revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UM ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA UTILIZAÇÃO DE MATERIAL MANIPULÁVEL PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE RADIANO

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.20.127-152

Larissa Pereira Menezes[1]
Mônica Souto da Silva Dias[2]

Resumo: O presente artigo traz os resultados de uma pesquisa realizada no âmbito de um trabalho de conclusão de um curso de Licenciatura em Matemática, cujo objetivo geral foi investigar como se dá a influência da utilização do material manipulável na aprendizagem do conceito de radiano. Foi elaborada uma proposta didática com ênfase na utilização de material manipulável. Caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa e teve como instrumentos de coleta de dados a observação e os registros escritos dos estudantes durante a experimentação da proposta didática. Os sujeitos participantes da pesquisa foram nove estudantes de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública localizada em Niterói-RJ. O referencial teórico foi a Teoria dos Campos Conceituais e as considerações sobre o uso dos materiais manipuláveis. Ao término da investigação, conclui-se que a utilização dos materiais manipuláveis exerce grande motivação sobre o estudante, promovendo o seu envolvimento com a aula. Entretanto, sua utilização, ainda que com a mediação adequada do professor, não é suficiente para a construção do conceito de radiano. Conjectura-se que a complexidade do conceito de radiano, sua especificidade enquanto unidade de medida e a necessidade de outras situações envolvendo tal conceito tenham contribuído para esse fato.
Palavras-chave: Material Manipulável. Educação Matemática. Radiano. Círculo Trigonométrico.

A STUDY OF THE INFLUENCE OF THE USE OF MANIPULABLE MATERIAL FOR THE CONSTRUCTION OF THE CONCEPT OF RADIAN

Abstract: This article presents the results of a research carried out within the scope of a completion of a Bachelor´s Degree in Mathematics, whose main goal was investigate how the influence of the use of manipulable material occurs in the learning of the radian concept. A didactic proposal was elaborated with emphasis on the use of manipulable material. It is characterized as a qualitative research, had as tools the collect of data the students´observation, and written records during the experimentation of the didactic proposal. The subjects participating in the research were nine students from a class of the first year of high school at a public school located in Niterói-RJ. The theorical Reference was the Conceptual Field Theory and considerations on the use of manipulable materials.In the end of the investigation, it is concluded that the use of manipulable materials has a great motivation upon the student promoting his involvement with the class. However, its use, even with the proper mediation of the teacher, it is not enough for the construction of the radian concept. It is conjectured that the complexity of the concept of radian, its specificity as a unit of measurement and the need for other situations involving such concept has contributed to this fact.
Keywords: Manipulable Material. Mathematics Education. Radian. Circle Trigonometric.

Introdução

A Trigonometria é um ramo da Matemática que mescla a Geometria e a Álgebra,

[1] Mestranda do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática – Universidade Federal o Rio de Janeiro /UFRJ, E-mail: larissapm@id.uff.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9669-8073.
[2] Doutora em Educação Matemática, Universidade Federal Fluminense/UFF, E-mail: msoutodias@gmail.com - ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4071-0536.

relacionando os lados e os ângulos dos triângulos. Na escola, o estudo da Trigonometria, geralmente, inicia-se no nono ano do Ensino Fundamental II, com a Trigonometria Plana no Triângulo Retângulo e, em seguida, a Lei dos Senos e dos Cossenos. No primeiro ano do Ensino Médio, os professores relembram esses conteúdos e iniciam o Círculo Trigonométrico para posteriormente abordarem as Funções Trigonométricas.

Compreender esse conteúdo, estabelecendo as relações entre suas diferentes abordagens é essencial para que o estudante consiga construir os conceitos. Além de ser um assunto fundamental para os estudantes que pretendem continuar os estudos em um curso superior ligado às ciências exatas.

Para Vicente (2005, p.11), "Várias vezes os alunos têm a impressão de que o seno estudado no triângulo retângulo não é o mesmo estudado no círculo trigonométrico e que não está diretamente ligado ao estudo da função seno". Isso é realmente preocupante, pois mostra que o estudante, nesse caso, está apenas repetindo símbolos e fórmulas, sem correlacionar e compreender tais conceitos.

A experiência da primeira autora como bolsista do PIBID (Programa de Iniciação à Docência – 2015/2017) mostrou que um dos conteúdos que os estudantes mais apresentavam dúvidas era o Círculo Trigonométrico. Pensou-se na hipótese dessas dificuldades serem possivelmente uma consequência da aprendizagem de frações, da falta de significado sobre π radianos corresponder a 180° e das frações de π corresponderem a outros ângulos. As causas poderiam ser ainda, a ausência da compreensão da unidade radiano, do relacionamento do Círculo Trigonométrico com a Trigonometria no Triângulo Retângulo, de aplicações da teoria no cotidiano dos estudantes ou o conjunto de todos esses fatores citados.

Destaca-se aqui a importância do PIBID na formação inicial do professor. As atividades desenvolvidas no âmbito do programa, contemplam, dentre outras, a observação e acompanhamento com intervenção de aulas ministradas pelos professores supervisores. Tais ações possibilitam ao licenciando experienciar a docência numa dimensão distinta da que ocorre no estágio docente, uma vez que, no PIBID, o licenciando tem a oportunidade de atuar numa única turma por mais tempo e sob a orientação de um único supervisor, o que permite uma troca de conhecimentos mais intensa. As observações e as reflexões sobre as mesmas conduziram a primeira autora ao tema de seu trabalho de conclusão de curso, que é fruto do olhar voltado para as dificuldades dos alunos numa perspectiva da pesquisa.

Brigunte[3] (1994 *apud* Vicente, 2005) relatou que como inicialmente os estudantes

[3] BRIGUNTE, M. J. L. Ensino e aprendizagem da trigonometria: novas perspectivas da educação matemática. Dissertação de Mestrado, Rio Claro: UNESP, 1994

utilizam graus, minutos e segundos para medir ângulos, a introdução de uma nova unidade de medida angular, o radiano, pode gerar dificuldade, pois esta unidade está relacionada com um arco do Círculo Trigonométrico. Muitas vezes os estudantes não entendem que o arco pode ter medida linear (comprimento do arco, metros, quilômetros, centímetros etc.) e uma medida angular (medida do ângulo central em graus ou radianos).

A pesquisa de Feijó (2018) vai de encontro às observações e experiências aqui discutidas, pois os resultados revelaram que os erros cometidos pelos estudantes participantes da pesquisa estão em todos os ramos da Trigonometria, envolvendo as definições e conceitos. Feijó (2018) concluiu que a definição de radiano parece não existir para os estudantes, pois nenhum participante de sua pesquisa conseguiu apresentar uma definição verbal ou gráfica do mesmo. Este autor também aponta que os estudantes não mencionaram ter conhecimento sobre a Função de Euler, que é o ponto de partida para compreender as Funções Trigonométricas, fazendo uma conexão com o Círculo Trigonométrico.

O estudo aqui relatado buscou responder a seguinte questão de pesquisa: de que modo a utilização do material manipulável influencia a aprendizagem do conceito de radiano?

Teoria dos Campos Conceituais

Essa teoria foi desenvolvida por Gérard Vergnaud, para entender as condições nas quais o estudante compreende os significados dos saberes escolares[4]. Vergnaud (1990) deu suporte a sua pesquisa utilizando-se de situações envolvendo o estudo das operações aritméticas elementares.

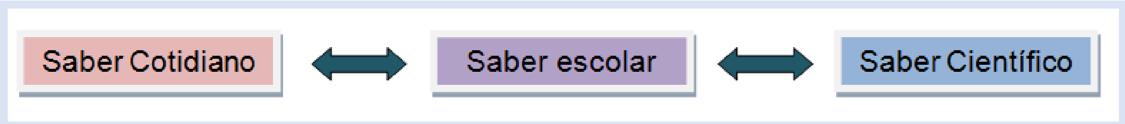
Destacando o tratamento do saber escolar, essa teoria permite uma forma diferenciada de compreender os conceitos matemáticos estudados na educação escolar, em relação ao ensino tradicional, que enfatiza a memorização e exercícios para a repetição de modelos. Buscando uma concepção não tão formal quanto a do território do saber científico[5] e sem permanecer na dimensão empírica do saber cotidiano[6]. Como o saber escolar está entre o saber cotidiano e o saber científico, a teoria dos campos conceituais permite atribuir aos conceitos um significado de natureza educacional (Figura 1) (PAIS, 2002).

