiano.

[5]*Bháskara* (600–680) é, frequentemente, chamado de *Bhaskara I* para evitar confusão com o matemático *Bháskara II* (1114-1185). *Bháskara I* foi um filósofo indiano que viveu no século VII, sendo que, aparentemente foi o primeiro matemático a escrever os números no sistema decimal de numeração indo-arábico, bem como indicou um círculo para identificar o número zero. Esse matemático também determinou, em 629, uma aproximação notável para a função seno em seu estudo denominado *Āryabhaṭīyabhāṣya* para o *Aryabhata*. Esse estudo, escrito em prosa e em sânscrito, é o trabalho mais antigo sobre a matemática e a astronomia de que se tem conhecimento (KELLER, 2006).
[6]O termo védico é utilizado como um adjetivo que está relacionado com os *Vedas* (GUPTA, 2015).

Esse termo também se relaciona com uma coleção de textos antigos, religiosos e sagrados, escritos em *sânscrito*[7], que estão agrupados em um conjunto de 4 (quatro) coleções conhecidas como: *Vedas* (SHASTRI *et al*., 2017):

a) *Rigveda* (1000 a.C.), que contém 1028 hinos e orações para serem recitados durante a realização de rituais e sacrifícios. Esse hinos e orações estão organizadas em 10 livros. É conhecido como o *Livro dos Hinos.*

b) *Samaveda* (800 a.C.), que contém mantras védicos para serem cantados. É uma coleção litúrgica de melodias para serem cantadas em ocasiões adequadas. É conhecido como o *Livro das Canções*.

c) *Yajurveda* (700 a. C.), que contém as obras relacionadas com os rituais e sacrifícios. É uma coleção litúrgica que atende às exigências de um rito cerimonial composta por manuais práticos para os sacerdotes que conduziam os sacrifícios. À medida que as comunidades *Brahmana* se dispersaram, gradualmente, da região norte para as regiões leste e sul da Índia, surgiu a necessidade do registro de procedimentos relacionados com os rituais para que os sacerdotes pudessem uma classe de sacerdotes viajantes, e um meio de alocar tarefas especiais entre os diferentes sacerdotes. É conhecido como o *Livro dos Rituais*.

d) *Atharvaveda* (600 a.C.-500 a.C.*)*, que contém fórmulas mágicas. O termo *Atharva* significa: *Sacerdote do Fogo*. Esse livro também contém um conjunto de feitiços e encantos que eram predominantes no conhecimento popular da época em que foi escrito, sendo que retrata uma imagem ampla e holística da sociedade védica por meio de seu significado histórico e sociológico.

Assim, os textos dos *Vedas* estão relacionados com as coleções líricas dos hinos, os mantras, os rituais, os encantamentos, os sacrifícios religiosos, as orações, os feitiços e as maldições. Contudo, qual seria a relação desses textos com a antiga matemática indiana?

Por exemplo, esses textos revelam a existência de um sistema decimal regularizado de números escritos por extenso, potências de dez, incluindo números combinados envolvendo dezenas e unidades já eram usados pelos indianos. Nessa época, ocorreu, também, a utilização de números extensos muito grandes, maiores que potências de dez, podendo indicar até um trilhão (PLOFKER, 2009). Nesse sentido, Shastri *et al*. (2017) afirmam que há registros de

[7] O *sânscrito* é uma língua ancestral falada no Nepal e na Índia. Embora seja uma língua morta, o sânscrito compõe um conjunto das 23 línguas oficiais da Índia porque tem uma importante utilização litúrgica no hinduísmo, no budismo e no jainismo (BURROW, 2001).

atividades matemáticas encontradas em textos védicos, que estão associadas às práticas dos rituais.

Em concordância com esse contexto, Joseph (1991) afirma que, uma fonte importante de conhecimento matemático é fornecida pelos apêndices do texto principal do *Vedas*, que são conhecidos como *Vedangas*. Esses apêndices foram classificados em seis ramos do conhecimento:

1) Fonética, que é a ciência da articulação e pronúncia.
2) Gramática.
3) Etimologia.
4) Metronomia, que é a arte da prosódia.
5) Astronomia.
6) Regras para rituais e cerimoniais denominadas de *kalpa*[8].

Assim, para Joseph (1991), nos últimos dois *Vedangas* são encontradas as fontes matemáticas mais importantes do período védico. As evidências desse conhecimento, geralmente, são encontradas na forma de *sutras*[9], que é uma maneira de escrita peculiar e breve que, frequentemente, utiliza um estilo poético para capturar a essência de um argumento ou de um resultado.

Essa abordagem possibilitou que, ao se evitar a utilização de verbos e substantivos compostos para a escrita dos *sutras*, um vasto corpo de conhecimento fosse compreendido e difundido de geração em geração, propiciando a sua aprendizagem. A condensação da escrita em sutras também foi uma maneira para suprir a escassez de materiais que possibilitavam a escrita. Então, esse foi o modo que os *Brahmanas* encontraram para preservar esses conhecimentos (JOSEPH, 1991).

