revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS: UMA ABORDAGEM HEURÍSTICA NO ENSINO SUPERIOR

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.21.313-350

José Carlos Thompson da Silva[1]
Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner[2]

Resumo: Este artigo apresenta uma discussão teórica sobre resolução de problemas combinatórios, ao buscar responder à seguinte questão: Que estratégias heurísticas podem ser discutidas com estudantes universitários, ao resolver problemas combinatórios? O texto traz argumentos teóricos e ideias para explorar combinatória no ensino superior com base em estudos documentais de livros e investigações de natureza qualitativa. Aqui, argumenta-se que é necessário explorar abordagens de ensino de problemas combinatórios na graduação que possibilitem que universitários desenvolvam e sistematizem estratégias de resolução de problemas e identifiquem conexões matemáticas e/ou com outras áreas de conhecimento. O artigo finaliza com argumentos acerca da necessidade de provocar construções e evocações do pensamento combinatório instrumental e relacional de universitários.
Palavras-chave: Matemática. Combinatória. Matemática discreta. Ensino superior. Resolução de problemas.

COMBINATORY PROBLEM SOLVING: A HEURISTIC APPROACH IN HIGHER EDUCATION

Abstract: This article presents a theoretical discussion focused on solving combinatorial problems by seeking to answer the following question: What heuristic strategies can be discussed with undergraduate students when solving combinatorial problems? The text brings theoretical arguments and ideas to explore combinatorics in undergraduate education from documentary studies of textbooks and qualitative investigations. Here, it is argued that it is necessary to explore approaches to teaching combinatorial problems in undergraduate courses to allow undergraduate students to develop and systematize problem-solving strategies, and identify mathematical connections and/or with other knowledge areas. The article ends with arguments about the need to provoke constructions and evocations of the instrumental and relational combinatorial thinking of undergraduate students.
Keywords: Mathematics. Combinatory. Discrete Mathematics. Undergraduate education. Problem Solving.

Introdução

Em nossa trajetória como professores e pesquisadores, somos sempre desafiados quando tratamos de leitura, interpretação, compreensão e resolução de problemas. Isso ocorre em nossas idas e vindas à sala de aula desde a educação básica e em discussões acadêmicas sobre ensino, aprendizagem e avaliação, envolvendo estudantes de todos os níveis escolares.

[1] Doutor em Educação pela Ufes, Vitória-ES. Professor de Matemática do Instituto Federal de Educação do Espírito Santo – Ifes, Vitória-ES, Brasil. E-mail: jose.thompson@ifes.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8412-9239
[2] Doutora em Educação Matemática, com PhD por Indiana University– Bloomington, IN, USA. Professora colaboradora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo – Ufes, Vitória-ES, Brasil. Professora aposentada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil. E-mail: profvaniasantoswagner@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9841-6191

Notamos, por meio de nossas pesquisas com graduandos em Matemática (SILVA, 2014; ZANON, 2019), um consenso, por parte de professores e pesquisadores, de que estudantes do ensino superior também apresentam dificuldades de compreender o uso de linguagem materna, símbolos matemáticos e códigos em tarefas matemáticas e problemas que tenham textos. Ou seja, estudantes universitários também têm dificuldades de identificar, classificar e entender conceitos matemáticos em diferentes situações de resolução de problemas.

Em alguns trabalhos realizados com licenciandos em Matemática envolvendo pesquisas sobre combinatória (SILVA, 2014; SILVA; ZANON; SANTOS-WAGNER, 2017a, 2017b; ZANON; ZOGAIB; SANTOS-WAGNER; SILVA, 2016; ZANON, 2019), constatamos que, em geral, estudantes costumam resolver problemas de combinatória seguindo modelos apresentados pelos professores, com aplicação de fórmulas, o que configura um entendimento instrumental (SKEMP, 1976). Parece-nos que os estudantes trabalharam em aulas de matemática na educação básica com problemas tipo ou problemas rotineiros ou problemas com modelos a serem seguidos de forma mecânica. Assim, acostumaram-se a resolver problemas de combinatória seguindo modelos dados pelo professor, nos quais se exigia apenas a aplicação de fórmulas com listas de questões similares para resolver. Dessa forma, parece que eles tiveram um ensino que propiciava apenas um entendimento instrumental de combinatória, em que usam procedimentos e fórmulas de modo automático, mecânico e, muitas vezes, sem compreenderem os conceitos envolvidos (SKEMP, 1976). Esse texto de 1976, do pesquisador inglês, tornou-se um clássico em educação matemática, por nos chamar a atenção na qualidade de professores e pesquisadores de que nem sempre nossos estudantes entendem os conceitos que procuramos ensinar e explorar em aulas. Infelizmente estamos em 2021 e, em muitos casos, isso ainda ocorre em aulas de matemática.

Além disso, ficou evidenciado em nossas pesquisas (SILVA, 2014; SILVA; ZANON; SANTOS-WAGNER, 2017a, 2017b; SILVA, 2019; ZANON; SILVA; SANTOS-WAGNER, 2017; ZANON, 2019) que, fora o livro didático, os licenciandos não tiveram contato com outros materiais que os auxiliassem nem no processo de aprendizagem deles próprios. Nossos estudos também nos informam que estudantes não tiveram experiências escolares que os ajudassem a pensar em futuras estratégias de ensino, e sabemos que professores recém-formados, em geral, apresentam dificuldade em explicar o conteúdo de combinatória e diferenciar os tipos de problemas e suas características. Temos assim a impressão de que licenciandos em matemática seguiam sem ter um entendimento relacional, como advoga Skemp (1976). Esse autor defende que é necessário que professores de matemática propiciem aos estudantes caminhos para construírem entendimentos instrumental e relacional de conceitos matemáticos ao mesmo tempo, pois ambos são necessários. Nesse sentido, é preciso que docentes e discentes saibam o que fazer e o porquê, ao resolverem problemas matemáticos. Ao pensar no que fazer, no porquê, na história desse conceito e em como usar esse conceito matemático, estudantes e professor envolvem-se em diálogos e argumentos que propiciem melhor entendimento do que está sendo estudado, explorado e realizado. Isso é importante porque não basta simplesmente saber qual técnica e fórmula que serão utilizadas, mas é importante e necessário também compreender como e quando usar e saber explicar os conceitos envolvidos. Acreditamos que é importante e necessário compreender a estrutura matemática que está sendo empregada com outras ideias e conceitos matemáticos. Assim, cada estudante poderá compreender os conceitos envolvidos e construir e formar estruturas conceituais em sua mente, pois será possível emergir na mente de cada estudante alguns esquemas mentais. Skemp (1976) comenta que isso é a formação de estruturas conceituais. Podemos, assim, dizer que o entendimento relacional de combinatória envolve saber quando se usa determinada fórmula de combinatória e saber por que essa fórmula é adequada e como se chega a ela. Além disso, um entendimento relacional permite que o indivíduo que o possui perceba relações, conexões entre conceitos de combinatória e outros conceitos matemáticos.

Professores e estudantes da educação básica ao ensino superior precisam saber como os conceitos matemáticos se desenvolveram, saber analisar as tarefas e identificar quando e por que usar determinada fórmula ou procedimento. Também é importante que o estudante universitário saiba relacionar conceitos matemáticos e explicar a outras pessoas o que está fazendo durante o processo de resolução quando lhe perguntam como pensou e resolveu uma tarefa matemática (SKEMP, 1976). Encontrar estudantes que apenas usem fórmulas decoradas na resolução de determinados tipos de problemas de combinatória pouco vai ajudá-los em momentos de vida e de trabalho.

Entre tantas concepções de trabalho por meio da resolução de problemas, enfatizamos a necessidade de perguntas que estimulem os estudantes a prestar atenção nos enunciados, no que está sendo solicitado no problema, de modo que possibilitem ao professor investigar como o aluno tem pensado para chegar a determinada solução (SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008). Desenvolver o raciocínio matemático não é só pensar em como fazer. É preciso verificar as hipóteses, testá-las e aprender com os acertos e erros obtidos no processo de resolução de problemas e tarefas (ALLEVATO, 2014; D'AMBROSIO, 2017; DEWEY, 1979; ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, 2011; POLYA, 1945/1995; SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008; SILVA, 2019). Com base em estudos envolvendo análise de livros didáticos (DANTE, 2014, 2016a, 2016b, 2016c, 2016d, 2016e, 2016f; RIBEIRO, 2011), experimentos de ensino com graduandos (SILVA, 2014; ZANON, 2019) e análise de pesquisas nacionais (ALVES, 2012; ASSIS, 2014; COSTA, 2003; EISENMANN, 2009; LIMA, 2015; MENDONÇA, 2011; ROCHA, 2011; SABO, 2010; SOUZA, 2010; TEIXEIRA, 2012) e internacionais sobre combinatória (GODINO; BATANERO, 2016; GODINO; BATANERO; ROA, 2005; HIERRO; BATANERO; BELTRÁN-PELLICER, 2018; ROA, 2000), optamos, neste artigo, por focalizar o seguinte questionamento: *Que estratégias heurísticas podem ser discutidas com estudantes universitários, ao resolverem problemas combinatórios?*

Em aulas de matemática, pouco auxiliamos em todos os níveis escolares, quando deixamos de dialogar, ou quando não fazemos perguntas que ajudem os estudantes que os provoquem a identificar informações contidas no texto de um problema, a pensar e a focalizar o que precisam e/ou devem fazer (POLYA, 1945/1995). Passar problemas e tarefas matemáticas para serem resolvidas como exemplos em aulas e depois solicitar para resolverem listas com problemas semelhantes pouco favorece a aprendizagem dos alunos, pois estamos apenas reproduzindo uma matemática do certo e do errado. Santos (1997) e Santos-Wagner (2008) argumentam que, quando trabalhamos por meio da resolução de problemas, devemos fazer perguntas não apenas que provoquem os alunos a dar as respostas corretas, mas também que os levem a pensar e refletir no que fazem, como fazem e por que resolvem, de certa forma, um problema. Assim, estamos favorecendo que estudantes adquiram entendimentos instrumental e relacional, como advoga Skemp (1976), que são necessários para que estudantes entendam e compreendam conceitos matemáticos.

Além dos argumentos já citados de Polya (1945/1995), Santos (1997), Santos-Wagner (2008) e Skemp (1976), as autoras Allevato (2014) e Onuchic e Allevato (2004, 2011) também orientam que devemos usar outras estratégias para provocar os estudantes a pensar. Por exemplo, formular perguntas absurdas ou contrárias, ou seja, perguntas que, às vezes, não têm relação com o enunciado ou que contenham algum contraexemplo para verificar se os estudantes entenderam o problema. Ademais, propor perguntas para verificar se estudantes sabem argumentar e também para verificar se escutaram e/ou leram atentamente o enunciado da tarefa.

No ensino de combinatória, por meio de resolução de problemas, é necessário que o estudante leia o problema, compreenda o que está sendo solicitado, pense no modo de organizar os elementos e enumerar as possibilidades e nos casos que devem ser eliminados da contagem, além de perceber que associações com as operações matemáticas podem ser estabelecidas (SILVA, 2019; ZANON, 2019). Para que esses e outros aspectos sejam alcançados, acreditamos que pelo menos seis ou mais etapas devam ocorrer em aulas, a saber: a etapa de apresentação (etapa em que o professor dialoga com os alunos sobre o enunciado do problema) e o entendimento do problema (etapa em que o professor conversa com os alunos e faz uso de estratégias que possibilitam a compreensão do problema) são as duas etapas fundamentais iniciais; depois, as etapas de planejamento de resolução (etapa em que os alunos estabelecem estratégias pessoais de resolução do problema) e de resolução propriamente dita; essas etapas devem ser seguidas pelas etapas de discussão da resolução e verificação atenta do resultado obtido (etapa em que as estratégias de resolução são compartilhadas para chegar ao consenso se o resultado obtido está correto ou incorreto); ao final dessas etapas, devemos envolver e provocar estudantes para outra etapa, a de formulação de outros problemas e a de formular hipóteses. Assim, solicitar que estudantes formulem problemas similares mais simples e os resolvam, para depois formularem problemas semelhantes mais complexos. Quando os estudantes pensarem e refletirem sobre todas essas etapas e registrarem seus aprendizados, questionamentos, reflexões e hipóteses usadas em todas as etapas, eles aprenderão a resolver e pensar o tempo todo.