[4] O saber escolar representa o conjunto dos conteúdos previstos na estrutura curricular das várias disciplinas escolares valorizadas no contexto da história da educação. Por exemplo, no ensino da matemática, uma parte dos conteúdos tem suas raízes na matemática grega, de onde provém boa parte de sua caracterização (PAIS, 2002, p.21).

[5] O saber científico está associado à vida acadêmica, embora nem toda produção acadêmica represente um saber científico. Trata-se de um saber criado nas universidades e nos institutos de pesquisas, mas que não está necessariamente vinculado ao ensino básico (PAIS, 2002, p.21).

[6] O saber cotidiano são os saberes que o aluno já aprendeu nas situações do mundo-da-vida (PAIS, 2002).

Figura 1: Fluxograma dos saberes



Fonte: As autoras.

Sendo assim, o ideal não é isolar o contexto de elaboração de uma noção, incumbindo à didática desenvolver situações em que intervenha não apenas um único conceito, mas uma diversidade deles.

Quando praticados de forma dinâmica e com certa continuidade, esses procedimentos de aprendizagem são denominados como estado de "apreendência", conforme termo utilizado por Assmann (1998). A "apreendência" se caracteriza por um estado de disponibilidade para que o sujeito coloque em funcionamento novos procedimentos de raciocínio, ao contrário de estar no modo automático de somente repetir modelos, fórmulas, algoritmos e ações automatizadas (PAIS, 2002).

No caso do Círculo Trigonométrico, a falta desse estado de "apreendência", ou seja, quando os estudantes apenas repetem os modelos sem dar significado a eles, pode ser um grande fator para a não compreensão dos conceitos relacionados a esse conteúdo.

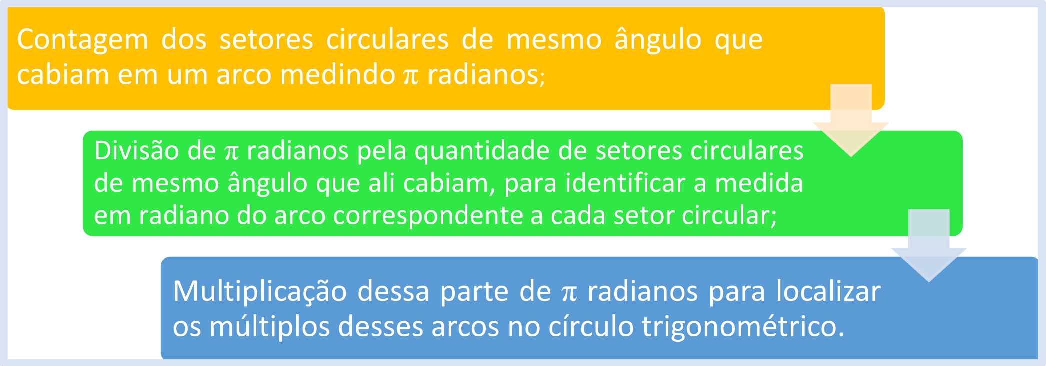
Invariantes e esquemas

A forma invariante como as atividades são estruturadas ou organizadas diante de uma classe de situações voltadas para a aprendizagem específica de um conceito está associada à noção de esquema. Assim, cada esquema se refere a uma classe específica de situações, que envolve tanto a dimensão experimental quanto racional vivenciada pelo estudante (PAIS, 2002).

Vergnaud (1990) considera o esquema como uma forma estruturada e invariante de organizar as atividades relacionadas à aprendizagem do conceito. O reconhecimento dos invariantes é fundamental para que a formação do conceito evolua.

Na segunda parte da atividade sobre o Círculo Trigonométrico, um bom exemplo dentro da noção de esquema foi observado após os estudantes terem entendido que o comprimento da metade de qualquer circunferência é igual a π radianos vezes o raio, independentemente do tamanho da circunferência. Com o auxílio do material manipulável com setores circulares de diversos ângulos, permaneceram invariantes as seguintes situações (Figura 2):

Figura 2: Esquema



Fonte: As autoras.

A construção do conceito

O grande desafio do Círculo Trigonométrico é a compreensão do conceito do radiano, apesar de ter uma definição – Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido (IEZZI, 2004, p.27) – ainda é bastante abstrato. Construir o significado de um conceito não pode ficar restrito a apenas uma definição, pois sua compreensão não pode ser reduzida ao estrito espaço de um texto formal.

Além de se tratar de uma nova medida que não é utilizada no cotidiano, a medida em radiano é uma invariante, pois para qualquer que seja o tamanho do círculo, um radiano é a medida do arco que tem comprimento igual ao raio da circunferência que contém tal raio. Muitas vezes a falta de profundidade nesse conceito, como em tantos outros, faz com que o estudante não chegue à abstração e à criatividade:

> A valorização da aprendizagem de conceitos não é uma prática facilmente encontrada na educação escolar. Há uma tendência tradicional na prática de ensino da matemática que valoriza, em excesso, a função de memorização de fórmulas, regras, definições, teoremas e demonstrações. Como consequência, os problemas propostos são, nesse caso, mais voltados para a reprodução de modelos do que para a compreensão conceitual (PAIS, 2002, p.56).

Pais (2002) destaca também que é preciso repensar essa tendência tradicional e despertar-se para uma educação mais significativa, principalmente em um mundo cada vez mais tecnológico e desenvolvido. Para que isso aconteça é importante o estudo da formação de conceitos e o reconhecimento do estado de devir[7] do conceito, que está sempre em formação, sempre se aproximando de sua objetividade, generalidade e universalidade.

É preciso que o professor leve em conta o estado de devir dos conceitos, pois esperar

[7] Estado de devir é o movimento evolutivo pelo qual a compreensão do conceito passa (PAIS, 2002).

que o estudante entenda inicialmente o significado abstrato de um conceito é uma ilusão. Para Vergnaud (1996 *apud* Pais, 2002), o sentido de um conceito está fortemente associado à atividade de resolução de problemas, pois é nesse contexto que o estudante pode desenvolver sua compreensão no sentido inicial dos conceitos e teoremas matemáticos. Porém, os problemas não podem estar restritos ao aspecto empírico, é relevante observar o nível cognitivo do estudante e adequar questões teóricas aos problemas:

> Um conceito é uma tríade que envolve um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; um conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito e um conjunto de significantes que podem representar os conceitos e as situações que permitem aprendê-los (VERGNAUD, 1996 *apud* PAIS, 2002, p.57).

Essa interpretação tem como objetivo principal, que o tratamento didático contribua para que os estudantes alcancem a dimensão conceitual, característica do saber escolar e científico. Nesse contexto, o conhecimento assume uma função adaptativa, caracterizada pela passagem do saber cotidiano ao saber escolar e deste para o saber científico, como já foi comentado anteriormente.

O conceito de radiano está associado a uma classe de objetos materiais, mas a generalidade e a abstração só podem ser compreendidas sendo abordadas por meio de um movimento evolutivo. Esse processo evolutivo caracteriza o estado de devir, onde o estudante amadurece a ideia e aumenta o seu nível cognitivo, tendo cada vez mais claro todos os aspectos importantes e profundos de determinado conceito (PAIS, 2002).

Além disso, precisamos observar que a formação de um conceito não acontece por meio de um único tipo de situação ou atividades pedagógicas envolvendo objetos e assuntos do cotidiano, ela envolve uma diversidade de conceitos:

> O desafio consiste em destacar os invariantes referentes ao conceito principal que conduz a aprendizagem no momento considerado, articulando-os com outros conceitos já aprendidos pelo aluno. De posse dos conceitos já elaborados, o aluno é desafiado a compreender outras situações, onde aparecem os novos conceitos e novos invariantes (PAIS, 2002, p.60).