Por conseguinte, os *kalpasutras*[10] podem ser considerados como uma fonte relevante de conhecimento matemático védico. Essa literatura ritual incluía *shrautasutras* que forneciam instruções para a construção de fogueiras sacrificiais em diferentes épocas do ano,

[8]Kalpa é um termo sânscrito कल्प que significa adequado ou apropriado, sendo uma das seis disciplinas do Vedanga. Kalpa também pode ser considerado como uma ciência ou um campo de estudo auxiliar que está conectado com os Vedas, que se concentra nos procedimentos e cerimônias associadas à prática ritual védica (PLOFKER, 2009).
[9]Os sutras podem ser considerados como convenções escritas em que estão reunidas, sob a forma de breves aforismos, as regras do rito, da moral e da vida cotidiana (WILLIAMS, 2002).
[10]Os *kalpasutras* ou as regras de cerimônia são de dois tipos: 1) os *Shrautasutras* que ensinam sobre a performance dos grandes sacrifícios e 2) os *Smrtasutras* que são regras baseadas na tradição (WILLIAMS, 2002).

bem como orientava sobre a medição e a construção de altares sacrificiais que ficaram conhecidos como *sulbasutras*.

Originalmente, o termo *sulba* estava relacionado com as regras que governavam os *ritos de sacrifício*, embora, posteriormente, o significado do termo foi alterado para significar o cordão de corda utilizado na medição dos altares. A maioria do conhecimento da geometria védica conhecida atualmente é originária desses *sutras* (JOSEPH, 1991).

Para Plofker (2009), alguns dos textos de *Vedas* sobre as práticas cotidianas explicam como os diferentes tipos ou objetivos dos rituais estavam associados com os diversos tamanhos e formas dos altares de fogo, que deveriam ser construídos com tijolos cozidos de números e dimensões prescritas. Muitas formas de altares envolviam simetria de figuras simples, como, por exemplo, quadrados, retângulos, triângulos, trapézios, romboides e círculos. Para Gupta (2015), os *Vedas* também lidaram com conteúdos relacionados com a arquitetura, engenharia e conhecimentos matemáticos gerais.

É importante ressaltar que, frequentemente, uma forma geométrica era transformada em outra que era diferente do formato original, mas que mantinha o mesmo tamanho. Por isso, as regras do *sulbasultra*, muitas vezes, envolvem as transformações de figuras planas com a preservação da área e, assim, incluem as primeiras versões indianas de fórmulas geométricas e constantes (PLOFKER, 2009).

Uma análise êmica do desenvolvimento do conhecimento matemático indiano mostra que, conforme descrito por Joseph (1991), o conhecimento matemático indiano pode ter se originado a serviço da religião e da espiritualidade, pois os proponentes dessa visão buscaram suporte na complexidade as práticas religiosas encontradas no registro das *sulbasutras*.

Uma abordagem êmica para o desenvolvimento do seno por *Bháskara I*

O contexto sociocultural, histórico, religioso e espiritual possibilitou que as necessidades religiosas e espirituais determinassem as características sociais e políticas das instituições indianas, bem como o desenvolvimento de seu conhecimento matemático e científico. Por exemplo, a construção dos altares e a localização dos fogos sagrados tinham que obedecer às instruções estabelecidas sobre as suas formas geométricas e áreas para que fossem instrumentos de sacrifício eficazes.

Essa abordagem também possibilitou que a astronomia se desenvolvesse para auxiliar na determinação dos dias e das horas para a realização dos sacrifícios, possibilitando a propagação da trigonometria indiana, especialmente, com relação à utilização do seno

(JOSEPH, 1991).

Por conseguinte, para resolver os cálculos relacionados com a astronomia, os astrônomos indianos tiveram a necessidade de conhecer de um modo aprofundado a relação entre cordas e ângulos. Essa abordagem propiciou o surgimento das tabelas de cordas que relacionavam os ângulos com os seus respectivos valores. A primeira tabela de cordas, que se tem conhecimento, foi elaborada por Hiparco (190 a.C.-120 a.C.), de Niceia, um astrônomo, geógrafo e matemático grego, no século II a.C.

Posteriormente, Ptolomeu (90-168), um matemático, astrônomo, astrólogo e geógrafo grego, construiu no século II, uma tabela de cordas mais detalhada do que aquela elaborada por Hiparco. Durante séculos, a tabela elaborada por Ptolomeu foi uma referência para os cálculos realizados nas observações astronômicas (BERGGREN, 2007).

A trigonometria foi uma ferramenta essencial para o desenvolvimento da astronomia na Índia. Por exemplo, os textos astronômicos escritos em sânscrito descrevem uma tabela com valores relacionados com o seno. Por outro lado, trigonometria foi estudada apenas como parte da astronomia e nunca foi uma disciplina independente da matemática (YANO, 2014).

Essa ruptura da trigonometria com a astronomia somente ocorreu no século XIII com os estudos realizados por al-Tusi. Uma das referências mais antigas à trigonometria na Índia foi identificada no texto *Suryasidhanta* (Sistema do Sol), por meio do qual os indianos apresentaram uma perspectiva diferente para esse campo do conhecimento matemático, pois não utilizaram os mesmos procedimentos desenvolvidos por Ptolomeu (KARANEVICH, 2012).

Diferentemente dos procedimentos utilizados anteriormente para o cálculo dos valores do seno, *Bháskara I* apresentou, em um de seus trabalhos, conhecido como *Mahabhaskariya*, um método diferente para calcular o valor aproximado do seno de um arco, contudo, o procedimento pelo qual essa fórmula, que será descrito posteriormente, foi determinada não é demonstrado nesse documento, pois apenas o cita sem qualquer demonstração ou explicação (GOMES, 2011).

O trabalho desenvolvido por *Bháskara I* mostra um método diferenciado para computar o seno aproximado de qualquer arco, que é realizado por meio de uma fórmula algébrica simples (em linguagem corrente), mas elegante, na qual se pode calcular o valor do seno de qualquer ângulo entre 0º e 180º, e com um bom grau de precisão.