Cremos que todas essas etapas são essenciais para que estudantes formem estruturas conceituais em suas mentes e adquiram entendimento instrumental e relacional. Essas várias etapas, que ampliam e detalham as quatro etapas iniciais pensadas por Polya em 1945, são básicas para incentivar os estudantes a verificar suas respostas e refletir se testaram, ou não, todas as possibilidades, como orientam Santos (1997), Santos-Wagner (2008), Silva (2014, 2019) e Zanon (2019). Com base nesses pressupostos, apresentamos alguns aprendizados sobre heurísticas, que necessariamente devemos explorar com universitários no processo de ensino de combinatória. A seguir, apresentamos ideias de raciocínio combinatório e, na seção posterior, trazemos uma discussão heurística sobre alguns problemas combinatórios.

Combinatória: um pensamento heurístico

Quando tratamos de raciocínio heurístico, referimo-nos à forma de pensar ou de compreender um problema matemático, bem como os processos de resolução empregados por uma pessoa, conforme fundamenta Polya (1945/1995) em seu livro “A arte de resolver problemas”. Aqui apresentamos tanto nossa compreensão de combinatória e raciocínio combinatório quanto nossas experiências, ao trabalharmos com esse assunto como professores e pesquisadores. Nosso entendimento de combinatória tem suporte nos livros didáticos de

Bachx, Poppe, Tavares (1975), Machado (1986), Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991) e Hazzan (1993) e nas pesquisas de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Borba (2010). A escolha por esses autores ocorreu porque, nos mapeamentos de pesquisas nacionais sobre estudos envolvendo combinatória no período de 1999 a 2017, realizados por Zanon, Zogaib, Santos-Wagner e Silva (2016), Silva, Zanon e Santos-Wagner (2017a, 2017b), Silva (2019) e Zanon (2019), eles foram referenciados em grande parte delas. No quadro a seguir, trazemos algumas definições sobre análise combinatória com suporte nesses autores.

Quadro 1: Definição de combinatória

Autor	Definição
Bachx, Poppe e Tavares[3]	A Análise Combinatória, ou simplesmente Combinatória, é o ramo da Matemática que nos permite resolver problemas em que, basicamente, é necessário "escolher e arrumar" os objetos de um conjunto (BACHX; POPPE; TAVARES, 1975, p. 1).
Machado[4]	A Análise Combinatória é a parte da Matemática onde estudamos as técnicas de contagem de agrupamentos que podem ser feitos com elementos de um dado conjunto. São basicamente dois tipos de agrupamentos que podemos formar: um em que se leva em conta a ordem dos elementos dentro do agrupamento e outro onde a ordem dos elementos é irrelevante (MACHADO, 1986, p. 118).
Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez[5]	De maneira geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são: 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições. 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas (MORGADO; CARVALHO; CARVALHO; FERNANDEZ, 1991, p. 1).
Hazzan[6]	A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos [considerados como] *agrupamentos formados sob certas condições*. À primeira vista pode parecer desnecessária a existência desses métodos. Isto de fato é verdade, se o número de elementos que queremos contar for pequeno. Entretanto, se o número de elementos a serem contados for grande, esse trabalho torna-se quase impossível sem o uso de métodos especiais (HAZZAN, 1993, p. 1).
Batanero, Godino e Navarro-Pelayo[7]	A combinatória, ou análise combinatória como historicamente se

[3] Estes autores, além de professores, foram fundadores do Grupo de Estudos de Matemática do Estado da Guanabara e responsáveis pela formação de um núcleo de estudo e desenvolvimento didático de matemática. O livro foi escrito com o objetivo de tornar o estudo de combinatória mais acessível aos estudantes interessados pelo assunto.
[4] O livro escrito pelo professor foi destinado a estudantes do 2.º grau, a vestibulandos e aos que desejam recordar assuntos em cursos básicos de faculdade.
[5] O livro foi escrito como parte de um projeto de treinamento para professores de matemática do 2.º grau, levando em conta a experiência dos autores em ensinar análise combinatória a alunos nesse nível escolar.
[6] O livro escrito pelo professor Samuel Hazzan faz parte de uma coleção denominada Fundamentos de Matemática Elementar e destinava-se a alunos em preparativos para exames de vestibulares, aos universitários que necessitavam rever a matemática elementar e também a alunos do colegial que se interessassem por mais consistência na área da matemática.

	conhece, estuda – segundo descreve Ribnikov (1988) – os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas a partir de seus elementos mediante certas transformações que originam mudanças na estrutura ou na composição deles. A estrutura destes conjuntos pode ser muito complexa, dependendo das relações existentes entre seus elementos. A primeira tarefa da análise combinatória consiste em estudar tais estruturas discretas e expressar suas propriedades, empregando métodos matemáticos (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 17-18, tradução nossa)[8].
Borba[9]	A Combinatória é conhecida como a arte de contar, pois nas situações combinatórias são enumeradas maneiras possíveis de combinar dados objetos. Dessa forma, a Combinatória se constitui num ramo da Matemática que estuda técnicas de contagem – direta e implícita – de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que satisfaçam a determinadas condições (BORBA, 2010, p. 3).

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Ao analisarmos o quadro, observamos que os livros didáticos de Bachx, Poppe e Tavares (1975) e Machado (1986) definem combinatória de forma semelhante ao estudo de Borba (2010) e nos dizem que combinatória é parte da matemática. Porém, no livro de Morgado e colegas (1991), verificamos que aparece destacado o estudo de relações discretas semelhantemente ao que dizem os pesquisadores espanhóis Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), ao mencionarem os conjuntos discretos. Verificamos que Machado (1986) traz uma explicação um pouco mais detalhada do que seria o “arrumar” que está presente na definição de Bachx, Poppe e Tavares (1975), pois envolve a ordem dos elementos dentro do agrupamento. Machado (1986), Hazzan (1993) e Borba (2010) consideram que a combinatória se encarrega de fazer contagem, enquanto Morgado e colegas (1991) acrescentam que, além de fazer a contagem, analisa a existência e a classificação de subconjuntos.

Observamos que os pesquisadores espanhóis Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) focalizam esses aspectos mencionados pelos demais autores e orientam que outras

[7] Os professores e pesquisadores escreveram o livro como um instrumento didático básico para uso de professores, estudantes e pesquisadores. Oferece instruções psicológicas, curriculares e didáticas para o ensino de combinatória em diferentes níveis escolares. A pesquisadora Carmen Batanero orienta, faz muito tempo pesquisas com foco em combinatória e em probabilidade na Espanha. É professora do Departamento de Didática da Matemática da Universidade de Granada (UGR) e também coordenadora do Grupo de Pesquisa em Educação Estatística da UGR com mais de 100 artigos publicados entre 1983 e 2015. Carmen Batanero estudou na Universidade Complutense de Madrid. Em 1983, obteve doutorado em Matemática na Universidade de Granada.

[8] La Combinatoria, o Análisis Combinatorio como históricamente se le conoce, estudia – según describe Ribnikov (1988) – los conjuntos discretos y las configuraciones que puedem obtenerse a partir de sus elementos mediante ciertas transformaciones que originan cambios em la estructura o la composición de los mismos. La estructura de estos conjuntos puede ser muy compleja dependiendo de las relaciones existentes entre sus elementos. La primeira tarea del análisis combinatorio consiste em estudiar tales estructuras discretas y expresar sus propiedades, empleando métodos matemáticos (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 17-18).

[9] A professora e pesquisadora desenvolve e orienta trabalhos de pesquisa sobre esta temática.

análises devem ser realizadas, ao examinarem a estrutura ou a composição dos conjuntos mencionados na tarefa. Ademais, eles comentam que é necessário examinar e investigar as relações entre os elementos dessas estruturas ou conjuntos. Um exemplo de operação entre os elementos de um agrupamento é a permutação, que modifica a ordem relativa entre eles. Outro exemplo que podemos citar é o do produto cartesiano, que consiste em construir correspondências entre distintos elementos de conjuntos discretos. De acordo com a natureza dos elementos (iguais ou distintos), estas e outras operações podem alterar a composição dos agrupamentos gerando novas configurações combinatórias.

Observamos como é necessário e importante que ocorram diálogos entre os estudantes e o professor e entre os próprios estudantes sobre os enunciados dos problemas para que estes compreendam as informações dadas acerca dos elementos envolvidos na tarefa. Aqui se percebem conexões entre os argumentos de Polya (1945/1995), Santos-Wagner (2008), Onuchic e Allevato (2011) sobre um entendimento da estrutura do problema de combinatória a ser resolvido. Por exemplo, quando queremos permutar elementos iguais entre si, temos um tipo de agrupamento diferente daquele que possui apenas elementos distintos. Além disso, o critério de ordenação só gera novas possibilidades quando estamos permutando elementos distintos. Estas e outras características devem ser analisadas em aulas durante o processo de resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório e na fase de exposição de soluções.

Borba (2010) evidencia que a combinatória envolve processos de enumeração direta ou indireta. Essa autora comenta que alguns problemas envolvendo raciocínio combinatório solicitam enumerar as maneiras possíveis de combinar determinados objetos. Por exemplo, quando queremos saber de quantas formas três pessoas, uma ao lado da outra, podem se posicionar para tirarem fotos, será necessário pensar nas diversas possibilidades e na maneira como enumerá-las. Borba (2010) também recomenda que professores aproveitem estratégias espontâneas desenvolvidas pelos alunos quando resolvem algumas tarefas de combinatória, estimulando-os a pensar sobre generalizações possíveis.

Hazzan (1993) parece dar maior destaque aos métodos formais de resolução para os problemas de contagem. O autor destaca que, embora o princípio fundamental forneça o instrumento básico para resolver tarefas de combinatória, “[...] sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes tornar-se trabalhosa” (HAZZAN, 1993, p. 15). Mediante essa argumentação, o autor apresenta deduções de fórmulas para o cálculo de diferentes tipos de agrupamentos. Além disso, explora diversos problemas de provas e demonstrações, por exemplo: Usando a relação de Euler, prove que: $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$ (HAZZAN, 1993, p. 76). Hazzan parece estimular o uso de diferentes fórmulas matemáticas relacionadas aos problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Esse autor parece dar maior destaque ao entendimento instrumental, reforçando a aplicação de fórmulas.

Vemos que a combinatória é a parte da matemática discreta[10] em que se estudam os tipos de (i) estruturas de conjuntos (propriedades que permitem conceituar noções intuitivas e definir certas operações matemáticas a partir dos elementos desse conjunto), (ii) relações entre seus elementos e (iii) operações (ou técnicas) de contagem, de enumeração, de classificação ou de análise de existência de certas possibilidades. Isso é feito com base nos elementos de um ou mais conjuntos discretos, segundo condições estabelecidas. Para nós, a análise combinatória (ou combinatória) é um campo da matemática discreta que estuda os tipos de estruturas de conjuntos em que se analisam as relações entre os elementos, os diferentes procedimentos de contagem, de enumerações, de classificação ou de análise de existência de certas possibilidades. Além disso, envolve processos sistemáticos de escolhas entre os elementos de um ou mais conjuntos, atendendo a certos critérios ou parâmetros estabelecidos que serão comentados ao longo deste texto com base em nosso referencial teórico. Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) comentam:

> Sobre os conjuntos discretos é realizada determinada classe de operações. Algumas delas originam a mudança da estrutura, isto é, das inter-relações entre os elementos dos conjuntos, outras modificam a composição destes. Um exemplo entre as operações mais simples do primeiro tipo seriam as permutações de elementos provenientes de uma mudança de ordem relativa a eles, e o segundo tipo, a obtenção de amostras ou subconjuntos de um dado conjunto ou do n-ésimo produto cartesiano desse conjunto. Também aparece entre as transformações combinatórias o estabelecimento de correspondência entre diferentes conjuntos discretos de objetos. Com frequência, as ações mencionadas se aplicam mais de uma vez (reiteradamente), além disso, nas mais diversas combinações, quando diferentes condições são impostas. Esta é uma das razões pelas quais se apresentam possibilidades praticamente inesgotáveis de criar construções discretas, as quais são denominadas de configurações combinatórias, que são objeto de estudo deste ramo da Matemática, especialmente os processos de formação dessas configurações e contagem delas (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 18, tradução nossa)[11].

[10] Para nós, a matemática discreta focaliza estudos de conjuntos finitos em que seus elementos são discretos, desconexos e podem ser enumerados. A matemática contínua trata de estudos de relações e funções envolvendo conjuntos como os números reais e outros que aparecem no contínuo.