Realizar ligações e interações entre diferentes conceitos, também contribui para o avanço do estado de devir dos conceitos, no sentido de que quando o estudante faz a conexão entre conceitos, ele pode compreender ainda melhor um conceito anterior. Nesse contexto, Pais (2002) sintetiza a Teoria dos Campos Conceituais como uma teoria que fornece uma fundamentação para o significado dos saberes escolares, pois a aprendizagem não pode ser efetuada em um contexto isolado, como se pudesse subsistir por si mesmo.

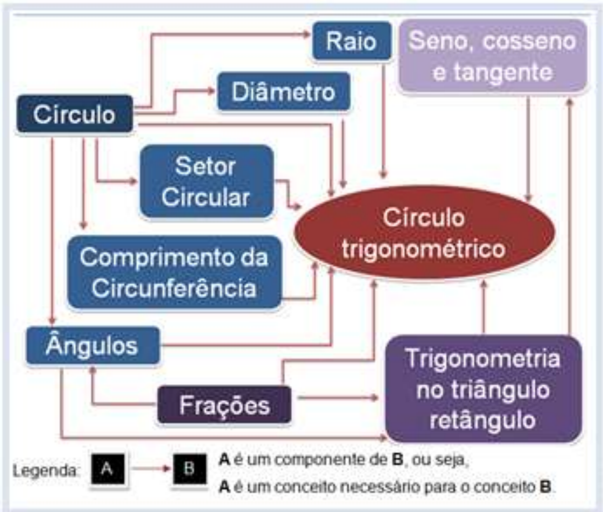
A compreensão do Círculo Trigonométrico envolve a formação de vários conceitos e ainda necessita de componentes anteriores. Esses componentes anteriores, de acordo com Vergnaud, são noções fundamentais ou conceitos concebidos anteriormente (PAIS, 2002). No caso do Círculo Trigonométrico, podemos destacar como componentes precedentes, os seguintes conceitos (Figura 3):

Figura 3: Cadeia de formação de conceitos

Fonte: As autoras.

Esses componentes citados acima, também dependem de outros conceitos, assim como o Círculo Trigonométrico será um componente para conceitos posteriores. Portanto é concebida uma cadeia de formação de conceitos, na qual estão sempre interligados e conectados (Figura 4):

Figura 4: Cadeia de formação de conceitos



Fonte: As autoras

Para Vergnaud[8] (1990 *apud* MUNIZ, 2009), modificar o "olhar" do indivíduo acerca do sistema conceitual, requer agir sobre a base conceitual. Ou seja, trazendo novos conceitos, revendo os antigos, desconstruindo-os, promovendo o desenvolvimento conceitual, procedimental e profissional.

Na atividade aplicada, buscou-se por estratégias que pudessem promover a construção dos conceitos necessários relacionados ao conceito do Círculo Trigonométrico. Optou-se pela utilização do material manipulável, para tornar mais acessível à compreensão do estudante. Pois, de acordo com a proposta da Teoria dos Campos Conceituais, a partir do empirismo, o estudante é levado a iniciar o processo de abstração dos conceitos matemáticos, mas não é em todo caso que isso é possível.

Assim o material manipulável é utilizado dentro da proposta de Vergnaud de se apropriar do saber cotidiano do estudante para chegar ao saber escolar e então poder desenvolver o saber científico. Dentro desse contexto, a compreensão do radiano destaca-se como um dos conceitos principais e mais difíceis de serem construídos (FEIJÓ, 2018).

Essa dificuldade com a compreensão do conceito pode partir do princípio da própria definição não ser tão clara para o estudante, por conter a inserção de uma nova unidade de medida para ângulos planos (que não é utilizada no dia a dia do estudante) e por se tratar de um invariante. Além disso, como evidencia Feijó (2018), o descaso com a geometria por parte do currículo escolar, dos livros didáticos e também dos professores de Matemática pode ser fator influenciador para a falta de entendimento dos estudantes.

Material Manipulável

Com o objetivo de fomentar a participação dos estudantes durante a atividade e facilitar a construção dos conceitos, optou-se por utilizar o material manipulável elaborado. Reys[9] (1971 *apud* MATOS; SERRAZINA, 1996 p.196) define materiais manipuláveis como: "Objetos ou coisas que o estudante é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia".

Muitos autores corroboram o valor didático do material manipulável nas aulas de Matemática, como veremos a seguir, inclusive os Parâmetros Curriculares de Matemática

[8] VERGNAUD, Gérard. La théorie de champs conceptuels. Recherches em Didactique de Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage. 1990, vol 10, n° 2.3, PP. 133-170.
[9] REYS, Robert E. Considerations for teaching using manipulative materials. In Arithmetic Teacher, 1971.

(BRASIL, 1998), mesmo para os estudantes do Ensino Médio:

> Para o aprendizado científico, matemático e tecnológico, a experimentação, seja ela de demonstração, seja de **observação e manipulação de situações e equipamentos** do cotidiano do aluno e até mesmo a laboratorial, propriamente dita, é distinta daquela conduzida para a descoberta científica e **é particularmente importante quando permite ao estudante, diferentes e concomitantes formas de percepção qualitativa e quantitativa, de manuseio, observação, confronto, dúvida e de construção conceitual**. A experimentação permite ainda ao aluno a tomada de dados significativos, com as quais possa verificar ou propor hipóteses explicativas e, preferencialmente, fazer previsões sobre outras experiências não realizadas (BRASIL, 1998, p. 52. Grifo da autora).

Além dos PCN (BRASIL, 1997), a da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) para o Ensino Médio, também defende a utilização do material manipulável, mesmo no Ensino Médio:

> Os estudantes deverão ser capazes de fazer induções por meio **de investigações e experimentações com materiais concretos**, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais. Assim, ao formular conjecturas, mediante suas investigações, eles deverão buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. **Essa validação não precisa ser feita apenas com argumentos empíricos**, mas deve incluir também argumentos mais “formais”, sem que haja necessidade de chegarem à demonstração de diversas proposições (BRASIL, 2016, p.532, grifo da autora).

A utilização do material manipulável também vai de encontro à Teoria dos Campos Conceituais, visto que proporciona ao estudante a conexão entre o saber cotidiano e o saber escolar. Na maioria dos casos são materiais que fazem parte do dia-a-dia do estudante, só que voltados para o contexto da Matemática.

Conforme Sarmento (2010), esse é um modelo de ensino que por ter um caráter experimental da Matemática, leva o estudante a associar tal conhecimento ao próprio cotidiano, tornando o aprendizado mais significativo.

> O desafio didático consiste em estudar estratégias que possam contribuir na transformação desse saber cotidiano para o saber escolar, preparando o caminho para passagem ao plano da ciência. A trajetória dessa transposição passa pela **intuição primeira do cotidiano, pelos objetos do mundo material, pelas experiências e pelo uso de instrumentos próprios do espaço em que vivemos.** Esse é o terreno onde a aprendizagem dá os seus primeiros passos. Assim **não devemos desconsiderar a influência da dimensão experimental na síntese do saber escolar** e a teoria dos campos conceituais abre espaço para considerar esse aspecto (PAIS, 2002, p. 61. grifo da autora).

O material manipulável é um recurso que permite enriquecer a construção de conceitos, além de promover o desenvolvimento de atitudes investigativas. Este possibilita que o estudante manipule, visualize e construa significados, conduzindo-o ao raciocínio (MOTTIN[10], 2004 *apud* FERREIRA, 2014).

Apesar do material utilizado na atividade não ter sido confeccionado pelos estudantes, ele possibilita que os estudantes o manipulem e marquem no Círculo Trigonométrico a localização dos arcos principais. Essa manipulação se dá principalmente por ser confeccionado com imã.

Para Sarmento (2010), práticas pedagógicas dessa natureza possibilitam a transição do pensamento concreto para o abstrato, contribuindo assim, com a organização do pensamento matemático e com o raciocínio lógico.

É essencial a participação do professor como mediador do processo de aprendizagem, mesmo com a utilização do material manipulável. Além disso, o professor deve ter bem definido o objetivo a ser alcançado.

Deve-se destacar o conteúdo a ser trabalhado, para que o material não se torne apenas um objeto de diversão para o estudante, pois mesmo que o material estimule a ação do estudante, não significa que este garanta o aprendizado. Assim, como adverte Ferreira (2010, p. 66) "o material por si só não trará benefícios à aprendizagem, ou seja, vai depender da interação do estudante com o mesmo e da forma como o professor media e atua em cada situação".