A regra que declara a expressão de aproximação para a função seno é dada por *Bháskara I* em seu primeiro trabalho chamado *Mahäbhäskarïya*. A figura 1 mostra uma regra para a aproximação do seno escrita em sânscrito.

Figura 1: Regra em Sânscrito sobre a aproximação do seno

मख्यादि रहितं कर्म वक्ष्यते तत्समासतः ।
चक्रार्धांशक समूहाद्विशोध्या ये भुजांशका ।। १७ ।।
तच्छेष गुणिता द्विष्ठाः शोध्याः खाभ्रेषुखाब्धितः ।
चतुर्थांशेन शेषस्य द्विष्ठमन्त्य फलं हतम् ।। १८ ।।
बाहु कोट्योः फलं कृत्सनं क्रमोत्क्रम गुणस्य वा ।
लभ्यते चन्द्रतीक्ष्णांश्वोस्ताराणां वापि तत्वतः ।। १९ ।।

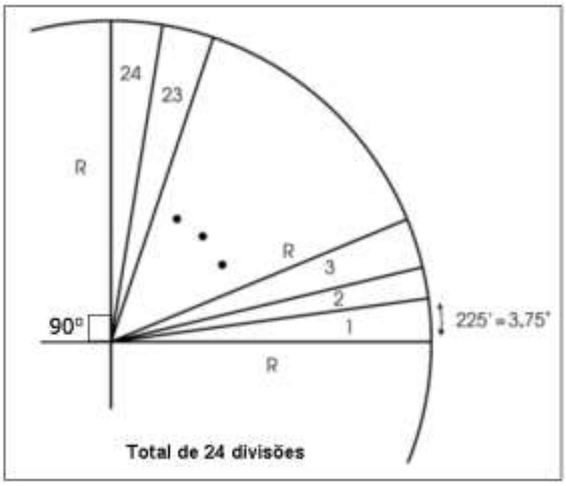
Fonte: Gupta (1967, p. 122)

Traduzindo livremente o texto da figura 1, escrito em sânscrito para a Língua Portuguesa tem-se que*:*

> Eu brevemente exprimo a regra, sem fazer uso das diferenças de “R x seno”. Subtrair os graus da **bhuja** dos graus de meio círculo (180 graus). Em seguida, multiplique o restante por graus da **bhuja** e colocar o resultado em dois lugares. Em um lugar subtrair o resultado de 40500. Por um quarto do restante, dividir o resultado em outro lugar como multiplicado pelo **antyaphala**. Assim, é obtido todo o **bahuphala** para o sol, a lua ou os planetas de estrelas. Assim também são obtidos direta e inversamente do “R x seno (GUPTA, 1967, p. 122, tradução e grifos dos autores).

Uma das primeiras melhorias dos matemáticos indianos na trigonometria estava relacionada com a construção de tabelas de meio-arcos ou senos. A construção dessas tabelas e do cálculo dos valores do seno para diferentes arcos em um quadrante de uma circunferência foi de grande importância para os astrônomos indianos, haja vista que esse procedimento era necessário para calcular com precisão as posições planetárias (BAG, 1968). A figura 2 mostra um quadrante de uma circunferência dividido em 24 arcos equivalentes.

Figura 2: Quadrante de uma circunferência dividido em 24 arcos equivalente.



Fonte: Adaptado de Karanevich (2012, p. 41).

Assim, para determinar os valores dessas tabelas, os indianos dividiram cada quadrante de uma circunferência de raio R em 24 arcos equivalentes (partes iguais), que aumentavam em incrementos de 225' ou 225 minutos (*liptãs*), que é equivalente a 3¾º (*kalãs*), sendo que 24×3¾º = 90º (KARANEVICH, 2012).

É importante ressaltar que o primeiro texto preservado que continha uma tabela com os valores de seno foi desenvolvido na Índia em 499. A figura 3 mostra os primeiros seis valores dessa tabela elaborada por *Aryabhata* (476-550), que foi um matemático e astrônomo indiano.

Figura 3: Primeiros seis valores da tabela de seno elaborada por *Aryabhata*

NÚMERO DO SENO	ÂNGULO (MINUTOS)	SENO (ÂNGULO)	DIFERENÇA DE SENO
1	225′	225′	225′
2	450′	449′	224′
3	675′	671′	222′
4	900′	890′	219′
5	1125′	1105′	215′
6	1350′	1315′	210′

Fonte: Adaptado de Karanevich (2012, p. 42)

De acordo com Karanevich (2012), Aryabhata também forneceu uma regra para calcular os valores do seno. A tradução dessas regras do sânscrito para o português é:

> Por qual número o segundo Seno [diferença] é menor do que o primeiro Seno da tabela, e pelo quociente obtido por meio da divisão da soma do Seno precedente [diferenças] pelo primeiro Seno e, pela soma dessas duas quantidades, o Seno seguinte [diferença] é menor do que o primeiro Seno[11] (p. 42, traduzido pelos autores).

Por exemplo, Karanevich (2012) afirma que, para calcular o valor do s*en675*’, consulte na tabela, o segundo seno da diferença que é *224’*, que está associado ao *sen450’*. O primeiro seno da tabela é o número 1, que está associado ao *sen225’*, cujo valor é sempre é igual a *225’*. Assim, o valor de *sen675’* é igual a soma do seno precedente com o seno da diferença, ou seja, *é sen675’ = 225’+224’ = 449’*.