[11] Sobre los conjuntos discretos se realizan cierta clase de peraciones. Algunas de ellas originan el cambio de laestructura, o sea, d las interrelaciones entre los elementos de los conjuntos, otras modifican la composición de éstos. Un ejemplo entre las operaciones más simples del primer tipo seírn las permutaciones de elementos, que

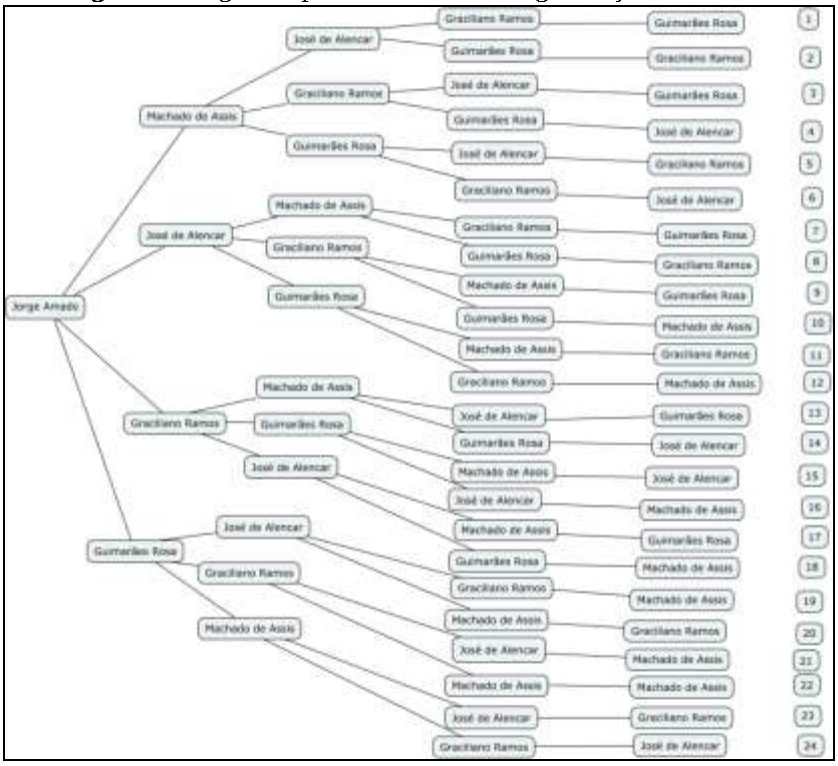
Entre as operações solicitadas em problemas que envolvem o raciocínio combinatório, estão as permutações, que podem ser entendidas como as diferentes formas de ordenar os elementos de um conjunto. Suponhamos que alguém tenha cinco livros de autores diferentes (Jorge Amado, Machado de Assis, José de Alencar, Graciliano Ramos e Guimarães Rosa) e deseje organizá-los em uma estante, de modo que os livros fiquem um ao lado do outro. De quantas formas isso é possível? Quais são as maneiras de fazer a arrumação? Um dos modos de resolução desse problema, muito comum em livros didáticos, é utilizar o diagrama de árvore. Segundo Hierro, Batanero e Beltrán-Pellicer (2018), a vantagem do uso do diagrama de árvore, além dos aspectos matemáticos, é a capacidade de transmitir muitas informações de modo ordenado e por classificações, permitindo a visualização rápida dessas informações e do conjunto estudado e levando em conta todas as possibilidades. Outra importância do estudo do diagrama de árvores é que ele favorece a compreensão de teoremas e problemas, possibilitando a construção sistemática de abstração matemática envolvida no processo de representação e dedução no âmbito dos estudos de probabilidade e combinatória.

Como os livros apresentados no problema são todos distintos, a ordem em que eles estiverem arrumados geram novas possibilidades. Vejamos algumas das possibilidades apresentadas no diagrama de árvores (Figura 1), tendo o livro de Jorge Amado como a primeira opção de escolha no processo de ordenação.

originan un cambio en el orden relativo de los mismos, y del segundo tipo, la obtención de muestras o subconjuntos a partir de un conjunto dado o del producto cartesiano n-ésimo de dicho conjunto. También figura entre las transformaciones Combinatorias el establecimento de correspondencias entre distintos conjuntos discretos de objetos. Con frecuencia, las acciones mencionadas se aplican más de una vez (reiteradamente) y, además, em las combinaciones más diversas, cuando se imponen diferentes condiciones. Esta es una de las razones por la que se presentan posibilidades prácticamente inagotables de crear construcciones discretas, las cuales se denominan configuraciones Combinatorias, que son el objeto de estudio de esta rama de las Matemáticas, especialmente los procesos de formación de estas configuraciones y recuento de las mismas (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 18).

revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

Figura 1: Algumas possibilidades da organização dos livros



Fonte: Elaborada pelos pesquisadores

Ao observarmos o diagrama de árvores (Figura 1), podemos notar que, uma vez escolhido o primeiro livro para ocupar a posição inicial no processo de ordenação, restam quatro opções de escolha de livros para ocupar a segunda posição. Uma vez escolhidos os livros da primeira e da segunda posição, restam apenas três opções de escolha para ocupar a terceira posição, depois restam apenas dois livros a escolher para ocupar a quarta posição e, por fim, resta apenas um livro para ocupar a quinta e última posição. Tendo o livro de Jorge Amado ocupado a primeira posição, obtivemos 24 maneiras diferentes de organizar os livros. Portanto, teremos a mesma quantidade de possibilidades se começarmos a escolha com o livro do José de Alencar, ou com o livro de Machado de Assis, ou com o livro de Graciliano Ramos, ou com o livro de Guimarães Rosa. Assim, se registrarmos nossos entendimentos com base na escolha inicial com o livro de Jorge Amado, da qual obtivemos 24 maneiras distintas, certos de que acontecerão, de modo semelhante, outras 24 maneiras de arrumar os livros na estante se iniciarmos com os outros quatro livros, vamos chegar ao seguinte resultado: teremos 24 x 5 possibilidades de arrumar esses livros na estante e ao todo existirão 120 maneiras diferentes de permutar os cinco livros.

Agora imaginemos que uma pessoa queira comprar um sorvete. Na sorveteria, existem três sabores – morango, flocos e chocolate – e cada pessoa pode comprar o sorvete em um pote ou em uma casquinha. Quais são as possibilidades de escolha de sabor e recipiente?

Pensamos que algumas delas seriam: sorvete de morango no pote ou na casquinha; comprar sorvete de flocos no pote ou na casquinha e assim por diante ir pensando nos demais sabores e recipientes. Esse tipo de tarefa envolve a ideia de produto cartesiano, pois consiste na construção dos possíveis pares ordenados que se podem formar combinando o sabor do sorvete com o tipo de recipiente (casquinha ou pote).

Ideias como essas de resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, o diagrama de árvore e o uso de tabelas para determinar o número de agrupamentos possíveis, ao combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, são algumas das habilidades que precisam ser desenvolvidas desde os anos iniciais (BORBA, 2010, 2013; BRASIL, 2017). Ademais, essas ideias estão presentes nos problemas de raciocínio combinatório em que as configurações do conjunto original são alteradas à medida que reagrupamos seus elementos de acordo com os critérios estabelecidos no enunciado (no texto) da tarefa (problema) proposta. Mas como fazer a contagem? Como devemos pensar para chegar aos resultados? Será que um professor universitário pode dialogar, questionar e provocar pensamentos que auxiliem os estudantes a pensar no texto da tarefa e a entender que precisam considerar critérios estabelecidos no texto ou no enunciado sem dizer o que eles devem fazer? Que estratégias ou procedimentos foram adotados para resolver o problema? Além de entendermos o que é a combinatória, interessa-nos saber como os estudantes universitários desenvolvem, reconstroem e/ou aprofundam o raciocínio combinatório pelo viés da resolução de problemas. Sobre o raciocínio combinatório, Borba (2010) define-o como

> [...] um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos destes, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis. Este modo de pensar é útil no cotidiano – por estar presente em situações variadas como organizações de equipes, de campeonatos esportivos, de cardápios etc. – bem como é aplicado em variadas áreas do conhecimento – tais como Biologia, Química, Estatística, Ciências da Computação dentre outras – em situações classificatórias, por exemplo. O desenvolvimento do raciocínio combinatório, portanto, é de extrema relevância e deve ser alvo do ensino formal na Educação Básica (BORBA, 2010, p. 3).

O raciocínio combinatório está presente em situações escolares e no cotidiano das pessoas desde a infância (HIERRO; BATANERO; BELTRÁN-PELLICER, 2018). De forma semelhante, Pessoa e Borba (2009) nos informam o que concebem como raciocínio combinatório. Elas entendem o raciocínio combinatório como um modo de pensar presente na análise de situações em que elementos de determinados conjuntos devem ser agrupados, atendendo a critérios específicos de escolha e/ou ordenação. Ademais, o número de agrupamentos possíveis pode ser determinado diretamente, contando os casos um a um, ou de forma indireta, por meio de um cálculo específico. Assim, esse raciocínio exige uma forma de pensar em que as ideias sejam encadeadas e contribuam para organizar o pensamento, de modo que seja possível obter direta ou indiretamente as possibilidades solicitadas num problema.

De acordo com Dewey (1979), há quatro sentidos diferentes para a palavra pensamento. O primeiro é relacionado ao que se passa em nossa mente e em nossos sonhos e devaneios, ou seja: ideias desordenadas que passam pela nossa cabeça de forma desregrada. O segundo refere-se à atividade mental de representação consciente, mas as ideias não se apresentam numa sequência ordenada. Neste caso, as ideias não se apoiam nas anteriores ou em algo a elas relacionado. Podemos pensar em vários casos, mas que não estejam relacionados entre si. Outro sentido de pensamento que encontramos em Dewey (1979) trata do pensamento encadeado, ou seja, ideias como representações mentais oriundas de uma cadeia sucessiva de reflexões, que derivam de conexões estabelecidas de forma lógica entre as ideias. A sequência de ideias encadeadas possibilita chegar a um alvo (ou a um propósito estabelecido).

Encontramos ainda em Dewey (1979) outro sentido para pensamento: a crença. Temos a crença primitiva, que pode estar fundamentada naquilo que é evidenciado no que podemos ver (ou seja: uma evidência não examinada ou não investigada). A crença posterior apoia-se num estudo cuidadoso, mais amplo e intencional sobre o aspecto que se deseja observar, fazendo verificações e análises de possíveis resultados em comparação com outras crenças, isto é, um processo de investigação. Por fim, o pensamento reflexivo, que, segundo Dewey (1979), apresenta cinco fases, a saber:

> (1) as sugestões, nas quais o espírito salta para uma possível solução; (2) uma intelectualização da dificuldade ou perplexidade que foi sentida (diretamente experimentada) e que passa, então, a constituir um problema a resolver, uma questão cuja resposta deve ser procurada; (3) o uso de uma sugestão em seguida a outra, como ideia-guia ou hipótese, a iniciar e guiar a observação e outras operações durante a coleta de fatos; (4) a elaboração mental da ideia ou suposição, como ideia ou suposição (raciocínio, no sentido de parte da inferência e não da inferência inteira); e (5) a verificação da hipótese, mediante ação exterior ou imaginativa (DEWEY, 1979, p. 111-112).

Esses tipos de pensamentos apresentados por Dewey (1979) têm ligação com o que os pesquisadores espanhóis discutem sobre sistematização e não sistematização de estratégias intuitivas de alunos, ao resolverem problemas combinatórios. Quando o aluno apresenta uma resposta que aparentemente pode não ter nenhum sentido em relação ao que é solicitado no problema de combinatória, tal resposta pode ser apenas um devaneio. Quando apresenta uma resposta incompleta sem sistematização, o pensamento pode ser desordenado sem que as ideias estejam apoiadas nas anteriores (SILVA, 2014, 2019; ZANON, 2019). Já no pensamento sistemático, as ideias apoiam-se nas anteriores, de modo que os alunos consigam encontrar todas ou quase todas as possibilidades (SILVA, 2019; ZANON, 2019).

Em situações que envolvem o raciocínio combinatório, os problemas podem solicitar que sejam listadas as possibilidades de realizar algum tipo de agrupamento ou quantificar o total de possibilidades de realizar um determinado tipo de agrupamento. Além disso, podem exigir a recursividade ou uma generalização dos procedimentos de resolução. Dependendo da estrutura da tarefa, é necessário o desenvolvimento de diferentes técnicas de contagem e isso exige sempre a reflexão dos sujeitos em verificar se sua resposta atende ao que está sendo solicitado no problema (SILVA, 2019; ZANON, 2019).