> O sucesso da aprendizagem por meio desses recursos depende do conteúdo a ser estudado, dos objetivos a se atingir, do tipo de aprendizagem, da filosofia e da política da escola. Dessa forma, a utilização de um material concreto está ligada a uma ampla rede de fatores, na qual o papel do professor é fundamental. A escolha de bons materiais manipuláveis deve fazer parte de uma ampla reflexão do professor sobre as maneiras de trabalhá-los e sobre o embasamento teórico requerido para o desenvolvimento do conceito matemático. Além disso, bons materiais manipuláveis devem ter características bem determinadas (KALEFF, 2008, p.55).

O professor deve estar atento também para a possibilidade de trabalhar com o mesmo material, mas com objetivos diferentes e níveis de complexidade também, além de espaços e momentos diversos, conforme Sarmento (2010).

Quanto maior é a aplicabilidade do material e a reutilização dele, melhor é para o

[10] MOTTIN, Elisandra. *A Utilização de material didático-pedagógico em ateliês de Matemática, para o estudo do Teorema de Pitágoras.* 2004. 104f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.

próprio professor, desde que o objetivo de cada situação esteja bem definido. Kaleff (2008) destaca as principais características que os materiais manipuláveis devem ter: modelar e representar o conceito matemático ou as relações a serem exploradas; ser atraentes e motivadores, cumprindo o papel de mediador lúdico no desenvolvimento de habilidades e conceitos geométricos; ser apropriados para serem utilizados em diferentes séries e níveis cognitivos da formação de um conceito matemático; proporcionar uma base e facilitar um caminho para abstração e proporcionar, na medida do possível, manipulação individual.

Todas essas características foram levadas em conta na confecção do material manipulável utilizado nesta pesquisa. Ele pode ser utilizado para a formulação de conceitos anteriores ao Círculo Trigonométrico, como Frações, Raio, Diâmetro, Setor Circular etc., que são inclusive, os componentes anteriores ao conceito do Círculo Trigonométrico, bem como pode ser utilizado para a formulação de conceitos posteriores, como as Funções Trigonométricas. Assim, pode ser utilizado em diferentes ciclos de escolaridade. Além disso, poderia ser adaptado facilmente para o estudante com deficiência visual.

SARMENTO (2010, p.3) aponta que a escolha do material depende dos seguintes fatores:

> - De ordem didática – Adequação ao conteúdo, aos objetivos e à metodologia;
> - De ordem prática – O material está disponível? É possível adquiri-lo? Está em condições de uso?;
> - De ordem metodológica – É coerente com o nível de aprendizagem dos estudantes? Seu manuseio oferece algum tipo de risco para as crianças? O professor tem domínio dos procedimentos?

O tempo de aplicação da atividade também é um aspecto que deve ser levado em consideração, visto que a utilização desse tipo de recurso didático exige maior disponibilidade de tempo, de acordo com Sarmento (2010). É preciso considerar o tempo de adaptação do estudante ao material, de aprendizagem do estudante e a troca de ideias entre os estudantes, já que a utilização individual do material geralmente é inviável, por causa do custo.

A utilização do material manipulável também se fundamenta nos estudos empreendidos por DALE[11] (1969 *apud* PICONEZ, 2013, p.27) que constatou que os estudantes “retêm mais informações pelo que eles ‘podem fazer’ do que pelo que é ‘ouvido’, ‘lido’ ou ‘somente observado’.” Tal estudo deu origem ao seguinte cone de experiência (Figura 5).

[11] DALE, E (1969). Audiovisual methods in teaching. 3. ed. Nova York: Dryden Press.

Figura **5:** Cone de Experiência

Fonte: Dale[11] (1969 *apud* PICONEZ, 2013, p. 28).

Observando o cone de experiências da figura anterior, é possível verificar que, quando os estudantes realizam atividades colaborativas e simulam ou modelam uma experiência real, estão participando de forma ativa na construção do conhecimento e, além disso, 90% do que dizem e fazem é aprendido. Assim, podemos verificar que o uso do material manipulável favorece a aprendizagem significativa.

Apesar de termos salientado o quanto o material manipulável contribui na aprendizagem, muito professores ainda não o utilizam com frequência por diversos motivos. Conforme Sarmento (2010), um desses motivos é que a escola e os estudantes geralmente não dispõem do material necessário, por isso é importante incentivar a confecção de materiais manipuláveis com o uso de materiais recicláveis (garrafas plásticas, caixas de papelão, embalagens diversas, papel, madeiras, tampinhas etc.) ou materiais de baixo custo (isopor, cola, papel cartão, cartolina, tintas, régua, esquadro, transferidor, palitos de picolé, espetinhos, bolas de isopor, massa de modelar etc.).

O material manipulável utilizado nessa pesquisa, traz um grande diferencial, por ser confeccionado com imã. Isso possibilita que ele seja utilizado diversas vezes e para diferentes conteúdos e objetivos, inclusive com assuntos diversificados, visto que todos os imãs podem ser retirados do quadro magnético. Sendo assim, apesar de serem materiais mais caros (mas que, hoje em dia, possuem fácil acesso pela popularização dos quadros de fotos), o quadro magnético e o imã se tornam bons investimentos, pela sua durabilidade e versatilidade.

O tempo gasto pelo professor para preparar o material, também é um dos motivos, pelos quais os professores não optam por utilizar o material manipulável. Por isso é ideal que possam ser reaproveitados em outras aplicações e que seja utilizado plástico autoadesivo para proteção, e assim represente um bom custo-benefício.

Além disso, o professor pode optar por propor que os estudantes participem do processo de confecção, que também pode fazer parte do processo de aprendizagem, conforme Neto[12] (1988 *apud* SARMENTO, 2010, p.6), em alguns casos, “a ação de produzir o material é mais importante que o próprio material produzido”.

O desenvolvimento de atividades utilizando modelos em origami, por exemplo, propicia a utilização de um material reciclável e de baixo custo, que é o papel, e permite ao estudante a confecção do seu próprio material manipulável. Um exemplo desses modelos são os sólidos geométricos em origami. Conforme destaca Costa (1999), descobrir toda a Matemática presente em modelos de origami é um caminho muito promissor, pode tornar as aulas mais criativas, atraentes, prazerosas e divertidas, sem comprometer a qualidade do processo.

Para utilizar qualquer material manipulável, basta o interesse e a criatividade do professor em proporcionar aos estudantes experiências diferentes da aula expositiva. Tais materiais podem ser o ponto inicial da construção do conceito, partindo do concreto para o abstrato ou podem ampliar as situações já vivenciadas pelos estudantes, contribuindo assim, para a evolução do estado de devir de determinado conceito.

Aspectos Metodológicos

A presente investigação caracteriza-se como qualitativa, uma vez que tem por objetivo compreender o porquê de determinado fenômeno, além de propor uma intervenção (GEARHARDT; SILVEIRA, 2009). Portanto, a intenção é de analisar e discutir quais são as contribuições do material confeccionado para a compreensão da rede de conceitos que estão relacionados com o Círculo Trigonométrico, com ênfase na construção do conceito de radiano.

É por meio da aplicação de uma atividade com o registro dos estudantes em uma ficha e das observações realizadas durante a aplicação das atividades, que foram analisados os dados conforme os autores destacados no referencial teórico. Além disso, levantou-se questões e propostas de mudanças ou melhorias no material, benéficas para os estudantes.

A pesquisa de campo foi aplicada em uma escola pública da rede estadual, na periferia de Niterói, no estado do Rio de Janeiro. Escolheu-se primeiramente estudantes matriculados no primeiro ano do Ensino Médio, pois é o ano em que estudam este conteúdo e geralmente já

[12] NETO, E. R.: *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 1988.

foi trabalhada a Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Optou-se por aplicar a atividade para estudantes que ainda não tinham estudado o Círculo Trigonométrico, a fim de verificar a eficácia do material manipulável. A turma na qual a atividade foi aplicada era composta por 28 estudantes, mas apenas nove estudantes participaram da pesquisa, pois na época estava ocorrendo a greve dos caminhoneiros em todo Brasil, o que influenciou na vinda dos estudantes para a escola no dia da experimentação. Por se tratar de uma pesquisa qualitativa e não quantitativa, a representatividade numérica não é um fator determinante para a análise.