Para a obtenção do valor do *sen675’*, deve-se subtrair o segundo seno da diferença cujo valor é *224’*, do primeiro seno cujo valor é *225’*, tendo *225’* - *224’ = 1’*. Em seguida,

[11]By what number the second Sine [difference] is less than the first Sine [Sine number 1 from above table], and by the quotient obtained by dividing the sum of the preceding Sine [differences] by the first Sine, by the sum of these two quantities the following Sine [difference] is less than the first Sine.

divida a soma do seno anterior das diferenças, *225'* + 224'pelo primeiro seno que é *225*', tendo que $\frac{225'+224'}{225'} = \frac{449'}{225'} = 1{,}996'$. Depois, deve-se somar os dois valores: *1'+1,996'* $\approx 3'$, que fornece o seno seguinte da diferença que é menor que o primeiro seno, que é *225'-3' = 222'*.

De acordo com Karanevich (2012), como o *sen(450')= 449'*, tem-se que: *sen675'=sen450'+222'=449'+222'=671'*. Nesse sentido, a regra de Aryabhata utiliza as diferenças cumulativas do seno para calcular os seus valores seguintes. Então, a partir de *sen225'= 225'*, é possível determinar os 24 valores da tabela do seno, pois cada valor subsequente depende das diferenças dos valores obtidos anteriormente.

No entanto, é importante destacar que essa regra possui algumas discrepâncias quando valores maiores para o seno são considerados. Assim, o valor do seno correspondente a 900'é igual à soma de 225' + 224' + 222' + 219' = 890'. Nesse contexto, Selin (2008) destaca que essa tabela do seno é um conjunto de vinte e quatro números dispostos em linhas e colunas que é utilizada para a obtenção do cálculo de meias-cordas dos arcos de arcos de uma determinada circunferência, que contém as primeiras diferenças dos valores de senos que são expressos em minutos de arco. Esse conjunto de valores é denominado de *Tabela de Senos-diferenças de Aryabhata*.

Ressalta-se que, esse procedimento retórico (êmico-local) que foi utilizado pelos indianos para que pudessem determinar os valores do seno para resolver problemas relacionados com a astronomia revela uma técnica simples e bem-sucedida com relação à sua capacidade de desenvolver um procedimento matemático que possibilitasse o cálculo de problemas astronômicos, como, por exemplo, a localização exata dos planetas.

Do ponto de vista da Etnomodelagem, a determinação dos valores do seno por meio de procedimentos matemáticos próprios mostra como os indianos geraram um conhecimento matemático sofisticado (êmico-local) que possibilitou o desenvolvimento de técnicas e estratégias utilizadas para a determinação dos valores do seno que são semelhantes aos valores empregados universalmente na atualidade.

Uma abordagem ética para o desenvolvimento do seno por *Bháskara I*

Do ponto de vista da abordagem ética pode-se analisar o etnomodelo ético apresentado por *Bháskara I* para o seno de um ângulo de acordo com algumas demonstrações, pois a sua aproximação algébrica é simples e surpreendentemente precisa. A precisão desse etnomodelo pode ser observada no quadro 1 que compara os valores do seno obtidos por *Bháskara I* e os valores atuais que foram obtidos com o auxílio de recursos tecnológicos, especialmente, pela planilha eletrônica do *Excel*.

Quadro 1: Comparação entre os valores da função seno atual com os obtidos por *Bháskara I*

Ângulo (em graus)	Seno Atual	Fórmula de Bháskara I	Ângulo (em graus)	Seno Atual	Fórmula de Bháskara I
5	0,0871557	0,088328076	95	0,996194698	0,99614495
10	0,1736482	0,175257732	100	0,984807753	0,984615385
15	0,258819	0,26035503	105	0,965925826	0,965517241
20	0,3420201	0,343163539	110	0,939692621	0,93902439
25	0,4226183	0,423208191	115	0,906307787	0,905374716
30	0,5	0,5	120	0,866025404	0,864864865
35	0,5735764	0,573041637	125	0,819152044	0,817843866
40	0,6427876	0,641833811	130	0,766044443	0,764705882
45	0,7071068	0,705882353	135	0,707106781	0,705882353
50	0,7660444	0,764705882	140	0,64278761	0,641833811
55	0,819152	0,817843866	145	0,573576436	0,573041637
60	0,8660254	0,864864865	150	0,5	0,5
65	0,9063078	0,905374716	155	0,422618262	0,423208191
70	0,9396926	0,93902439	160	0,342020143	0,343163539
75	0,9659258	0,965517241	165	0,258819045	0,26035503
80	0,9848078	0,984615385	170	0,173648178	0,175257732
85	0,9961947	0,99614495	175	0,087155743	0,088328076
90	1	1	180	0	0

Fonte**:** Oliveira, Leite e Lopes (2019)

A comparação entre os dois valores obtidos para o seno, que foi disponibilizada no quadro 1, mostra que a sua variação máxima é mínima, pois esse percentual de erro é inferior a 1%. A figura 4 mostra como a representação gráfica entre o seno atual e o seno determinado por *Bháskara I* são aproximadas.