Os estudos dos pesquisadores espanhóis citados e os de Borba (2010, 2013) que defendem que a combinatória seja trabalhada com alunos desde o início da escolarização nos influenciaram em investigações posteriores. Ademais, Borba (2010) argumenta que o desenvolvimento do raciocínio combinatório depende da instrução escolar que o aluno recebe. Quando pensamos em nossas experiências com alunos desde os anos iniciais até a pós-graduação, os trabalhos de Silva (2014, 2019), Silva, Zanon e Santos-Wagner (2017a, 2017b) e a pesquisa de Zanon (2019) também provocaram-nos a repensar a abordagem heurística sobre problemas combinatórios com universitários, uma vez que se evidenciou que licenciandos em Matemática e professores dos anos iniciais não tinham recordações desse assunto nos primeiros anos de sua escolarização.

Com base nos autores estudados e citados, dizemos que o raciocínio combinatório é *o modo de pensar sobre diferentes estratégias para resolver problemas que envolvem seleção, alocação, partição, enumeração, ordenação, contagem, otimização, classificação, associações entre elementos de um ou mais conjuntos e análise de existência de possibilidades mediante certas condições estabelecidas* (grifo nosso). À medida que desenvolvemos o raciocínio combinatório e alguma capacidade de realizar operações combinatórias, diminuímos algumas dificuldades de enumerar ou contar casos. Assim, podemos contar os números possíveis de casos dados que se podem mesclar e combinar, sem omitir alguma possibilidade que deva ser considerada na solução do problema. Portanto, para que esse raciocínio seja desenvolvido, é preciso que os estudantes tenham condições de sugerir algum tipo de resolução (SILVA, 2014, 2019; ZANON, 2019). A partir disso, os universitários precisam testar ou investigar estratégias que pensaram para resolver uma tarefa, para que se convençam da validade, ou não, de certas estratégias. Além do mais, os estudantes precisam aprender a exibir quais são as possibilidades que encontraram para resolver a tarefa proposta e saber contar quantas foram essas possibilidades. Todas essas etapas precisam ser exploradas pelos estudantes que precisam notar que as ideias têm conexões entre si (SILVA, 2019; ZANON, 2019).

Uma classificação dos problemas combinatórios por meio dos procedimentos de resolução é encontrada nos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Roa (2000). Os três primeiros pesquisadores trabalham como é necessário identificar o modelo combinatório implícito, classificado em seleção, alocação e partição. Ademais, Roa (2000) acrescenta o modelo combinatório composto (problema que envolve mais de um esquema combinatório), ou seja, o enunciado pode envolver seleção e partição, seleção e alocação e assim por diante. De acordo com esses pesquisadores espanhóis, o modelo combinatório implícito considera os tipos de representações ou de esquemas concretos inerentes aos enunciados dos problemas de combinatória com as ideias de amostra, correspondência, partições de conjuntos ou de decomposição em números, entre outros aspectos. Quanto maior a compreensão sobre as representações ou esquemas concretos do modelo combinatório implícito presente nos enunciados, melhores serão as escolhas adequadas de estratégias de resolução.

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), os problemas de seleção de uma amostra de um conjunto é o tipo de problema que deu origem às mais primitivas noções combinatórias de escolha de objetos e têm grande importância para os estudos de estatística. Portanto, um problema de seleção envolve a escolha, a preferência, a retirada de objetos ou de elementos de um dado conjunto ou a ordenação dos elementos desse conjunto. Um problema de alocação ou de colocação envolve a ideia de colocar, alocar, inserir, depositar ou distribuir objetos em espaços, em vagas ou em casas (células). Já os problemas de partição envolvem a ideia de subdividir os elementos de um conjunto em subconjuntos. Seguindo as ideias desses pesquisadores para destacar o modelo combinatório implícito, trazemos, no Quadro 2, alguns exemplos da tese de Roa (2000), orientada pelos doutores Carmen Batanero Bernabeu e Juan Díaz Godino.

Quadro 2: Problema de seleção

Seleção	
A seleção refere-se, de forma implícita, à ideia de elementos ordenados ou não, com ou sem substituição.	
Seleção ordenada de objetos distinguíveis e indistinguíveis (permutação com elementos repetidos).	Em uma caixa, há quatro fichas de cores: duas azuis, uma branca e uma vermelha. Toma-se uma ficha ao acaso e anota-se sua cor. Sem devolver a ficha à caixa, toma-se uma segunda ficha e anota-se sua cor. Se continuar dessa forma até que se tenha selecionado uma atrás da outra, as quatro fichas, de quantas formas diferentes se podem selecionar as fichas? Exemplo: Podem-se selecionar na seguinte ordem: branca, azul, vermelha e azul (ROA, 2000, p. 140, tradução nossa)[12].
Seleção de mostras não ordenadas (combinação simples).	Uma professora tem que escolher três estudantes para apagar o quadro. Para isso, ela dispõe de cinco voluntários: Elisa, Fernando, Germán, Jorge e Maria. De quantas formas é possível escolher três desses alunos? Exemplo: Elisa, Fernando, Maria (ROA, 2000, p. 140, tradução nossa)[13].
Seleção ordenada com revezamento e repetição (arranjo com repetição).	Em uma caixa cilíndrica há quatro bolas numeradas com os dígitos 2, 4, 7 e 9. Escolhemos uma bola do cilindro, anotamos seu número e devolvemos à caixa. Escolhemos uma segunda bola, anotamos seu número e a devolvemos ao bumbo. Finalmente, elegemos uma terceira bola e anotamos seu número. Quantos números de três dígitos podemos obter? Exemplo: Podemos obter o número 222 (ROA, 2000, p. 147, tradução nossa)[14].
Seleção ordenada sem revezamento e sem repetição (arranjo simples).	Deseja-se escolher uma comissão formada por três membros: presidente, tesoureiro e secretário. Para selecioná-los, dispomos de quatro candidatos: Artur, Basílio, Carlos e David. Quantas comissões diferentes se podem formar entre os quatro candidatos? Exemplo: Que Artur seja o presidente, Carlos seja o tesoureiro e David seja o secretário (ROA, 2000, p. 148, tradução nossa)[15].

Fonte: Elaborado pelos autores com base nos estudos da tese de Roa (2000)

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) dizem-nos que, em problemas de seleção nos quais é dado um conjunto de ***n*** objetos distintos, dos quais selecionamos ***r***, é necessário verificar as seguintes condições: 1) considerar a ordem dos elementos; 2) distinguir se a amostra é ordenada ou não; 3) analisar se há, ou não, repetição de elementos; 4) verificar se a amostra de elementos que vamos formar é com ou sem revezamento. Ou seja, quando um estudante universitário identificar todas essas etapas, ele conseguirá ampliar sua compreensão

[12] En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin volver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: Se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul (ROA, 2000, p. 140).

[13] Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando, María (ROA, 2000, p. 140).

[14] En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola del bombo, anotamos su número y la devolvemos al bombo. Se elige una segunda bola, se anota su número y la devolvemos al bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 222 (ROA, 2000, p. 147).

[15] Se quiere elegir un comité formado por tres miembros: Presidente, Tesorero y Secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comitês diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos? Ejemplo: Que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario (ROA, 2000, p. 148).

sobre o modelo combinatório implícito. Na próxima seção, apontaremos alguns olhares heurísticos sobre problemas de combinatória.

Problemas combinatórios: algumas heurísticas

Quando falamos em heurísticas e em processos de resolução de problemas combinatórios, referimo-nos aos pensamentos ou raciocínios e técnicas que podem ser úteis para a compreensão e resolução de um problema (POLYA, 1945/1995). Essa heurística leva em conta a importância de ações que ajudem os alunos a compreender a estrutura matemática presente nos enunciados de problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Ao selecionar um problema, o professor precisa ter em vista a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento para tratar algo em sala de aula. É necessário que ele (professor) converse com seus estudantes universitários sobre o enunciado antes de começar a resolver o problema. Portanto, o professor deve fazer questionamentos que os auxiliem a pensar nos enunciados e a verificar que palavras, conhecimentos matemáticos, históricos ou cotidianos foram abordados no texto do problema, para que faça as intervenções pedagógicas necessárias. Vamos observar o problema a seguir:

Um excursionista planeja fazer uma viagem acampando. Há quatro itens disponíveis que ele deseja levar consigo, mas estes, juntos, excedem o limite de 4 quilos que a mochila suporta. Cada item possui um determinado peso e um valor específico (em reais) conforme mostra a tabela a seguir.

Item	1	2	3	4
Peso (Kg)	2	3	1	2
Valor (R$)	7	6	5	9

Suponha a existência de três unidades de cada item. Quantos e quais os itens que o excursionista deve levar de modo que maximize o valor total sem exceder a restrição do peso (Adaptado de Silva (2019)).

Antes de iniciar a tentativa de aplicação de cálculos matemáticos, é preciso fazer uma leitura minuciosa do problema. Em relação ao modelo combinatório implícito, esse problema envolve ideia de seleção, partição e alocação que precisam ser identificadas e entendidas. Exige a seleção de elementos, pois será necessário escolher os itens disponíveis para colocar na mochila. Além disso, trabalha com a ideia de partição, uma vez que se considerem os valores de somas que atendem à restrição do peso. E, por fim, alocar os elementos numa mochila. Portanto, trata-se de um problema do tipo composto, isto é, exige entendimento e uso das três ideias básicas do modelo combinatório implícito (seleção, alocação e partição).

Entender o significado da palavra excursionista e compreender o que se pede no problema são as estratégias iniciais dos estudantes quando encontrarem um problema desse tipo. Note que se quer maximizar de acordo com os valores dos itens, mas não de acordo com o que seria mais útil para a viagem. Além disso, é necessário o entendimento do significado da palavra maximizar. Necessita-se compreender o que é uma restrição imposta no problema, bem como as ações do modelo combinatório implícito (selecionar, alocar e particionar), que estão envolvidas no processo de resolução do problema.

Para saber qual o tipo de solução que se pede e tomar a melhor decisão, é necessário estimular os estudantes a se concentrarem no que se pergunta e nos dados necessários, ou não, para resolvê-lo e se as informações são necessárias, ou não, e também se são suficientes. Observa-se que o professor necessita ter este conhecimento matemático e saber interagir com seus estudantes como sugerem os pesquisadores espanhóis já citados sobre a resolução de problemas e combinatória. O problema que apresentamos é um caso de combinatória que envolve otimização, ou seja, ajustar a escolha dos itens que proporciona o maior valor possível, de modo que não ultrapasse as restrições estabelecidas. O objetivo é determinar o conjunto de objetos que devem ser colocados na mochila, de forma a maximizar o valor de retorno respeitando a sua capacidade.

Antes de iniciarmos o processo de resolução do problema da mochila, vamos trabalhar com alguns problemas auxiliares mais simples, mas que possuem estruturas de partição e seleção semelhantes ao nosso problema da mochila e podem ajudar-nos a compreender os processos de resolução. Para iniciarmos nossa conversa, vamos pensar sobre a permutação dos algarismos do número 53427. Algumas possibilidades são estas: 53472, 53247 e 53274. Como temos cinco algarismos distintos, temos, então, $5x4x3x2x1 = 120$ maneiras de permutar os cinco algarismos pelo princípio multiplicativo. Agora suponhamos que devemos permutar os algarismos do número 53434. Algumas das possibilidades são as seguintes: 53344, 54433, 54343. Observemos que este número 53434 tem a repetição dos algarismos 3 e 4. Portanto, se permutarmos os algarismos 3 entre si, não alteraremos o total de possibilidade. Isso também vale para o algarismo 4. Para melhor visualização e entendimento do cálculo de permutação com repetição, faremos alguns exemplos permutando os números 343 e 3434 na Figura 2 e na Figura 3.

Figura 2: Permutações dos algarismos do número 343

343	334	433
343	334	433

Fonte: Elaborada pelos pesquisadores

Ao analisarmos o total de possibilidades de permutação dos algarismos do número 343, verificamos que, se fossem todos distintos, teríamos seis possibilidades, ou seja, $3! = 3x2x1$. No entanto, como temos a repetição do algarismo 3, a permutação 343 corresponde à mesma possibilidade da permutação 343. Ou seja, se fixarmos o algarismo 3 das centenas, podemos permutar o algarismo das dezenas (4) e das unidades (3). Se fixarmos o algarismo 3 das unidades simples, podemos permutar o algarismo das centenas (3) e das dezenas (4). Porém, vamos obter a mesma configuração combinatória. O mesmo acontece com as outras permutações, o que resulta apenas em um total de três possibilidades. Para eliminarmos as possibilidades repetidas, faz-se necessário dividir o total de permutações pelo total de possibilidades de permutar os algarismos três entre si, que é $2x1$ possibilidades ou 2!, o que resulta no seguinte cálculo: $\frac{6}{2} = \frac{3x2x1}{2x1} = \frac{3!}{2!}$.