Organização das fases da experimentação

A fim de organizar a aplicação da atividade, esta foi dividida em três fases, as quais são representadas por cada questão da ficha de atividades. Além disso, a divisão em fases leva em conta a introdução da construção do conceito, por partes, dando ênfase aos componentes anteriores. De forma que os componentes anteriores sejam retomados e reforçados dentro do contexto do Círculo Trigonométrico.

O objetivo principal da primeira fase é a verificação dos estudantes, com o auxílio do material manipulável, que o raio da circunferência cabe π vezes no arco com metade do comprimento da circunferência, ou seja, que esse é o comprimento em radiano do arco que é metade da circunferência, considerando o raio unitário. Como a medida desse mesmo arco, em graus, é igual a 180°, tem-se assim, as seguintes relações: 180°= π radianos e 360°= 2π radianos.

Após a explicação e observação do material, os estudantes puderam registrar o que entenderam na ficha de atividades. Neste artigo, enfocaremos o trabalho realizado na primeira fase.

Elaboração da ficha de atividades

A ficha foi elaborada com o objetivo de registrar as respostas dos estudantes sobre o conteúdo ensinado por meio do material manipulável e para, posteriormente, ser feita a análise da pesquisa. Atentou-se que a ficha fizesse parte do passo a passo da construção inicial dos conceitos envolvidos no conceito do Círculo Trigonométrico.

Na estruturação da primeira questão (Figura 6) da ficha de atividades, buscou-se que os estudantes respondessem o que entenderam sobre a relação entre π radianos e 180° após a explicação e a observação das tampinhas plásticas de forma circular, de diversos tamanhos, nas quais, a metade do comprimento da circunferência estava demarcada com fitas adesiva coloridas do tamanho do raio.

Nessa mesma questão, após os estudantes terem verificado a relação entre π radianos e 180°, os estudantes devem responder a quantos radianos corresponde o ângulo de 360°. Portanto, nessa questão, inicia-se a construção do conceito de radiano na atividade.

Figura 6: Primeira questão da ficha de atividades

1. Observando as tampinhas plásticas na forma circular, responda as perguntas a seguir:

a) Por que 180° corresponde a π radianos?

---

b) Sabemos que uma circunferência completa tem 360°. Se continuarmos contornando a circunferência com o raio, podemos concluir que 360° corresponde a quantos radianos?

Fonte: As autoras.

A experimentação e análise de dados

A atividade foi realizada numa turma de 1º ano do Ensino Médio no dia 28 de maio de 2018. Foram utilizadas duas aulas de Matemática, com 50 minutos cada e 25 minutos da aula de história. A atividade iniciou às 09h15min e terminou às 11h20min. A atividade foi dividida em três fases e optou-se por fazer uma aula dinâmica com participação ativa dos estudantes.

Iniciou-se o diálogo com os estudantes buscando verificar o conhecimento que eles haviam construído em anos anteriores sobre circunferência, raio e diâmetro. Os estudantes demonstraram que não lembravam ou sabiam sobre o assunto e essa não era uma resposta esperada, já que se tratava de estudantes do primeiro ano do Ensino Médio. Então, a primeira autora explicou o que é uma circunferência e seus elementos.

Outra questão abordada foi a relação que há entre o raio e o diâmetro. Uma das estudantes respondeu que o diâmetro é igual a duas vezes o raio. Perguntou-se aos demais estudantes se concordavam, eles responderam que sim. Portanto, registrou-se no quadro branco que d = 2.r, assim como r = $\frac{d}{2}$, ou seja, que o diâmetro é igual a duas vezes o raio, assim como o raio é igual à metade do diâmetro.

Também foi indagado aos estudantes se lembravam de terem estudado ângulos e, eles responderam que sim. Então, a autora relembrou algumas questões sobre ângulos, como em quantos graus a circunferência é dividida, qual é o ângulo raso, qual é o ângulo reto, além de algumas frações desses ângulos, como os ângulos de 45° e de 30º, por exemplo.

Evidencia-se aqui a importância que os componentes anteriores ao conceito representam. Sem esses componentes anteriores, os estudantes não conseguiriam construir o novo conceito que seria abordado na aula. Deste modo, essa primeira fase foi primordial para relembrar conceitos anteriores, pois segundo Pais (2002), por meio da Teoria dos Campos Conceituais, percebe-se o quanto a cadeia de formação de conceitos é complexa.

A abordagem inicial também foi importante porque era necessário averiguar não apenas o que os alunos sabiam sobre os componentes anteriores ao conceito, mas também, como sabiam. A forma como compreendem tais componentes são os invariantes, e influenciará a construção do novo conceito, uma vez que os anteriores são partes deste.

A autora perguntou se alguém conhecia o termo radi**a**no e só uma estudante respondeu que sim. Para que os estudantes pudessem compreender melhor, antes de explicar qual era a relação entre graus e radianos, foi mostrado que se eles não tivessem uma régua e quisessem comprar um tecido para a mesa da sala de aula, poderiam obter uma aproximação do comprimento medindo com a palma da mão.

Uma das estudantes apontou que dependia da palma da mão da pessoa que estivesse medido, já que cada palma da mão tem um tamanho. Foi ótimo, pois aproveitou-se para confirmar que para comprar o tecido ela precisaria medir o tecido com a mesma mão que mediu a mesa. Trazer uma situação que poderia ser vivenciada no cotidiano dos estudantes despertou o interesse deles e fez com que pudessem associar ao que eles iriam estudar logo em seguida. A Teoria dos Campos Conceituais, segundo Pais (2002), tem caráter pragmático, no sentido de que a análise proposta se centraliza em situações próximas da vivência do estudante. Sendo assim, afirmou-se que os matemáticos utilizaram o raio para medir o comprimento da circunferência e para isso, o raio deveria ser da própria circunferência, assim como a palma da mão para medir a mesa (QUINTANEIRO, 2010).

Foi pedido que os grupos comparassem entre si as circunferências de tampas plásticas de latinhas cilíndricas (tradicionalmente utilizados para o armazenamento de achocolatados e cereais enlatados.) que cada grupo recebeu, verificando que cada uma tinha um tamanho diferente, logo o raio também era diferente. Desse modo, como previsto, na primeira fase da atividade, os estudantes observaram as tampas contornadas de um extremo do diâmetro até o outro, utilizando o raio como unidade de medida. Lembrando que tais tampinhas foram confeccionadas com fita adesiva colorida posicionadas com cores alternadas para facilitar a contagem dos raios (Figura 7).

Figura 7: Tampas na forma circular

Fonte: As autoras.

A partir daí começou-se a contar, utilizando o material de apresentação, quantos raios cabiam de um extremo a outro do diâmetro, buscando medir metade do comprimento da circunferência. Chegou-se a três raios inteiros e foi questionado aos estudantes se este era o comprimento do arco que mede 180º.

Os estudantes conseguiram observar que para chegar até o “final” (ponto de interseção da circunferência com o diâmetro), faltava um “pouquinho”. Compreender que o comprimento de metade da circunferência não era um número inteiro, não foi tão fácil para os estudantes. Foi feita referência ao episódio em que foi medida a mesa com o palmo e obteve-se uma aproximação de três palmos e meio, faltando um “pouquinho” para completar quatro palmos inteiros. Assim, concluiu-se que metade da circunferência tinha comprimento igual a três raios e um “pouquinho” e que isso acontecia em todas as circunferências, independentemente do tamanho do raio, desde que o raio pertencesse à circunferência requerida.

Prosseguindo a aula, foi comentado que os matemáticos começaram a perceber essa relação e constataram que esse “pouquinho” era aproximadamente 0,141592..., que é um número com infinitas casas decimais. Como eles já tinham contado três raios efetuando a adição eles obtiveram 3,141592... vezes o raio. A autora explicou que como o comprimento foi medido utilizando o raio, ou seja, o raio, nesse caso, é uma unidade de medida chamada radiano, tem-se que o comprimento da metade da circunferência é igual a π radianos, pois cabem π raios da circunferência no arco que mede 180°.