Figura 4: Etnomodelo êmico utilizado para determinar os valores do seno

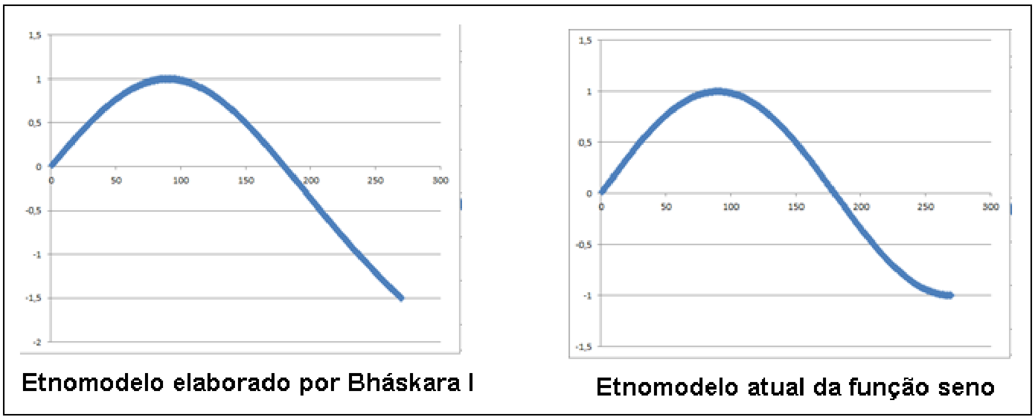
$$\boxed{sen\ \theta = \frac{4\theta \cdot (180-\theta)}{40500 - \theta \cdot (180-\theta)}}$$

Fonte: Gupta (1967)

Outro modo de realizar essa observação é transcrever o método de *Bháskara I* (figura 1) em símbolos algébricos atuais. Nesse caso, é importante observar que tem-se o fator $(180 - \theta)$ que, para valores maiores do que 180 graus, determinará um valor negativo para o seno, o que não era aceito pelos indianos. Assim, esse método para se calcular o valor de seno é válido, conforme o modelo atual, somente para ângulos de 0 a 180 graus como pode ser visto na figura 4 que mostra uma fórmula que representa o etnomodelo êmico de *Bháskara I*.

Nesse direcionamento, a figura 5 mostra os dois gráficos plotados no Excel para que se possa observar a similaridade entre as curvas do seno realizadas por meio da elaboração do etnomodelo de *Bháskara I* e da função seno atual.

Figura 5: Gráfico comparativo entre a função seno atual e a função seno de *Bháskara I*



Fonte**:** Oliveira, Leite e Lopes (2019)

É importante observar que essas curvas apresentam o mesmo formato, no entanto, conforme ressaltado anteriormente, é válida para os valores do ângulo localizados no primeiro e segundo quadrantes. Observando o gráfico, verifica-se que para o ângulo de 270º *Bháskara I* obteve o valor -1,5, sendo que o valor atual é -1.

O procedimento utilizado por *Bháskara I* para determinar o seno de um ângulo não é demonstrado em seu trabalho. No entanto, para Gomes (2011) e Gupta (1967), o fato de não conter a demonstração parece ser uma característica presente nas obras da época devido ao fato de os assuntos tratados não serem exclusivamente relacionados com a Matemática.

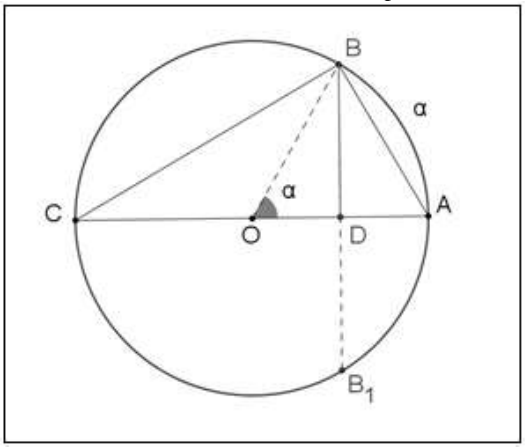
Nesse contexto, Rosa e Orey (2017) destacam que esses construtos éticos podem são descritos como as ideias, os procedimentos e as práticas matemáticas expressas em termos matemáticos das categorias que possuem significados e que são apropriadas pelos observadores externos, pois são relevantes para a valorização do patrimônio dos membros de grupos culturais distintos.

Uma análise ética da fórmula utilizada por *Bháskara I* por *Shukla* para determinar os valores do seno

Em seu estudo, Gupta (1967) apresenta cinco demonstrações por meio das quais pode-se utilizar a matemática acadêmica para a elaboração de um etnomodelo ético para o desenvolvimento da fórmula utilizada por *Bháskara I*. Contudo, a análise desse etnomodelo será realizada por meio da demonstração desenvolvida por *Shukla*, que representa uma abordagem ética desse conhecimento, haja vista que esta análise é exterior ao contexto cultural desse grupo.

Essa abordagem representa uma *visão matemática de fora* (*outside*) do contexto cultural, pois está de acordo com os pressupostos do conhecimento matemático estudado nas escolas e na academia. A figura 6 mostra uma representação desse etnomodelo ético com relação a um ângulo e ao seu respectivo arco.