Agora vamos permutar os algarismos do número 3434 procedendo de modo semelhante ao que realizamos com o número 343. Vejamos as possibilidades na Figura 3.

Figura 3: Permutações dos algarismos do número 4343

3434	3443	3344	4334	4343	4433
3434	3443	3344	4334	4343	4433
3434	3443	3344	4334	4343	4433
3434	3443	3344	4334	4343	4433

Fonte: Elaborada pelos pesquisadores

Ao analisarmos as possibilidades de permutações dos algarismos do número 4343, verificamos que, se fossem todos distintos, teríamos o total de 24 possibilidades, ou seja, $6x5x4x3x2x1 = 6!$. Porém, como há repetição de algarismos, as permutações 3434, 3434, 3434 e 3434 correspondem à mesma possibilidade, e o mesmo raciocínio vale para as outras permutações. Assim, precisamos eliminar as possibilidades repetidas. Para corrigirmos essa repetição de possibilidades idênticas, dividimos pelo total de permutações, entre si, dos algarismos 3 e 4. Como podemos realizar $2x1$ permutações dos algarismos 3 entre si e $2x1$ permutações dos algarismos quatro entre si; logo, temos de dividir por $2x1x2x1 = 2!\,2!$. Isso nos leva a realizar o seguinte cálculo: $\frac{6x5x4x3x2x1}{2x1x2x1} = \frac{6!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$ possibilidades, como foi demonstrado na listagem dos resultados.

Ao retornarmos ao problema da permutação dos algarismos do número 53434 e seguirmos com o raciocínio semelhante ao que acabamos de utilizar na resolução das permutações dos algarismos dos números 343 e 3434, chegamos ao entendimento de que existe a necessidade de dividir o total de permutações dos algarismos do número 53434 pela quantidade de permutações dos algarismos repetidos entre si. Como o número de permutações pode ser obtido pelo fatorial, então obtemos $\frac{5x4x3x2x1}{2x1x2x1} = \frac{5!}{2!2!} = 30$, que podemos representar por $P_5^{2,2} = 30$.

Vamos pensar, por exemplo, em outro problema: a soma de dois números inteiros não negativos é igual a cinco. Quais são as possibilidades? Como podemos representar essas somas? É possível identificar padrões matemáticos? É possível relacionar os padrões com cálculos que já conhecemos? Quantas são as possibilidades? No quadro a seguir, apresentamos um possível registro de resultados com as somas e as respectivas representações de forma pictórica.

Quadro 3: Soma de dois números inteiros não negativos cujo resultado é igual a cinco

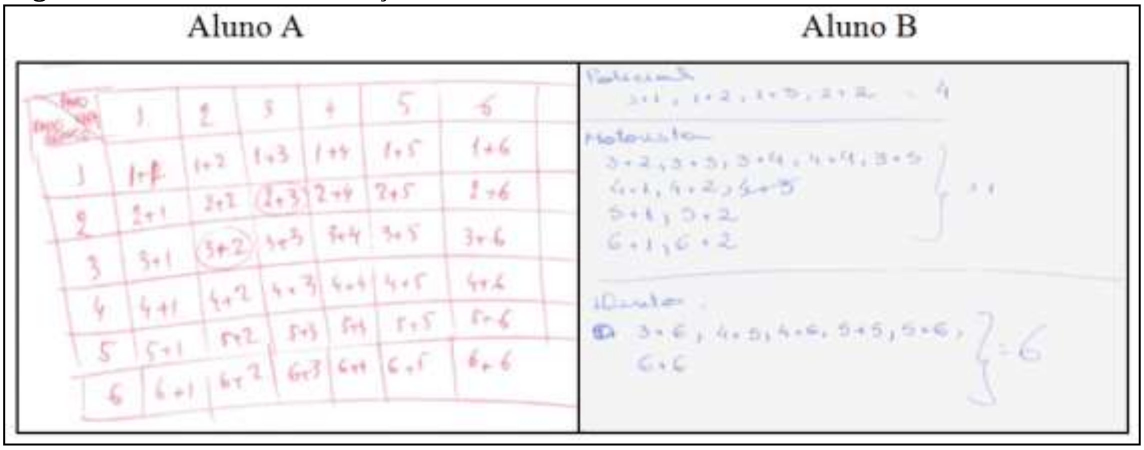
X_1	+	X_2	=	5	Representação Pictórica	Total de permutações
0	+	5			+|||||	$\frac{6!}{5!\,1!} = 6$
5	+	0			||||| +	
1	+	4			| + ||||	
4	+	1			|||| + |	
2	+	3			|| + |||	
3	+	2			||| + ||	

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Cada soma apresentada no Quadro 3 pode ser associada a uma representação pictórica, usando os símbolos + (para indicar a adição) e | para indicar a quantidade diferente de zero. O total de representações pode ser associado com o número de possíveis permutações com repetição de símbolos + ou |, de modo semelhante ao que apresentamos no cálculo da permutação que pensamos no número 53434. Quando calculamos essa permutação, chegamos à fórmula generalizada dada por $P_n^{r_1,r_2,\ldots,r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$ (em que n é a quantidade total de elementos e $r_1, r_{2,} \ldots, r_k$ representam a quantidade de elementos que foram repetidos de n), a qual nos fornece o resultado $\frac{6!}{5!1!} = 6$. Neste caso, n= 6 representa o total de símbolos, $r_1 = 5$ representa o total de símbolos | e $r_2 = 1$ representa o total de símbolos +. A compreensão entre a representação pictórica e o número de permutações é fundamental para que estudantes e professores construam um entendimento relacional de permutações como nesse caso. Só assim, com entendimento relacional de permutação é que um estudante universitário vai saber o que fazer e por que fazer tal operação matemática. Quando esse entendimento relacional não é construído na educação básica, universitários podem cometer erros em tarefas semelhantes às comentadas anteriormente, por terem apenas um entendimento instrumental sobre o que devem e precisam permutar (ou mudar de ordem). Isso nos mostraria que universitários podem evidenciar concepções equivocadas sobre esses conceitos matemáticos de combinatória.

Em 2014, a pesquisa de Silva com licenciandos em Matemática nos trouxe essas informações. Pode-se perceber esse tipo de erro de ordem quando eles resolveram problemas de combinatória. Por exemplo, esse erro foi observado em problemas[16] em que era necessário encontrar todas as possibilidades de combinações de adições com os valores das faces de dois dados distintos. Notamos isso na resolução do aluno B, na Figura 4.

Figura 4: Possibilidades de adição com os números das faces de dois dados distintos dos alunos



Fonte: Arquivo de Silva (2014)

Ao compararmos as respostas dos estudantes A e B, observamos que o licenciando B tratou os casos de ordenação (1,3), (3,1) como se fosse a mesma possibilidade para encontrar o resultado da adição como quatro. Provavelmente o estudante B se lembrou da propriedade comutativa da adição e usou esse conhecimento de forma automática e instrumental. Parece que ele ignorou o significado do que seria possível encontrar nos dados a cada jogada e nem pensou que ajudaria e seria importante fazer registros sistemáticos. Já o licenciando A usou uma estratégia sistemática de registrar todas as possibilidades e assim conseguiu encontrar todas as adições possíveis com o total 4 a partir da jogada dos dois dados. Parece que esse licenciando A tinha entendido, de forma relacional, a tarefa toda.

Se voltarmos ao Quadro 3 e relacionarmos o número de parcelas e o resultado da soma com a permutação pictórica, vamos encontrar o valor total. Como existem seis símbolos, sendo cinco do tipo $|$ e um do tipo $+$, o total de maneiras de permutar esses símbolos é $\frac{6!}{5!1!} =$

[16] Identificar as funções dos jogadores. Cada jogador vai jogar os dois dados e vai registrar o resultado da adição destes dois valores. Se o resultado da adição estiver entre dois e quatro ele vai agir como policial. Se o resultado estiver entre cinco e oito ele vai agir como motorista. Se o resultado da adição estiver entre nove e doze ele vai ser o diretor. Fazendo o lançamento simultâneo de dois dados, quais e quantas são as formas de sortear: a) o motorista? b) o policial? c) o diretor do DETRAN? (SILVA, 2014, p. 71). Essa tarefa foi proposta aos licenciandos para trabalharem em grupos com seis estudantes. Na primeira jogada de dados, cada estudante descobria, pelo total de sua adição, os papéis que iriam desempenhar no jogo.

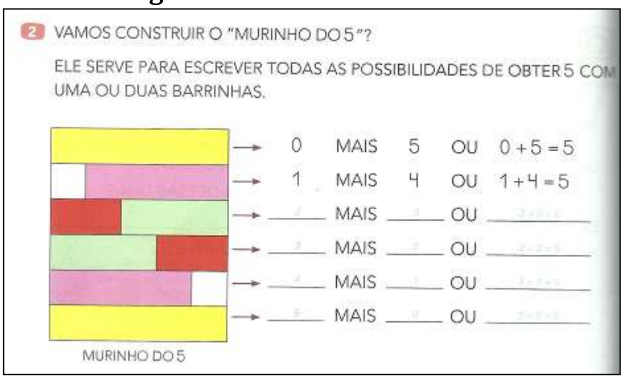
$\frac{6x5x4x3x2x1}{5x4x3x2x1x1} = 6.$

Assim, verificamos que o total de permutações com repetição ou combinações completas pode ser obtido associando a fórmula de permutação com repetição aos elementos da equação $x_1 + x_2 = 5$, que representa a adição de dois inteiros não negativos cujo total é igual a 5. A relação pode ser construída da seguinte forma: seja m = 5 o valor da soma e n = 2 o total de parcelas. Portanto, para chegarmos ao total de seis símbolos como representados na forma pictórica, basta adicionarmos m + n e subtrairmos 1, ou seja, m + n – 1 = 5 + 2 – 1 = 6. Na representação pictórica, temos cinco símbolos repetidos do tipo | que podem ser associados ao valor da soma da equação, que, neste caso, é m = 5. E, como temos um símbolo do tipo +, este pode ser associado ao número de parcelas menos um, que, neste caso, é n = 2, o que nos fornece a subtração n – 1 = 2 – 1 = 1.

Com base nesse entendimento relacional, é possível construir uma relação entre as permutações com a representação pictórica e a fórmula que nos fornece a permutação de (m + n - 1) elementos com repetição de m elementos e de (n - 1) elementos, que é dada simbolicamente como $P_{m+n-1}^{m\,,n-1} = \frac{m!}{m!(n-1)!}$, em que *m* representa o valor total da soma e *n* o número de parcelas, o que nos dá $P_{5+2-1}^{5\,,2-1} = P_6^{5,1} = \frac{6!}{5!1!} = \frac{6x5x4x3x2x1}{5x4x3x2x1x1} = 6.$

É importante que essas ideias mais elementares de associar as representações pictóricas com as adições sejam trabalhadas desde o ensino fundamental. Pesquisadores como Silva (2019) e autores como Dante (2016a) já estimulam esse tipo de raciocínio desde os anos iniciais, como pode ser observado no problema do murinho, apresentado na Figura 5.

Figura 5: Problema do murinho



Fonte: (DANTE, 2016a, p. 134, 1.º ano, Livro do professor)

Essas estratégias intuitivas de contagem propostas por Dante (2016a) neste livro didático também são sugeridas por Borba (2010, 2013), Pessoa e Borba (2009, 2010) e no documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017). Ademais, a

BNCC para o ensino médio orienta os professores a desenvolverem com os alunos habilidades que envolvam a resolução e a elaboração de problemas de contagem, envolvendo diferentes tipos de agrupamentos por meio dos princípios multiplicativos e aditivo. Portanto, professores e pesquisadores devem provocar seus estudantes em todos os níveis escolares a pensar em como registrar as possibilidades, contagens e outros procedimentos que estiverem explorando em tarefas e problemas matemáticos.

Em turmas de licenciatura, seria o momento de professor e estudantes dialogarem sobre todas as etapas registradas no exemplo, que foi sintetizado no Quadro 3, e conversarem sobre esses resultados e generalizações para verificar se, de fato, a maioria dos estudantes entende tudo que foi feito e por quê. Também seria válido que professores levassem tarefas como mencionamos que licenciandos resolveram na pesquisa de Silva (2014), para que outros estudantes analisassem o que está adequado ou inadequado nos registros, conclusões e soluções de ambos os licenciandos citados ou de outros da pesquisa de 2014 ou outras investigações.