Na primeira questão, a maioria dos estudantes apresentou dúvida sobre como responder. Deste modo, recorreu-se a um desenho no quadro, destacando o raio da circunferência e desenhando raio por raio contornando a circunferência, com cores diferentes, assim como no material, para mostrar que 3,14 radianos era o comprimento aproximado de metade da circunferência. Foi necessário mais de um tipo de situação, além do próprio material manipulável para agregar na formação do significado do conceito, conforme reafirma Pais (2002, p.60), “a formação de um conceito não acontece através de um único tipo de situação."

Foi questionada a medida do ângulo correspondente ao arco que eles mediram. Uma estudante respondeu que era o ângulo reto, então foi perguntado se ela tinha certeza e se mais alguém concordava. A estudante logo percebeu o erro e falou que era o ângulo raso, ou seja, o ângulo que mede 180°.

Uma das estudantes perguntou por que estava sendo utilizado o raio como unidade de medida se o comprimento resultante não era um valor exato. É importante observar nessa dúvida apresentada pela estudante que há uma resistência por parte de alguns alunos em relação aos números que não são inteiros. Outra questão que pode ser levantada é o fato de muitas vezes os ramos da Trigonometria não se interligarem.

Os estudantes estudam a Trigonometria no Triângulo Retângulo, no Círculo Trigonométrico e nas Funções Trigonométricas sem conseguir fazer associações entre os conteúdos, mesmo que a palavra Trigonometria esteja presente nas nomenclaturas. Esse fato é confirmado por Feijó (2018, p.52):

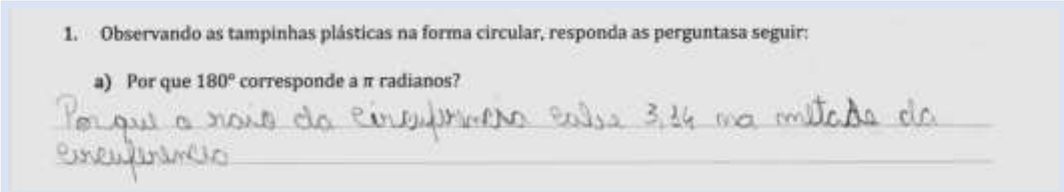
> Todas as dificuldades e lacunas mencionadas neste trabalho indicam que, mesmo os alunos que apresentam entendimento sobre algum dos muitos ramos da trigonometria (prioritariamente as razões trigonométricas) [...], o têm de forma rasa e desconexa com os demais ramos.

Foi observada resistência dos estudantes para responderem a questão discursiva, pois eles questionavam: "O que é para responder?", "Como a gente responde?" e "A gente escreve o que?". Uma justificativa para esse fato pode ser devido a maioria das questões das provas de Matemática aplicadas pelo professor da turma solicitar resposta numérica, de múltipla escolha. Além disso, para Hoffman (2011), a Matemática foi, por muito tempo, separada dos processos discursivos e esse pode ser um dos motivos pelo qual muitos estudantes possuem problemas de escrita. A resposta esperada para o item a da primeira questão era: um arco que mede 180° corresponde a π radianos, porque o seu comprimento é aproximadamente igual a 3,14 vezes o comprimento do raio da circunferência que contém o arco.

A ordem escolhida para apresentar as respostas foi iniciada pelas que mais se aproximaram da resposta correta. As repostas terão como referência tipo I, II, III, IV, V e VI, conforme as legendas de cada figura

.

Figura 8: Resposta do Tipo I


1. Observando as tampinhas plásticas na forma circular, responda as perguntasa seguir:

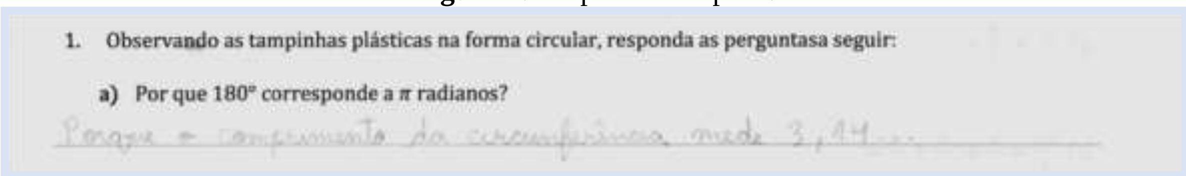
a) Por que 180° corresponde a π radianos?

Porque o raio da circunferência cabe 3,14 na metade da circunferência

Fonte: As autoras.

Três estudantes dos nove, responderam dessa forma, que foi considerada a mais próxima do esperado. Nesse caso, podemos ver que o material manipulável cumpriu com a expectativa em relação a esses estudantes. Compreenderam a ideia do conceito de radiano, mesmo que ainda sejam necessárias outras situações nas quais explorem tal conceito para construir o significado. Segundo Vergnaud (1990), é necessário um conjunto de situações para dar significado a um conceito. Nesta pesquisa, utilizamos uma situação apenas.

Figura 9: Resposta do Tipo II.


1. Observando as tampinhas plásticas na forma circular, responda as perguntasa seguir:

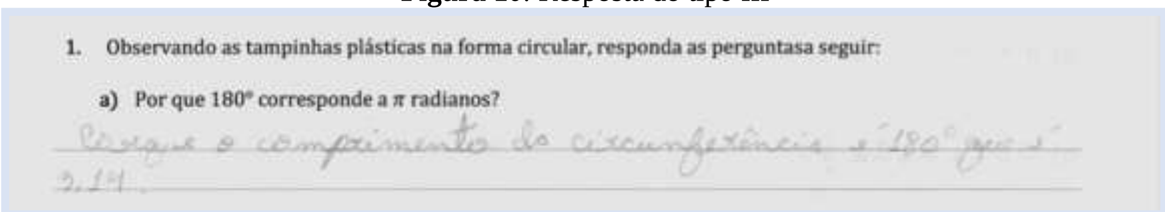
a) Por que 180° corresponde a π radianos?

Porque o comprimento da circunferência mede 3,14...

Fonte: As autoras.

Apenas um estudante respondeu dessa maneira, mostrando que não respondeu igual aos outros integrantes do grupo. Nessa resposta, podemos observar que não ficou claro o conceito de radiano, visto que ela considerou todo o comprimento da circunferência. Ao mesmo tempo, quando ela escreve que mede 3,14, conjectura-se que considerou o raio como unidade de medida, conforme o que foi trabalhado em sala com o auxílio do material manipulável.

Figura 10: Resposta do tipo III


1. Observando as tampinhas plásticas na forma circular, responda as perguntasa seguir:

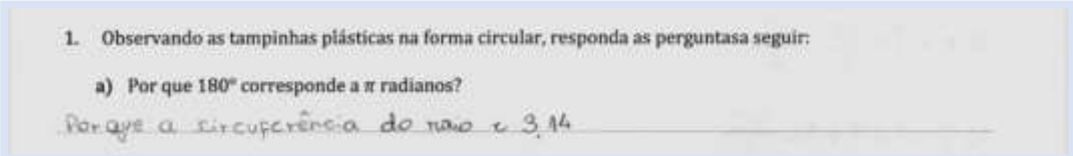
a) Por que 180° corresponde a π radianos?

Porque o comprimento da circunferência é 180° que é 3,14.

Fonte: As autoras.

Da mesma forma que no caso anterior, apenas um estudante respondeu dessa maneira e também considerou todo o comprimento da circunferência. Apesar disso, nessa resposta, podemos observar que o estudante confundiu o comprimento do arco medido em radianos com a medida do mesmo em graus.

Figura 11: Resposta do tipo IV


1. Observando as tampinhas plásticas na forma circular, responda as perguntasa seguir:

a) Por que 180° corresponde a π radianos?

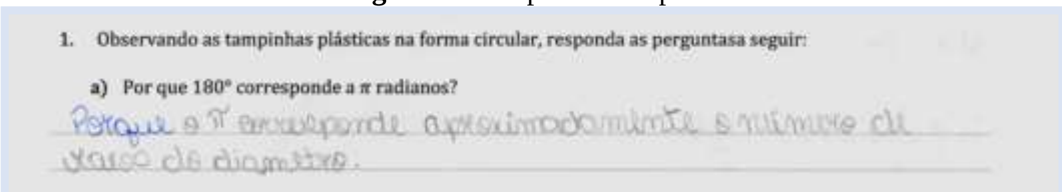
Porque a circunferência do raio é 3,14

Fonte: As autoras.