Figura 6: Etnomodelo ético mostrando um ângulo e seu arco respectivo



Fonte**:** Produzido pelos autores

Conforme *Shukla*, toma-se CA como o diâmetro do círculo de raio R, no qual o arco AB é igual a α graus, e:

$$BD = R\, sin\, \alpha$$

Utilizando a área do triangulo ABC tem-se que:

$$Área = \frac{AB.BC}{2}$$

Considerando AC como base, tem-se que:

$$Área = \frac{AC.BD}{2}$$

Como as duas áreas são iguais, porém observadas sob outro olhar, pode-se relaciona-las:

$$\frac{AB.BC}{2} = \frac{AC.BD}{2}$$

$$AB.BC = AC.BD$$

$$\frac{AB.BC}{BD} = AC$$

$$\frac{1}{BD} = \frac{AC}{AB.BC}$$

Substituindo os valores das retas de AB e BC na igualdade obtida anteriormente pelos seus respectivos arcos, obtém-se a desigualdade a seguir

$$\frac{1}{BD} > \frac{AC}{(arc\ AB).(arc\ BC)}$$

Depois da última relação encontrada, *Shukla* assumiu que, para que novamente se torne uma igualdade, tem-se que multiplicar AC por um valor X e somá-lo a um valor Y, ambos ainda não definidos, tornando-se novamente igual a $\frac{1}{BD}$:

$$\frac{1}{BD} = \frac{X.AC}{(arc\ AB).(arc\ BC)} + Y$$

O arco AB na figura 12 é igual a α, o arco BC é igual a 180 – α, AC é igual a duas vezes o raio, e BD é igual ao senα, substituindo temos:

$$\frac{1}{sen\alpha} = \frac{2XR}{\alpha.(180-\alpha)} + Y$$

$$\frac{1}{sen\alpha} = \frac{2XR}{\alpha.(180-\alpha)} + \frac{Y}{1}$$

$$\frac{1}{sen\alpha} = \frac{2XR + Y[\alpha.(180-\alpha)]}{\alpha.(180-\alpha)}$$

$$Rsen\alpha = \frac{\alpha.(180-\alpha)]}{2XR + Y.\alpha(180-\alpha)}$$

Substituindo na última equação obtida anteriormente, quaisquer dois valores para α, como, por exemplo, 30º e 90º obtém-se duas equações para X e Y.

Para $\alpha = 30º$:

$$Rsen\alpha = \frac{\alpha.(180-\alpha)]}{2XR + Y.\alpha(180-\alpha)}$$

$$Rsen30 = \frac{30.(180-30)]}{2XR + Y.30(180-30)}$$

$$R\frac{1}{2} = \frac{4500}{2XR + 4500Y}$$

$$2XR^2 + 4500YR = 9000$$

Para $\alpha = 90º$:

$$Rsen\alpha = \frac{\alpha.(180-\alpha)]}{2XR + Y.\alpha(180-\alpha)}$$

$$Rsen90 = \frac{90.(180-90)]}{2XR + Y.90(180-90)}$$

$$R = \frac{8100}{2XR + 8100Y}$$

$$2XR^2 + 8100YR = 8100$$

Logo, tem-se um sistema:

$$\begin{cases} 2XR^2 = 9000 - 4500YR \\ 2XR^2 = 8100 - 8100YR \end{cases}$$

Igualando as duas partes do sistema, tem-se que:

$$9000 - 4500YR = 8100 - 8100YR$$

$$-8100YR + 4500YR = 9000 - 8100$$

$$-3600YR = 900Y = \frac{900}{-3600R}$$

$$Y = -\frac{1}{4R}$$

Agora, substituindo o valor de Y em qualquer uma das equações do sistema, obtemos:

$$2XR^2 = 8100 - 8100YR$$

$$2XR^2 = 8100 - 8100\left(-\frac{1}{4R}\right)R$$

$$2XR^2 = 8100 + \frac{8100}{4R}.R$$

$$2XR^2 = 8100 - 2025$$

$$2XR = \frac{10125}{R}.42X$$

$$R = \frac{40500}{4R}$$

Desse modo, obtém-se os valores correspondentes a 2XR e a Y. Substituindo esses valores na fórmula inicial tem-se, por fim, a demonstração do etnomodelo êmico elaborado por *Bháskara I*.

$$Rsen\alpha = \frac{\alpha.(180-\alpha)}{2XR + Y.\alpha(180-\alpha)}$$

$$Rsen\alpha = \frac{\alpha.(180-\alpha)}{\frac{40500}{4R} + \left(-\frac{1}{4R}\right).\alpha(180-\alpha)}$$

$$Rsen\alpha = \frac{\alpha.(180-\alpha)}{\frac{40500}{4R} - \frac{\alpha}{4R}.(180-\alpha)}$$

$$Rsen\alpha = \frac{\alpha.(180-\alpha)}{\frac{40500}{4R} - \frac{\alpha.(180-\alpha)}{4R}}$$

$$Rsen\alpha = \frac{\alpha.(180-\alpha)}{\frac{40500-\alpha.(180-\alpha)}{4R}}$$

$$Rsen\alpha = \alpha.(180-\alpha) \times \frac{4R}{40500-\alpha.(180-\alpha)}$$

$$Rsen\alpha = \frac{4R.\alpha.(180-\alpha)}{40500-\alpha.(180-\alpha)}$$

$$sen\alpha = \frac{4\alpha.(180-\alpha)}{40500-\alpha.(180-\alpha)}$$

Esse etnomodelo ético foi elaborado conforme a visão dos observadores externos em relação ao sistema retirado do cotidiano e da realidade local dos membros de grupos culturais distintos (indianos), cujas ideias, procedimentos, estratégias e práticas matemáticas foram modeladas, pois tinham como objetivo possibilitar uma compreensão holística do fenômeno relacionado com a determinação dos valores de seno na antiguidade do subcontinente indiano.

Um etnomodelo ético que melhor representa a situação-problema relacionado com a fórmula de Bháskara para a determinação da tabela de senos possibilita uma reflexão sobre a complexidade e o alto padrão do conhecimento matemático empregado na Índia no decorrer de sua história.