Ademais, para auxiliar estudantes no processo de compreensão e resolução de problemas, professores precisam pensar em outra heurística importante, que é graduar o nível de dificuldade de problemas e tarefas trabalhados em aulas. Assim, devem iniciar com problemas simples para depois explorarem problemas mais complexos, pois isso pode colaborar em entendimento das situações apresentadas e ampliar o uso de ideias intuitivas no processo de resolução. Para fins de exemplificação, vamos agora trabalhar com um problema semelhante ao da adição de duas parcelas com resultado total 5, porém agora queremos encontrar valores inteiros não negativos de 0 até 10, para efetuar adições de duas parcelas com soma igual a 10. Isto é, queremos pensar em números $x_1 e\, x_2,$ tais que $x_1 + x_2 = 10.$ Professor de combinatória pode estimular seus estudantes universitários a fazer registros similares aos feitos no Quadro 3 ou outros registros e tentativas como na Figura 4. Podem pensar em usar cores para representar ou diferenciar as possibilidades de registro de soluções. Após alguns minutos em que universitários tentem resolver tarefas como esta, o professor pode solicitar que alguns coloquem, no quadro de aula, os registros que fizeram que podem ser semelhantes aos que trazemos no Quadro 4. Nesse quadro, trazemos as adições e as respectivas representações pictóricas de modo semelhante ao que mostramos no caso anterior do Quadro 3.

Quadro 4: Adição de números inteiros não negativos cujo resultado da soma é igual a 10

X_1	+	X_2	=	10	Representação Pictórica	Total de permutações/Total de possibilidades
0	+	10			+ ||||||||||	$\frac{11!}{10!\,1!} = 11$
10	+	0			|||||||||| +	
1	+	9			| + |||||||||	
9	+	1			||||||||| + |	
2	+	8			|| + ||||||||	
8	+	2			|||||||| + ||	
3	+	7			||| + |||||||	
7	+	3			||||||| + |||	
4	+	6			|||| + ||||||	
6	+	4			|||||| + ||||	
5	+	5			||||| + |||||	

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Se compararmos o problema de adição de dois números inteiros não negativos com a soma dando o total 5, verificamos que ele é mais simples do que esse problema de adição de dois números não negativos, cuja soma dá o total 10. Esse segundo problema com adições com soma igual a 10 é mais trabalhoso e complexo, pois aumenta o número de possibilidades, de registros e exige maior sistematização. Notamos que o problema com soma igual a 10 exige que os alunos tenham várias habilidades já desenvolvidas para resolvê-lo. Eles precisam compreender agrupamentos não ordenados e saber enumerar sistematicamente para garantir que encontraram todas as possibilidades. Ademais, devem prestar atenção nas três restrições estabelecidas no enunciado desse problema, a saber: (a) pensar em adição de duas parcelas, (b) pensar em usar número de 0 a 10, (c) pensar que sempre deve dar soma igual a 10. Os agrupamentos devem ser feitos combinando o valor da soma, daí a importância de ter trabalhado com um problema mais simples para construir, com os alunos, algumas estratégias de resolução. Quando essas restrições citadas e relações são dialogadas com os estudantes durante o processo de construção do entendimento relacional, elas podem contribuir para minimizar aparecimento de dúvidas e erros. Por exemplo, o estudante esquecer de registrar as duas possibilidades que temos de adicionar dois números dando soma 10, por acharem que é a mesma adição e podem usar a propriedade comutativa. Já tivemos licenciandos na pesquisa de Silva (2014) que achavam que, tendo registrado 0 + 10, nem seria preciso registrar 10 + 0. Ou seja, estariam cometendo um erro de ordem, que consiste em confundir os critérios de combinações e variações, considerando se a ordem dos elementos é irrelevante ou não e a omissão de possibilidades, quando o aluno resolve sem um procedimento recursivo que conduz à formação de todas elas.

Usar diferentes representações e estratégias de apresentação do problema e de sua resolução é fundamental para a compreensão e o desenvolvimento de intuições secundárias matemáticas também em aulas na graduação, ou seja, intuições desenvolvidas por meio da academia (FISCHBEIN, 1975). Sobre esse aspecto, Santos-Wagner (2008) apresenta as seguintes orientações:

> a) Trabalhar com problemas mais simples; b) usar números mais simples; c) procurar regularidades; d) fazer desenhos, esquemas ou diagramas para entender e resolver a atividade; e) organizar os dados do problema e construir uma tabela com os mesmos; f) trabalhar de trás para frente; g) dar palpites para resolver a situação, etc. Aqui a preocupação do professor é em explorar com os alunos as estratégias gerais e as estratégias de apoio. A outra preocupação do professor é em explorar e trabalhar com as quatro fases de resolução de problemas segundo Polya, que são: leitura e compreensão do problema; planejamento e implementação de ações para resolver o problema; tentativas de resolução segundo os planos identificados; verificação da solução e análise da solução. Ou seja, o professor procura no ensino em matemática sobre resolução de problemas incentivar os alunos a aprenderem: (i) as várias estratégias de resolução de problemas; (ii) as quatro fases de Polya; e (iii) discutirem sobre como resolveram os problemas (SANTOS-WAGNER, 2008, p. 59).

Nos problemas com soma total igual a 5 e com soma total igual a 10, ao mesmo tempo que são apresentadas as possibilidades com a representação das barrinhas e do sinal operador da adição, também é explorado o cálculo aritmético das parcelas. Se analisarmos essas estratégias de resolução adotadas nos dois problemas, verificaremos que isso possibilita o entendimento relacional para uma construção de uma padronização do cálculo de possibilidades de problemas envolvendo permutações com repetições para encontrar o total de soluções possíveis. Essa relação entre a aritmética e a representação pictórica contribui para que os alunos ampliem suas ideias intuitivas, para resolver problemas matemáticos, como argumentava Fischbein (1975) e como foi observado nas pesquisas de Silva (2014; 2019) e Zanon (2019).

Outro aspecto importante no processo de desenvolvimento heurístico na resolução de problemas combinatórios é desenvolver tarefas que envolvam o raciocínio combinatório e estimulem os estudantes a desenvolver também o pensamento algébrico. Vamos trabalhar agora com a sistematização ou regularidades de tarefas semelhantes àquela cuja soma é igual a 5 e semelhante àquela cuja soma é igual 10, porém aumentando o grau de complexidade. Inicialmente vamos calcular o total de possibilidades de soluções da adição de dois números inteiros não negativos, cujo resultado é menor ou igual a 5. Esse problema equivale a resolver a inequação $x_1 + x_2 \leq 5$, com x_1 e x_2 não negativos. Isso nos leva a encontrar o conjunto de soluções das equações:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 + x_2 = 0 & \quad x_1 + x_2 = 3 \\
x_1 + x_2 = 1 & \quad x_1 + x_2 = 4 \\
x_1 + x_2 = 2 & \quad x_1 + x_2 = 5
\end{array}
$$

Procedendo de modo semelhante ao que foi desenvolvido nos Quadros 3 e 4, vamos calcular as soluções de cada uma das equações associando a representação pictórica com a fórmula de permutação com elementos repetidos e generalizando as partições de cada uma das equações com os valores totais das igualdades, conforme pode ser observado no Quadro 5.

Quadro 5: Soluções da inequação $x_1 + x_2 \leq 5$

<table>
<tr><th colspan="5">Equações/Adições</th><th>Representação Pictórica</th><th>m</th><th>n</th><th>Total de permutações</th><th>Relação da equação com a representação pictórica</th></tr>
<tr><td>x_1</td><td>+</td><td>x_2</td><td>=</td><td>0</td><td></td><td>0</td><td>2</td><td>$\frac{(\text{nº total de símbolos})!}{(\text{nº de símbolos }|)!\,(\text{nº de símbolos }+)!}$</td><td>$\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>=</td><td>0</td><td>+</td><td></td><td></td><td>$\frac{1!}{0!\,1!}=1$</td><td>$\frac{(0+2-1)!}{0!\,(2-1)!}$</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>+</td><td>x_2</td><td>=</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>$\frac{(\text{nº total de símbolos})!}{(\text{nº de símbolos }|)!\,(\text{nº de símbolos }+)!}$</td><td>$\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>+</td><td>1</td><td>=</td><td>1</td><td>+|</td><td></td><td></td><td rowspan="2">$\frac{2!}{1!\,1!}=2$</td><td rowspan="2">$\frac{(1+2-1)!}{1!\,(2-1)!}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>+</td><td>0</td><td>=</td><td>1</td><td>|+</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>+</td><td>x_2</td><td>=</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td>2</td><td>$\frac{(\text{nº total de símbolos})!}{(\text{nº de símbolos }|)!\,(\text{nº de símbolos }+)!}$</td><td>$\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>+</td><td>2</td><td>=</td><td>2</td><td>+||</td><td></td><td></td><td rowspan="3">$\frac{3!}{2!\,1!}=3$</td><td rowspan="3">$\frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>+</td><td>0</td><td>=</td><td>2</td><td>||+</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>+</td><td>1</td><td>=</td><td>2</td><td>|+|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>+</td><td>x_2</td><td>=</td><td>3</td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>$\frac{(\text{nº total de símbolos})!}{(\text{nº de símbolos }|)!\,(\text{nº de símbolos }+)!}$</td><td>$\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>+</td><td>3</td><td>=</td><td>3</td><td>+|||</td><td></td><td></td><td rowspan="4">$\frac{4!}{3!\,1!}=4$</td><td rowspan="4">$\frac{(3+2-1)!}{3!\,(2-1)!}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>+</td><td>0</td><td>=</td><td>3</td><td>|||+</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>+</td><td>1</td><td>=</td><td>3</td><td>||+|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>+</td><td>2</td><td>=</td><td>3</td><td>|+||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>+</td><td>x_2</td><td>=</td><td>4</td><td></td><td>4</td><td>2</td><td>$\frac{(\text{nº total de símbolos})!}{(\text{nº de símbolos }|)!\,(\text{nº de símbolos }+)!}$</td><td>$\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>+</td><td>4</td><td>=</td><td>4</td><td>+||||</td><td></td><td></td><td rowspan="5">$\frac{5!}{4!\,1!}=5$</td><td rowspan="5">$\frac{(4+2-1)!}{4!\,(2-1)!}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>+</td><td>0</td><td>=</td><td>4</td><td>||||+</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>+</td><td>3</td><td>=</td><td>4</td><td>|+|||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>+</td><td>1</td><td>=</td><td>4</td><td>|||+|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>+</td><td>2</td><td>=</td><td>4</td><td>||+||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>+</td><td>x_2</td><td>=</td><td>5</td><td></td><td>5</td><td>2</td><td>$\frac{(\text{nº total de símbolos})!}{(\text{nº de símbolos }|)!\,(\text{nº de símbolos }+)!}$</td><td>$\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>+</td><td>5</td><td>=</td><td>5</td><td>+|||||</td><td></td><td></td><td rowspan="6">$\frac{6!}{5!\,1!}=6$</td><td rowspan="6">$\frac{(5+2-1)!}{5!\,(2-1)!}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>+</td><td>0</td><td>=</td><td>5</td><td>|||||+</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>+</td><td>4</td><td>=</td><td>5</td><td>|+||||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>+</td><td>1</td><td>=</td><td>5</td><td>||||+|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>+</td><td>3</td><td>=</td><td>5</td><td>||+|||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>+</td><td>2</td><td>=</td><td>5</td><td>|||+||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Total de possibilidades</td><td>21</td><td></td><td></td><td>$1+2+3+4+5+6=21$</td><td>$\sum_{0\leq m\leq 5}\frac{(m+2-1)!}{m!\,(2-1)!}$</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Após a construção do entendimento relacional entre as soluções do conjunto de equações que satisfazem a inequação $x_1 + x_2 \leq 5$, podemos ampliar a compreensão desse tipo de problema para uma fórmula mais geral. Calculemos o total de possibilidades de soluções da adição de $\boldsymbol{n}$ números inteiros não negativos, cujo resultado é menor ou igual a $\boldsymbol{m}$.

Para resolver a inequação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \leq m$, devemos resolver o conjunto de equações $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = k$, com $0 \leq k \leq m$ e $k \in \mathbb{Z}^+$, conforme pode ser observado no quadro a seguir.