Novamente apenas um estudante respondeu dessa maneira. Analisando essa resposta, observa-se que a explicação e o material manipulável não deixaram claro para o estudante o significado do conceito.

Além disso, a confusão na resposta do estudante pode ter se dado pelo fato relembrar os componentes anteriores ao conceito na mesma aula, pois não era um assunto que o professor estava abordando. Assim, o estudante pode ter confundido os conceitos, por não ter apreendido, ainda, os componentes anteriores.

Figura 12: Resposta do Tipo V


1. Observando as tampinhas plásticas na forma circular, responda as perguntasa seguir:

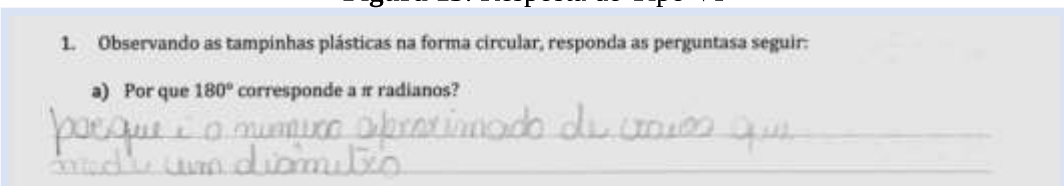
a) Por que 180° corresponde a π radianos?

Porque o π corresponde aproximadamente o número de raios do diâmetro.

Fonte: As autoras.

Dois estudantes responderam dessa maneira. Aqui, também, percebe-se confusão dos componentes anteriores com o novo conceito apresentado. A estudante relacionou o número π com o raio, mesmo sem citar a unidade radiano, mas ao invés de escrever comprimento de metade da circunferência, escreveu diâmetro.

Figura 13: Resposta do Tipo VI


1. Observando as tampinhas plásticas na forma circular, responda as perguntasa seguir:

a) Por que 180° corresponde a π radianos?

porque é o número aproximado de raios que mede um diâmetro

Fonte: As autoras.

Outra vez, apenas um estudante respondeu dessa maneira. Nesse caso, também, houve confusão em relação aos componentes anteriores relembrados, mas o estudante não fez nenhuma alusão ao novo conceito, ou seja, nem citou o termo radiano, o 3,14 ou o π, como nas respostas anteriores. Desse modo, considera-se que esse estudante ficou mais distante da resposta esperada.

Observou-se que em sete de nove respostas dadas pelos estudantes, aparece a palavra raio, em uma tentativa de relacionar a quantidade de raios com o comprimento da circunferência. Pode-se considerar que o invariante nessas respostas é o termo raio utilizado como uma unidade de medida do arco, ainda que os registros de todos os estudantes não explicitem essa ideia.

A identificação desse invariante nas respostas pode indicar o início da construção do conceito de radiano, sendo necessárias mais situações organizadas para sala de aula, com o objetivo de levar o estudante a reconhecer e utilizar o raio como unidade de medida de arcos de circunferência, pois segundo Vergnaud (1990), a construção de um conceito não ocorre por meio de um único tipo de situação, mas sim por meio de uma diversidade delas. Por outro lado, uma única situação abrange muitos conceitos.

Outra proposta seria solicitar aos estudantes que medissem a metade da circunferência utilizando o seu respectivo raio, ajustando as fitas adesivas ao longo do perímetro das tampas entregues aos estudantes, sem sobreposição das mesmas e sem deixar espaços vazios entre elas. Desse modo, poderiam chegar à conclusão por si só de que três vezes a medida do raio não é suficiente para cobrir o arco correspondente a metade da circunferência.

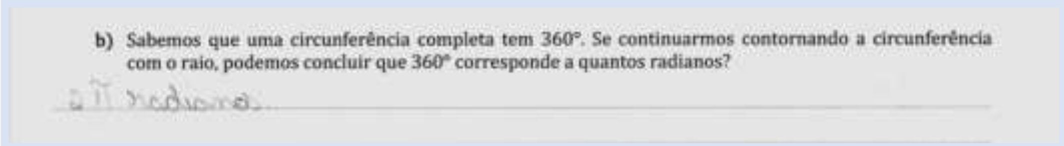
O caráter experimental da situação proposta aos estudantes pode ter contribuído para a menção ao termo raio nas respostas, visto que os raios destacados nas tampas plásticas possibilitaram a visualização da quantidade daqueles que cabiam no arco de 180°.

Outra invariante que também se destaca nas respostas dadas pelos estudantes no item *a* é a menção ao número 3,14. Essa invariante pode ter se dado pelo fato de os estudantes já conhecerem o número π e ter sido enfatizado que o comprimento que faltava para completar a metade da circunferência era igual à parte decimal do número π. Observa-se nesse caso a influência da linguagem na aprendizagem dos conceitos, uma vez que a aproximação numérica do número π já fazia parte do conhecimento dos estudantes.

Embora os estudantes tenham apresentado as dificuldades mencionadas sobre o item *a*, todos responderam o item *b* corretamente, sendo que dois estudantes não colocaram a unidade radiano. Após concluírem que π radianos é o comprimento de metade da circunferência e ao serem questionados pela autora sobre o comprimento da circunferência completa, a maioria dos estudantes respondeu 2π radianos.

Além disso, quando questionados sobre a qual ângulo 2π radianos correspondem, uma das estudantes respondeu da seguinte maneira: "Se o π vai dar 180°, 2π vai dar 360°". Observa-se que a estudante provavelmente usou a proporcionalidade. A seguir (Figuras 14 a 17), estão as respostas do item *b* da ficha de atividades, separadas por tipo de resposta conforme o item *a*.

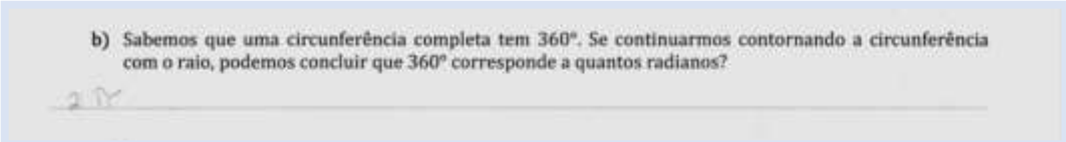
Figura 14: Resposta do Tipo I e II


b) Sabemos que uma circunferência completa tem 360°. Se continuarmos contornando a circunferência com o raio, podemos concluir que 360° corresponde a quantos radianos?

2π radianos

Fonte: As autoras.

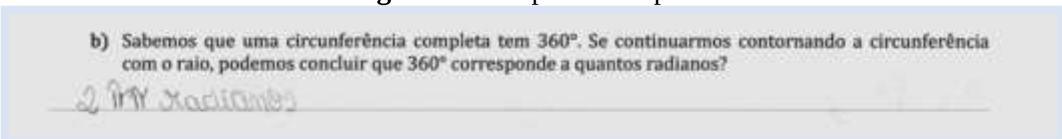
Figura 15: Resposta do Tipo III e IV


b) Sabemos que uma circunferência completa tem 360°. Se continuarmos contornando a circunferência com o raio, podemos concluir que 360° corresponde a quantos radianos?

2π

Fonte: As autoras.

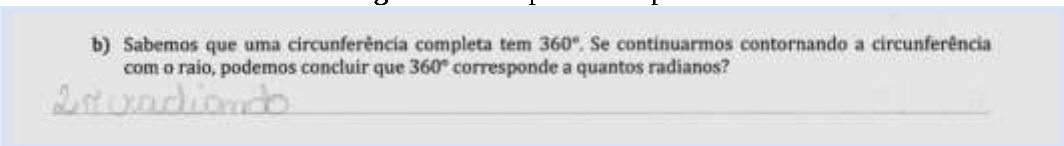
Figura 16: Resposta do tipo V


b) Sabemos que uma circunferência completa tem 360°. Se continuarmos contornando a circunferência com o raio, podemos concluir que 360° corresponde a quantos radianos?

2 πr radianos

Fonte: As autoras.