Contudo, a maneira como os indianos determinaram essa fórmula foi representada por esse etnomodelo ético, pois a sua aplicação mostra uma representação consistente da aproximação para valores de ângulos nos dois primeiros quadrantes da circunferência trigonométrica, que são semelhantes aos valores de seno utilizados na atualidade.

Uma abordagem dialógica para o desenvolvimento do seno por *Bháskara I*

Esse fenômeno pode ser modelado por meio da elaboração de um etnomodelo dialógico que tem como objetivo traduzir uma determinada prática matemática (método indiano para a determinação de valores do seno), que foi desenvolvida pelos membros desse grupo cultural (êmico-local) para que os observadores de fora dessa cultura (ético-global) possam observar, analisar e explicar os procedimentos matemáticos adotados nessa prática em termos dialógicos (ROSA; OREY, 2017).

Nesse *dinamismo cultural*[12], por meio do diálogo, Rosa e Orey (2017) ressaltam que a

[12]Para Rosa e Orey (2017), o *dinamismo cultural* pode ser considerado como a troca de *saberes* e *fazeres* entre sistemas de conhecimentos distintos, que tem como objetivo possibilitar que os membros de grupos culturais distintos explorem ou se adaptem ao mundo que os rodeia, sem perder, contudo, as próprias características.

abordagem êmica visa entender os procedimentos matemáticos internos à cultura enquanto a abordagem ética busca a compreensão matemática externa com relação às práticas desenvolvidas pelos membros desse grupo cultural distinto.

Nesse contexto, quando examinada no próprio contexto histórico, social e cultural em que foram originadas, essa prática matemática desenvolvida e utilizada pelos indianos não é trivial ou ocasional, pois reflete temas do cotidiano dos membros desse grupo cultural específico. Assim, a etnomodelagem propõe uma abordagem diferenciada em relação a evolução desse conhecimento matemático ao considerar as estratégias, as técnicas e os procedimentos desenvolvidos pelos indianos como um saber útil no contexto no qual essa prática foi originada (ROSA; OREY, 2012).

A abordagem dialógica da etnomodelagem se identifica com o pensamento contemporâneo, pois registra as ideias, os procedimentos e as práticas que constituem um sistema de pensamento matemático sofisticado que tem como objetivo o entendimento, a compreensão e o desenvolvimento das técnicas e das habilidades matemáticas que estão presentes no *fazer* matemático dos membros de grupos culturais distintos.

Assim, o entendimento do *como fazer* matemática e a compreensão do processo de matematização desenvolvido pelos membros desses grupos podem ser obtidos por meio das *ticas* da etnomodelagem, que são as maneiras, os modos, as técnicas, as estratégias e os procedimentos utilizados com o objetivo de explicar, conhecer, entender, compreender, lidar e conviver com a própria realidade por meio da tradução de situações-problemas (ROSA; OREY, 2017) enfrentadas no cotidiano por meio de práticas matemáticas contextualizadas.

Considerações Finais

A utilização do conhecimento matemático no subcontinente indiano remonta há mais de 3.000 anos. Esse conhecimento auxiliou no desenvolvimento da Matemática, sendo que prosperou durante séculos naquela região antes mesmo que avanços matemáticos semelhantes fossem percebidos na Europa.

Posteriormente, a influência do conhecimento matemático indiano se espalhou para a China e para o Oriente Médio por meio das descobertas realizadas pelos matemáticos indianos que propiciaram contribuições matemáticas seminais para o estudo da trigonometria, da álgebra, da aritmética e dos números negativos.

Assim, Dutta (2002) afirma que, além de desenvolver o conhecimento algébrico propriamente, os indianos também iniciaram um processo de algebrização, bem como a consequente simplificação de outras áreas da Matemática. Para exemplo, os indianos desenvolveram trigonometria de uma maneira sistemática, assemelhando-se ao seu formato atual, transmitindo para esse campo de estudo o seu caráter algébrico moderno (DUTTA, 2002).

De acordo com Dutta (2002), embora os gregos tenham propiciado um estudo mais sistematizado da trigonometria, o seu progresso foi interrompido devido à ausência de notações e manipulações algébricas adequadas para a sua evolução. Por conseguinte, os indianos também inventaram as funções seno e cosseno, descobriram a maior parte de suas fórmulas e identidades, bem como construíram tabelas precisas para os valores do seno de arcos até 180 graus.

Ao final do estudo relatado nesse artigo constatou-se que um marco de grande relevância para a trigonometria se refere ao etnomodelo proposto por *Bháskara I* para a tabela de senos, que foi apresentado há mais de 1300 anos, possibilitando a inferência de que o conhecimento matemático indiano era bem desenvolvido e complexo.

A complexidade com a qual os indianos desenvolveram a trigonometria pode ser interpretada dentro das premissas ética e êmica. Por exemplo, Gupta (1967) apresentou a preocupação de tradução da fórmula de *Bháskara I* para a linguagem matemática atual por meio de uma análise ética (acadêmica) do método por meio do qual *Bháskara I* desenvolve e calculou os valores do seno de diversos ângulos ao apresentar cinco demonstrações para a sua determinação.

No entanto, a análise êmica (local) de uma fórmula ou raciocínio matemático histórico possibilita uma compreensão do desenvolvimento do conhecimento matemático de uma determinada civilização de um modo holístico e com profundidade. Essa abordagem permitiu ressaltar a importância dos aspectos culturais da Matemática, nesse caso, dos indianos, para observar as influências do contexto social e religioso que se refletem no desenvolvimento desse *saber/fazer* no decorrer da história.