Quadro 6: Solução geral da inequação

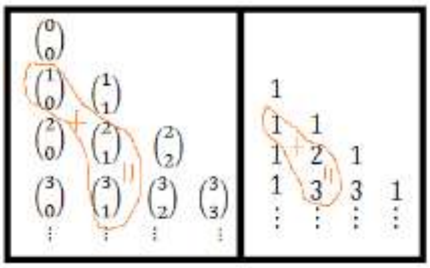
X_1	+	X_2	+	$\cdots$	+	X_n	$\leq$	m	Permutação	Total de permutações
X_1	+	X_2	+	$\cdots$	+	X_n	=	0	$\frac{(0+n-1)!}{0!\,(n-1)!}$	$\sum_{0 \leq i \leq m} \frac{(i+n-1)!}{i!\,(n-1)!} = \binom{m+n}{m}$
X_1	+	X_2	+	$\cdots$	+	X_n	=	1	$\frac{(1+n-1)!}{1!\,(n-1)!}$	
X_1	+	X_2	+	$\cdots$	+	X_n	=	2	$\frac{(2+n-1)!}{2!\,(n-1)!}$	
X_1	+	X_2	+	$\cdots$	+	X_n	=	3	$\frac{(3+n-1)!}{3!\,(n-1)!}$	
X_1	+	X_2	+	$\cdots$	+	X_n	=	4	$\frac{(4+n-1)!}{4!\,(n-1)!}$	
X_1	+	X_2	+	$\cdots$	+	X_n	=	5	$\frac{(5+n-1)!}{5!\,(n-1)!}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
X_1	+	X_2	+	$\cdots$	+	X_n	=	m	$\frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$	

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Para encontrarmos o total de possibilidades que satisfazem a inequação apresentada, é necessário somarmos cada uma das combinações completas obtidas de cada uma das equações. Se fizermos uma pequena pausa e retornarmos ao período histórico, vamos observar que o resultado da adição das combinações que estamos procurando trata da soma de diagonais do triângulo aritmético, cujo nome, de acordo com Biggs (1979), se deve ao uso da disposição dos números numa matriz que é construída, tomando cada novo número como a soma dos dois números imediatamente acima dele.

Esse triângulo posteriormente passou a ser chamado de triângulo de Pascal (BIGGS, 1979), devido às formalizações matemáticas desenvolvidas por Blaise Pascal por volta de 1654. No triângulo aritmético, a soma dos primeiros elementos de uma diagonal é igual ao elemento que está imediatamente abaixo da última parcela, conforme se mostra na figura a seguir.

Figura 6: Soma da diagonal de um triângulo aritmético



Fonte: Elaborada pelos pesquisadores

Se somarmos o elemento da diagonal que está na linha 1 e na coluna 0 (1) com o elemento que pertence à linha 2 e à coluna 1 (2), pertencente a essa mesma diagonal, obteremos o elemento que está na linha 3 e na coluna 1 (3), ou seja, está logo abaixo do elemento da linha 2, que foi somado nessa diagonal em questão. Também é importante que o professor construa, com os universitários, a relação entre as combinações e os elementos que formam o triângulo aritmético.

Figura 7: Triângulo aritmético

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6	Coluna 7
Linha 0	1							
Linha 1	1	1						
Linha 2	1	2	1					
Linha 3	1	3	3	1				
Linha 4	1	4	6	4	1			
Linha 5	1	5	10	10	5			
Linha 6	1	6	15	20	15	6		
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1

Fonte: Elaborada pelos pesquisadores

Se compararmos esse procedimento das somas dos elementos da diagonal de um triângulo aritmético com os resultados obtidos no conjunto de soluções do Quadro 5, em que o total de possibilidades foi 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, observaremos que o total de soluções do problema da adição de dois números inteiros não negativos, cujo resultado é inferior ou igual a 5, pode ser obtido de modo simplificado, relacionando o triângulo de Pascal com as soluções apresentadas. O número 21, que aparece no triângulo de Pascal, pode ser interpretado como o resultado dos elementos da diagonal em destaque, na Figura 7, que está localizado na linha 7 e na coluna 5. Portanto, ele é o resultado da combinação de sete elementos tomados 5 a 5, isto é, $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7x6}{2} = \frac{42}{2} = 21$. É claro que, pelas nossas pesquisas realizadas e por nossa experiência como docentes com graduandos em Matemática, é importante que essa constatação seja praticada com outros valores.

Para calcularmos a combinação de sete elementos tomados 5 a 5, em que 7 é o número da linha do último elemento somado na diagonal, acrescido de uma unidade, e 5 representa a coluna em que está localizado esse último elemento somado na diagonal, realizamos o seguinte procedimento matemático:

$$\binom{linha\ do\ último\ elemento\ somado\ na\ diagonal\ diagonal+1}{coluna\ do\ último\ elemento\ somado\ na\ diagonal} = \binom{6+1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21.$$

Uma vez compreendido que há relação entre o conjunto de soluções e o triângulo de Pascal, é possível construir a seguinte relação entre esse triângulo e a inequação apresentada. A linha do último elemento somado na diagonal, linha 6, pode ser obtida por meio da adição m + n -1 = 5 + 2 -1 = 6, em que m = 5 é o valor máximo da desigualdade e n = 2 é o número de parcelas da inequação. Desse modo, para obtermos a linha 7, que é a linha em que se encontra o elemento que procuramos, fazemos m + n – 1 + 1 = 5 + 2 – 1 + 1= 7. Assim construímos a relação de igualdade entre o número de possibilidades da inequação estudada com a soma dos elementos da diagonal do triângulo de Pascal, ou seja, $\binom{m+n-1+1}{5} = \binom{5+2-1+1}{5} = \binom{6+1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21$

Isso vale também para outras situações. Retornando ao problema geral, apresentado no Quadro 6, da inequação e associando com o teorema das diagonais do triângulo aritmético, podemos observar que as somas das combinações das equações serão obtidas por uma combinação do elemento que está na linha (*m*+*n*-*1*) acrescido de uma unidade e na coluna *m*; logo, o total de possibilidades é dado por $\binom{m+n-1+1}{m} = \binom{m+n}{m}$.

É importante que estudantes de graduação saibam relacionar as operações e propriedades fundamentais de aritmética, álgebra e geometria presentes na estrutura do texto e de resolução de um problema combinatório. Apenas quando universitários entenderem e analisarem os enunciados dos problemas combinatórios e dialogarem sobre os textos entendidos e o modelo implícito em cada problema combinatório, eles serão capazes de resolver problemas com entendimento instrumental e relacional (SKEMP, 1976). Argumentamos, assim, pois é necessário que os graduandos em Matemática dominem as operações aritméticas e saibam identificar e construir regularidades.

Depois que trabalhamos com problemas dos mais simples para os mais complexos e com regularidades ou padrões combinatórios, retornamos ao nosso problema inicial da mochila. Usando uma linguagem matemática moderna, esse problema pode ser enunciado da seguinte forma: Suponha que se tenha uma mochila com capacidade total $\boldsymbol{C}$ e uma quantidade de itens distintos. Sejam $x_{1,} x_{2,}\ x_3\ e\ x_4$ os itens disponíveis para serem carregados, cada um com o respectivo peso $p_{1,}\ p_{2,}\ p_{2,} e\ p_4,$ e valor $v_{1,} v_{2,} v_3\ e\ v_{4,}$. Para maximizar o valor da mochila, torna-se necessário verificar a combinação dos itens $x_{i,}$ considerando o valor v_i e os pesos p_i e atendendo à restrição do peso que a mochila suporta. De modo geral, maximizar o valor da mochila significa maximizar a seguinte inequação $\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$, sujeito a $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq C$, onde $x_i \in \mathbb{Z}^+$, ou seja, encontrar os itens disponíveis que tenham os maiores valores monetários, mas que sejam possíveis de ser carregados, de modo que não ultrapassem o limite de peso que a mochila suporta. Neste momento, é interessante explorar tarefas que envolvam o raciocínio combinatório em que os alunos evidenciem que dominam conceitos matemáticos já estudados, a fim de desenvolver novos processos de raciocínio combinatório, fazendo conexões com outros campos de conhecimento.

Em primeiro lugar, precisamos encontrar todas as soluções inteiras não negativas que satisfazem a inequação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 4$, em que x_i representa os itens disponíveis e 4 a quantidade máxima de unidades que ele pode levar. Em seguida, devemos verificar quais soluções da inequação atendem à restrição peso e descartar as que não atendem à restrição imposta no problema, param, em seguida, analisar aquela que melhor maximiza o valor da mochila. Neste caso, temos de encontrar as soluções das seguintes equações:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \rightarrow \frac{4!}{1!3!} = 4 \text{ combinações}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \rightarrow \frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ combinações}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \rightarrow \frac{6!}{3!3!} = 4 \text{ combinações}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \rightarrow \frac{8!}{4!4!} = 70 \text{ combinações}$$

Estamos desconsiderando a possibilidade de a mochila estar vazia, uma vez que queremos maximizar o peso que será carregado na mochila. Apresentamos as soluções na Figura 8 a seguir, obtidas das combinações das três primeiras equações, utilizando a multiplicação de matrizes.

Figura 8: Produto de matrizes para a análise da capacidade

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Fonte: Elaborada pelos pesquisadores

Descartamos as linhas das matrizes dos itens que geraram peso superior ao estabelecido, ou seja, todas as linhas cujos valores aparecem em verde são maiores do que 4, e calculamos a maximização da mochila com as linhas que sobraram da matriz dos itens.

Figura 9: Produto de matrizes para a análise do valor máximo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 16 \\ 12 \\ 11 \\ 18 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ \boxed{19} \\ 15 \end{bmatrix}$$

Fonte: Elaborada pelos pesquisadores

Ao analisarmos o conjunto de soluções, podemos observar que a melhor solução para o excursionista seria levar duas unidades do item 3 e uma unidade do item 4, pois gera uma maximização de R$ 19,00 com “peso” total igual a 4kg, como pode ser observado na multiplicação de matrizes (destacada) na Figura 9. Descartamos o cálculo da matriz gerada pela última equação, pois uma análise preliminar permite-nos verificar que a única possibilidade que atenderia à restrição do peso seria carregar quatro unidades do item três que resultaria num peso total de 4kg e valor máximo de R$ 20,00, porém só há três unidades de cada item conforme o enunciado do problema. Além disso, teríamos de testar 70 combinações para verificar todas as possibilidades. Isso nos mostra a importância de aprofundar os estudos de combinatória na graduação, utilizando métodos de resolução computacionais. Uma possível solução para o problema apresentado pode ser dada pelo código a seguir, desenvolvido na linguagem de programação Python.

Figura 10: Problema da mochila implementado em Python

```
from __future__ import print_function
from ortools.linear_solver import pywraplp
def main():
    # Create the mip solver with the CBC backend.
    solver = pywraplp.Solver('simple_mip_program',

pywraplp.Solver.CBC_MIXED_INTEGER_PROGRAMMING)

    infinity = solver.infinity()
    # x and y are integer non-negative variables.
    x = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x')
    y = solver.IntVar(0.0, infinity, 'y')
    z = solver.IntVar(0.0, infinity, 'z')
    w = solver.IntVar(0.0, infinity, 'w')

    print('Number of variables =', solver.NumVariables())

    # 2*x + 3*y + 1*z +2*w <= 4.
    solver.Add(2*x + 3*y + 1*z + 2*w <= 4)

    # x , y, z, w <= 3.
    solver.Add(x <= 3)
    solver.Add(y <= 3)
    solver.Add(z <= 3)
    solver.Add(w <= 3)

    print('Number of constraints =',
solver.NumConstraints())
    # Maximize 7*x + 6*y + 5*z + 9*w.
    solver.Maximize(7*x + 6*y + 5*z + 9*w)

    status = solver.Solve()

    if status == pywraplp.Solver.OPTIMAL:
        print('Solution:')
        print('Objective value =',
solver.Objective().Value())
        print('x =', x.solution_value())
        print('y =', y.solution_value())
        print('z =', z.solution_value())
        print('w =', w.solution_value())
    else:
        print('The problem does not have an optimal
solution.')

    print('\nAdvanced usage:')
    print('Problem solved in %f milliseconds' %
solver.wall_time())
    print('Problem solved in %d iterations' %
solver.iterations())
    print('Problem solved in %d branch-and-bound nodes' %
solver.nodes())
if __name__ == '__main__':
    main()
```

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Os conceitos matemáticos, em especial os de combinatória tratados neste texto, são fundamentais para o desenvolvimento de algoritmos computacionais. O professor de matemática tem sido desafiado, a cada dia, a lidar com novas ferramentas computacionais e com problemas que evolvem diversas áreas de pesquisa. Além disso, em geral são os professores de matemática que atuam em cursos de Engenharia de Produção, Engenharia Ambiental, Engenharia Mecânica, entre outras áreas do conhecimento que exigem habilidades matemáticas e computacionais. Por isso, defendemos que, desde a graduação, os futuros professores de matemática tenham compreensão dos conceitos matemáticos e de ferramentas computacionais que os auxiliem em suas práticas docentes. Nesse sentido, defendemos uma heurística que dialogue a matemática com a própria matemática e com outras ciências.