Figura 17: Resposta do tipo VI


b) Sabemos que uma circunferência completa tem 360°. Se continuarmos contornando a circunferência com o raio, podemos concluir que 360° corresponde a quantos radianos?

2π radiando

Fonte: As autoras.

Após a análise das respostas, há duas conjecturas sobre o fato do número de acertos do item *b* ser superior ao número de acertos do item *a*. A primeira conjectura é que o tipo de resposta exigido na primeira questão era a explicação de um fato (o fato de 180º ser igual a π radianos), e o tipo de resposta requerido na segunda questão era numérico, ou seja, o quanto equivaleria 360º.

Em Matemática, a maioria dos estudantes está acostumada a fornecer respostas numéricas, pois geralmente as questões são da forma: calcule, efetue, resolva, determine etc. Raramente os estudantes são solicitados a redigir uma explicação para suas estratégias de cálculos ou mesmo a descrição delas. A prática da redação não é comum nas aulas de Matemática (HOFFMAN, 2011).

Foi considerado que esse fato justifica parcialmente a quantidade de respostas corretas para item *b* em relação ao item *a*. A outra conjectura diz respeito ao fato de os estudantes trabalharem muito com regra de três. A partir da fala de uma estudante: “Se o π vai dar 180°, 2π vai dar 360°”, evidenciou-se para os estudantes a proporcionalidade existente entre a medida do ângulo e o comprimento do arco em radiano.

Conclusão

A experimentação com os estudantes confirmou o aspecto motivador dos materiais manipuláveis. A turma interagiu bem e participou da aula com entusiasmo. Entretanto, apesar da mediação, o trabalho com o material não foi suficiente para que a construção do conceito de radiano avançasse, porém pôde ser utilizado como disparador da constatação de relações complexas. É possível afirmar que este trabalho inicial pode ter despertado nos alunos, o estado de apreendência, ou seja, a utilização dos materiais manipuláveis criou um ambiente de envolvimento do aluno na construção do conceito de radiano, otimizando a sua disponibilidade para aprender algo novo.

Foi observado – no momento em que os estudantes manipularam as tampas plásticas de raios distintos com arcos de comprimento igual ao comprimento dos respectivos raios marcados sucessivamente sobre o arco de 180° graus – que eles verificaram que sobre o arco de 180° cabiam três raios e mais um “pouquinho”.

Apesar disso, quando foram questionados sobre o porquê de 180° ser igual a π radianos apresentaram respostas incompletas ou equivocadas. Conjectura-se que essas respostas tenham sido incompletas pelo estado de devir do conceito, da falta de outras situações envolvendo tais conceitos, por não terem o hábito de responderem questões discursivas em Matemática, além da dificuldade no trato com os números irracionais.

É possível que isso tenha ocorrido pelo fato de um radiano não ter comprimento constante, o que vai contra tudo que eles conhecem sobre unidade de medida. Por exemplo, o metro e seus submúltiplos, bem como a polegada não variam de acordo com o comprimento que está sendo medido, já o radiano varia com o raio da circunferência.

Outra conjectura sobre a dificuldade de compreenderem o radiano é o fato de este ser uma unidade nova, ao contrário do grau que eles conhecem da vida cotidiana, já que o radiano é uma unidade usada apenas na escola, assim como, o comprimento a ser medido era de uma linha curva e os estudantes estão acostumados a medir comprimentos em linha reta.

É preciso levar em consideração o estado de devir de todos os conceitos envolvidos. Quando um estudante aprende um novo conceito, o professor dever ter a consciência de que os componentes anteriores, para muitos, ou até mesmo para todos os estudantes, não têm profundidade suficiente e pode interferir no seu aprendizado.

Na experimentação foi utilizado muito tempo relembrando conceitos anteriores, para depois iniciar, de fato, o estudo do conceito de radiano, que também demandou tempo, por isso extrapolou o previsto para a primeira fase da atividade. Entretanto, esta revisão se fez necessária, uma vez que se tratava de componentes anteriores ao conceito a ser construído – radiano, e era preciso ter assegurado que tais componentes eram compreendidos pelos alunos.

Uma sugestão é que o professor, antes de medir o arco de 180° usando o raio da circunferência como unidade de medida, faça os estudantes utilizarem a fita métrica, barbantes e régua ou a própria fita adesiva e régua para medir o arco. Depois discutir como a unidade de medida radiano facilita a realização das operações aritméticas, levando em conta que isso demanda tempo e por isso essa atividade deve ser aplicada em uma aula anterior.

Os resultados obtidos permitiram observar que o estudo do radiano deve ser realizado cuidadosamente em sala de aula, com a maior diversidade de situações possíveis, pois desse modo, os estudantes têm a possibilidade de perceber diferentes aspectos desse conceito.

Este estudo deve preceder o Círculo Trigonométrico, pois é importante buscar a compreensão real e interiorização dessa parte inicial, para depois abordar os demais conceitos relacionados ao tema. Embora, muitas vezes isso se torne difícil dentro do contexto escolar, devido ao tempo necessário e a grade curricular extensa.

Referências Bibliográficas

BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.** Curitiba: Editora CRV, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 16 out 2018.

BRASIL. Comitê Gestor da Base Nacional Comum Curricular e Reforma do Ensino Médio. **Base Nacional Comum para o Ensino Médio/Ministério da Educação**. Brasília: MEC/SEF, 2016. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf. Acesso em: 19 out. 2018.

COSTA, Eliane Moreira da. **Ensino de Geometria pelas dobraduras de papel**. Niterói: UFF, 1999.

FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria:** um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. Dissertação (Mestre em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Disponível em: http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/321 44/1/2018_RachelSaffirAra%C3%BAjoAlvesFeij%C3%B3.pdf. Acesso em: 30 set. 2018.

FERREIRA, Edinalva Rodrigues. **Ensino de frações na Educação de Jovens e Adultos:** obstáculos didáticos e epistemológicos. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2014.

HOFFMAN, Bernadete Verônica Schaeffer; SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira. A exploração da leitura, escrita e oralidade em matemática. *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. **Anais...**Recife, 2011.

IEZZI, Gelso. **Fundamentos de matemática Elementar 3:** Trigonometria – 8. Ed. – São Paulo: Atual, 2004.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. **Novas tecnologias no ensino da matemática:** tópicos em ensino de geometria. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2008.

JANUÁRIO, Gilberto. Materiais Manipuláveis: uma experiência com alunos da Educação de Jovens e Adultos. *In:* Primeiro Encontro Alagoano de Educação Matemática. **Anais...** I EALEM: Didática da Matemática: uma questão de paradigma. Arapiraca: SBEM – SBEM-AL, 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadi a.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Gilberto_01.pdf. Acesso em: 19 out. 2018.

MATOS, José M.; SERRAZINA, Maria de Lurdes. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PICONEZ, Stela C. Bertholo. **Reflexões pedagógicas sobre o ensino e aprendizagem de pessoas jovens e adultas** / Secretaria da Educação, Centro de Educação de Jovens e Adultos – São Paulo: SE, 2013. Disponível em: http://files.livro-de-lemas.webnode.com/200000047-c801fc8fac/reflexoes_eja.pdf. Acesso em: 15 out. 2018.

QUINTANEIRO, Wellerson. **Representações e Definições Formais em Trigonometria no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: https://sites.google.com/site/wellersonquintaneiro/publicacoes-e-trabalhos-de-conclusao-de-curso. Acesso em: 17 out. 2018.

SARMENTO, Alan Kardec Carvalho. **A utilização dos materiais manipuláveis nas aulas de matemática.** UFPI – Universidade Federal do Piauí. Piauí, 2010. Disponível em: http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT_02_18_ 2010.pdf. Acesso em: 19 out. 2018.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptues. **Recherches em Didactique des Mathématiques.** Grenoble, vol 10, nº. 2.3. p.133-170. 1990.

VICENTE, Lisandra. **Experiências no ensino de trigonometria, utilizando os recursos do software Cabri-Géomètre** *II*. 2005. 60 fl. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática). Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Disponível em: http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96491. Acesso em: 05 set. 2018.

Recebido em: 28 de abril de 2020
Aprovado em: 19 de outubro de 2020