Finalizando, é importante ressaltar que uma das possíveis contribuições da Etnomodelagem para a Educação Matemática está relacionada com a compreensão da determinação dos valores do seno por meio de procedimentos matemáticos próprios dos membros de um determinado grupo cultural ao mostrar como os indianos geraram um conhecimento matemático sofisticado (êmico-local) que possibilitou o desenvolvimento de técnicas e estratégias utilizadas para a determinação dos valores do seno que são semelhantes àqueles empregados universalmente (ético-global) na atualidade.

Nesse sentido, a situação-problema relacionada com a determinação de valores do seno pode ser considerada como um sistema que é composto por procedimentos matemáticos, que estão enraizados na cultura indiana e que, por meio da utilização das técnicas da Etnomodelagem, foi traduzida da linguagem êmica para a Matemática acadêmica (ética).

Assim, outra contribuição dessa abordagem importante está relacionada com a tradução dialógica desse conhecimento por meio da Etnomodelagem, que buscou mostrar o domínio cultural da matemática desenvolvida pelos indianos por meio da conexão desse campo do conhecimento com os fatos e as necessidades históricas que originaram essas práticas em seu próprio contexto cultural.

Referências

BAG, A. K. **Sine table in ancient India**. Proceedings of the Indian National Science Academy, v. 4, n. 1-2. p. 79-85, 1968.

BERGGREN, J. L. **Mathematics in Medieval Islam.** In. KATZ, V. (Ed.). The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook. Princeton, NJ: Princeton University, 2007. pp. 515-675.

BOSWORTH, C. E.; ASIMOV, M. S. **History of civilizations of central Asia**. Volume 4. New Delhi, India: Motilal Banarsidass, 2003.

BURROW, T. **The Sanskrit language**. Language and linguística series. New Delhi, India: Motilal Banarsidass Publishing House, 2001.

DATTA, B. **Ancient Hindu geometry**: the science of the Sulba. Malviya Nagar, Jaipur, India: Cosmo Publications; 2003.

DUTTA, A. K. Mathematics in Ancient India. **Resonance**, p. 4-19, 2002.

GOMES, S. C. **Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino da trigonometria numa abordagem histórica**. Dissertação de Mestrado Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Natal, RN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2011.

GUPTA, R. C. Bhaskara I’s approximation to sine. **Indian Journal of History of Science**, v. 2, n. 2. p. 121-136. 1967.

GUPTA, V. K. Vedic mathematics and the mathematics of vedic period: an analysis and application. **Veda-Vidyā**, v. 26. p. 193-208, 2015.

HARRIS, M. **The epistemology of cultural materialism**. New York, NY: Random House, 1980.

JOSEPH, G. G. **The crest of the peacock:** non-European roots of mathematics**.** New Jersey, NJ: Princeton University Press, 1991.

KARANEVICH, *A.* Trigonometry development in ancient and medieval India. **Lucerna**, v. 7, n. 1, p. 39-50, 2012.

KELLER, A. **Expounding the mathematical seed**. Volume 1. The translation: a translation of Bhaskara I on the mathematical chapter of the Aryabhatiya. Basel, Switzerland*: Birkhäuser* Verlag, 2006.

NICOLESCU, B. **O manifesto da transdisciplinaridade**. Tradução de Lúcia Pereira de Souza. São Paulo, SP: Trion, 1999.

OLIVEIRA, D.P.A., LEITE, D.G. LOPES, M.M. Escola Indiana de Matemática e Astronomia: contribuições para uma discussão historiográfica crítica. In: DIAS, J. M. H. POZZER, A. CECCHETTI. E. (Org.). **Migración, Interculturalidad y Educación:** impactos y desafios. Volume 1. Primeira Edição. Chapecó, SC: Argos Editora da Unochapecó, 2019. pp. 575-592.

PLOFKER, K. Mathematics in India. In. KATZ, V. (Ed.). **The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam**. A Sourcebook. Princeton, NJ: Princeton University, 2007. pp. 385-514.

PLOFKER, K. **Mathematics in India.** Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009.

ROSA, M.; OREY, D. C. O campo de pesquisa em etnomodelagem: as abordagens êmica, ética e dialética. **Educação e Pesquisa**, v. 38. n. 4. p. 865-879, 2012.

ROSA, M.; OREY, D. C. **Etnomodelagem**: a arte de traduzir práticas matemáticas locais. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2017.

SELIN, H. **Encyclopaedia of the history of science, technology, and medicine in non-western cultures**. Berlin, Germany: Springer, 2008.

SHASTRI, V. V., HANKEY, A., SHARMA, B., PATRA, S. Impact of pranayama and vedic mathematics on math anxiety and cognitive skills. **Yoga Mimamsa**, v. 49. n. 2, p. 53-62, 2017.

SUE, D. W.; SUE, D. **Counseling the culturally diverse**: theory and practice. New York, NY: Wiley, 2003.

YANO, M. Trigonometry in Indian mathematics. In: SELIN, H. (Ed.). **Encyclopaedia of the history of science, technology, and medicine in non-western cultures**. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2014. pp. 1-7.

WILLIAMS, M., **Sanskrit English dictionary**. Verbete: sutra. Oxford, England: Oxford University Press, 2002.

Recebido em: 20 de agosto de 2020
Aprovado em: 10 de outubro de 2020