Segundo Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p. 29), “o rigor matemático da combinatória e seu desenvolvimento formal requer uma grande quantidade de noções de álgebra abstrata”. Entre tais noções, de acordo com esses autores, citamos: noções de conjuntos, subconjuntos e operações com conjuntos; partição de um conjunto; produto cartesiano; relação binária; relação de equivalência; conjunto quociente, relação de ordem, grafo associado a uma relação binária; correspondências – aplicações: injetiva, sobrejetiva e bijetiva; cardinalidade de um conjunto e equipotência; comutatividade, elemento neutro, inverso, estruturas algébricas elementares, como grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais e homomorfismos. Compreendemos que o raciocínio combinatório precisa ser trabalhado por meio de problemas que envolvam ideias mais simples de agrupamentos para atividades que incluam ideias mais complexas e necessitem de outras noções matemáticas.

Concordamos com os trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Roa (2000), Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991), Borba, (2010, 2013) e Pessoa e Borba (2009, 2010), quando argumentam que a combinatória tem ligação com a aritmética, a álgebra, a geometria e outras áreas de conhecimento. Além disso, há necessidade de que o professor queira trabalhar integrando conceitos matemáticos, propondo aulas que conectem tarefas de combinatória com outros conteúdos e até mesmo reformulando o currículo escolar. Se professores trabalharem tarefas simples envolvendo ideias similares com esses conceitos matemáticos com seus estudantes, esses tipos de tarefas contribuirão para que eles desenvolvam estratégias de resolução de problemas que envolvam padrões aritméticos, algébricos, geométricos ou pictóricos.

Essa forma de pensar converge com as ideias de Skemp (1976), Santos (1997) e Santos-Wagner (2008), quando orientam professores a questionar sua forma de ensinar, de modo que o aluno compreenda e não apenas decore fórmulas ou procedimentos, além de chamar a atenção para aulas que motivem e provoquem alunos a aprender. Esses aspectos são relevantes e necessários para professores, pois refletem na maneira como eles avaliam seus alunos, avaliam e refletem acerca de seus procedimentos de ensino e de avaliação. Além disso, os pesquisadores Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) orientam que os professores desenvolvam com os alunos ações pedagógicas que contribuam para a sistematização de ideias que auxiliem nos processos de resolução de problemas combinatórios. Entre as orientações dos pesquisadores espanhóis, citamos: a) ajudar os alunos a desenvolver o raciocínio matemático, a capacidade de resolução, a formulação e a comunicação de ideias relacionando com outros tópicos de matemática e com outras áreas de conhecimento; b) usar diversos tipos de representações, validar soluções e comunicar a outros alunos; c) conduzir os alunos ao reconhecimento progressivo de seu conhecimento matemático; e d) flexibilizar o currículo adaptado à capacidade dos alunos.

Considerações finais

Iniciamos esta seção analisando nossa pergunta central: *Que estratégias heurísticas podem ser discutidas com estudantes universitários, ao resolverem problemas combinatórios?* É importante que o professor converse e discuta com os seus estudantes sobre os enunciados dos problemas. Do ponto de vista da compreensão de um problema de combinatória, é fundamental fazer perguntas intermediárias sobre os tipos de agrupamentos, a natureza dos objetos, as relações entre eles e os espaços em que se quer alocá-los. É necessário trabalhar de forma cautelosa, construindo o significado das relações entre a quantidade de possibilidades (contagem) e a exibição dessas possibilidades (enumeração), de modo que possamos auxiliar estudantes universitários no desenvolvimento de estratégias e/ou operações adequadas no processo de resolução de problemas combinatórios.

É necessário estimular os estudantes de graduação a pensar em como vão organizar os elementos e enumerar as possibilidades, quais casos devem ser eliminados, ou não, da contagem e construir associações com as operações matemáticas que podem ser estabelecidas para desenvolver padrões combinatórios. O aluno também deve ser capaz de identificar que tarefas mais simples podem auxiliar na construção de novas regularidades matemáticas e que outros conceitos ou tópicos matemáticos podem servir de ferramentas para a resolução dos problemas. Outra heurística necessária com os graduandos é sobre as soluções corretas e as soluções erradas, pois nem sempre os acertos garantem que houve a compreensão dos enunciados ou dos conceitos matemáticos. Do mesmo modo, o erro pode ocorrer por falta de atenção, por erro de interpretação ou pela falta de um recurso matemático que ajude a resolver de forma sistemática. Por isso, além de trabalhar com a resolução de problemas, torna-se imprescindível desenvolver atividades com alunos de graduação em que eles elaborem, resolvam e discutam sobre outros problemas semelhantes aos trabalhados pelo professor. Assim, os processos avaliativos de construção e consolidação de conhecimentos poderão ser mais bem investigados.

A sistematização da enumeração ou da forma de organizar os elementos é algo que precisa ser trabalhado com os universitários de forma gradual, ou seja, mediante tarefas das mais simples para as mais complexas. Os erros cometidos pelos alunos, ao resolverem problemas matemáticos, também podem estar relacionados ao uso inadequado de propriedades e fórmulas, ou ao entendimento incompleto e/ou instrumental de propriedades e fórmulas, entre outros motivos. Portanto, cabe ao professor provocar seus universitários a exibir intuições corretas e inadequadas em aulas para serem questionadas e comentadas pelos alunos e pelos professores e alunos. Se ignorarmos as intuições dos universitários sobre como resolver problemas de combinatória e se tais intuições não forem evocadas, discutidas ou sistematicamente suprimidas da mente dos universitários com argumentos e explicações matemáticas plausíveis, acreditamos que elas poderão ser usadas inadequadamente por eles em outras tarefas.

Referências

ALLEVATO, N. S. G. Trabalhar através da resolução de problemas: possibilidades em dois diferentes. **Vidya**, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 209-232, 2014.

ALVES, R. C. **O ensino de análise combinatória na educação básica e a formação de professores**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro. 2012.

ASSIS, A. M. R. B. **Conhecimentos de combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada**: reflexões e prática de uma professora. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação. Recife: Universidade Federal de Pernambuco. 2014.

BACHX, A. C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. **Prelúdio a análise combinatória**. 7. ed. São Paulo: Nacional, 1975.

BATANERO, C., GODINO, J., NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Editorial Síntese, S.A., 1996.

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Revista Historia Mathematica**. v. 6, p. 109-136, 1979.

BORBA, R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ENEM, 10., 2010, Salvador, BA, 2010. **Anais...**, Salvador, BA, 2010, p. 1-16.

BORBA, R. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - ENEM, 11., Curitiba, PR, 2013. **Anais...**, Curitiba, PR, 2013, p. 1-16.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: www.basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 10 mar. 2021.

COSTA, C. A. **As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2003.

D'AMBROSIO, B. S. O professor-pesquisador diante da produção escrita dos alunos. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 109-129.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014. v. 1.

DANTE, L. R. **Ápis**: alfabetização matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016a. v. 1.

DANTE, L. R. **Ápis**: alfabetização matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016b. v. 2.

DANTE, L. R. **Ápis**: alfabetização matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016c. v. 3.

DANTE, L. R. **Ápis**: matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016d. v. 1.

DANTE, L. R. **Ápis**: matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016e. v. 2.

DANTE, L. R. **Teláris**: matemática. 2. ed. São Paulo: Ática, 2016f. v. 1.

DEWEY, J. **Como pensamos**: como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo: uma reexposição. Tradução de Haydée Camargo Campos. 4. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979. v. 2 (Coleção Atualidades Pedagógicas).

EISENMANN, A. L. K. **IComb***:* um sistema para o ensino e aprendizagem de Combinatória em ambiente Web. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2009.

FISCHBEIN, E. **The Intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: D. Reidel,1975.

GODINO, J.; BATANERO, C. Implicaciones de la relaciones entre Epistemología e Instrucción Matemática para el Desarrollo Curricular: el caso de la Combinatoria. **La matematica e la sua didattica**, n. 24, p. 1-20, 2016.

GODINO, J.; BATANERO, C.; ROA, R. An onto-semiotic analyses of combinatorial problems and the solving processes by university students [Análisis onto-semiótico de problemas combinatorios y de su resolución por estudiantes universitários]. **Educational**

Studies in Mathematics, 60, p. 3-36, 2005.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar 5**: combinatória, probabilidade. 6. ed. São Paulo: Atual, 1993.

HIERRO, A. F. R. L.; BATANERO, C.; BELTRÁN-PELLICER, P. El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. ***Épsilon***, nº 100, p. 49-63, 2018.

LIMA, A. P. B. **Princípio Fundamental da Contagem**: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife: Universidade Federal de Pernambuco. 2015.

MACHADO, A. S. **Matemática, temas e metas**: sistemas lineares e análise combinatória. São Paulo: Atual, 1986.

MENDONÇA, L. **Trajetória hipotética de aprendizagem**: análise combinatória. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2011.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO; P. C. P., FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

ONUCHIC, L.R; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1.ª a 4.ª série. **Zetetiké**: Revista de Educação Matemática, Campinas, SP, v. 17, n. 31, p. 105-150, dez. 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Em Teia**: **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.1, n. 1, p. 1-22, 2010. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2182/1753. Acesso em: 10 ago. 2017.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. (A obra foi publicada originalmente em 1945.)

RIBEIRO, J. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2011. v. 2.

ROA, R. **Razonamiento combinatório em estudiantes com preparación matemática avanzada**. 2000. 196 f. Tese (Doutorado em Ciencias Matemáticas) – Granada: Universidad de Granada, 2000.

ROCHA, C. A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios**: diversos olhares, diferentes conhecimentos. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em

Educação Matemática e Tecnológica. Recife: Universidade Federal de Pernambuco. 2011.

SABO, R. D. **Saberes docentes**: a análise combinatória no ensino médio. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática. São Paulo: Universidade de São Paulo. 2010.

SANTOS, V. M. P. dos. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão. Instituto de Matemática/UFRJ, 1997.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 53, p. 43-74, jul./dez. 2008.

SILVA, J. C. T. **Reflexões sobre conhecimentos evidenciados por licenciandos em matemática por meio da elaboração de um jogo sobre análise combinatória**. Vitória, 2014. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

SILVA, J. C. T.; ZANON, T. X. D.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Enunciado de problema de combinatória: diferentes interpretações. In: IV SERP – Seminário Nacional de Resolução de Problemas e I SIRP – Seminário Internacional em Resolução de Problemas, 2017, Rio Claro. Perspectivas em Resolução de Problemas. **Anais...** Rio Claro: UNESP, 2017a. p. 1-2.

SILVA, J. C. T.; ZANON, T. X. D.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Conhecimento de professores em combinatória. In: SEMANA DE MATEMÁTICA, 6., Vitória, 2017. **Anais...** Vitória: IFES, 2017b. p. 24-26.

SILVA, J. C. T. da. **Um estudo de combinatória com alunos de 5º ano do ensino fundamental**. 2019. 345 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.

SKEMP, R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, n. 77, p. 20-26, 1976.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no Ensino Médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP. 2010.

TEIXEIRA, P. J. M. (2012). **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de problemas de contagem no ensino fundamental**. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. São Paulo: Universidade Bandeirante de São Paulo. 2012.

ZANON, T. X. D. **Imagens conceituais de combinatória no ensino superior de matemática**. 2019. 333 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.

ZANON, T. X. D.; SILVA, J. C. T.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Produção acadêmica em educação matemática acerca da análise combinatória de 2000 a 2015. In: ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUDESTE, 12., Vitória, 2016. **Anais...** Vitória, UFES, 2017. p. 3244-3260.

ZANON, T. X. D.; ZOGAIB, S. D.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos; SILVA, J. C. T. Achados em pesquisas de mestrados profissionais acerca da análise combinatória: quais temas? Quais avanços? In: SEMINÁRIO NACIONAL DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA, 7., Cachoeiro de Itapemirim, ES, 2016. Matemática e currículo: perspectivas e desafios atuais na formação de professores. **Anais...** Cachoeiro de Itapemirim, IFES, 2016, v. 1. p. 15-29.

Recebido em: 27 de outubro de 2020
Aprovado em: 22 de março de 2021