revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

POTENCIALIDADES DE UMA TRAJETÓRIA DE APRENDIZAGEM PARA A COMPREENSÃO DE CONTEÚDOS DE MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM QUÍMICA

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.11-27

Michelle Andrade Klaiber[1]
Angela Marta Pereira das Dores Savioli[2]

Resumo: Neste artigo são apresentados aspectos e resultados de uma pesquisa de doutorado na qual se investigou indícios de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado (PMA) em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, com o objetivo de destacar potencialidades da trajetória de aprendizagem construída no referido estudo para a compreensão de conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Verificou-se por meio das análises que, durante o desenvolvimento da trajetória de aprendizagem, os estudantes participantes mobilizaram em suas resoluções os seguintes processos do PMA: representação simbólica, representação mental, visualização, intuição, mudança de representação e tradução, analogia, generalização e síntese. Concluiu-se que o ensino de conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares por meio de tarefas investigativas, com uma abordagem exploratória considerando as dificuldades e os conhecimentos prévios dos estudantes, pode proporcionar o desenvolvimento de processos do PMA, contribuindo com a aprendizagem dos estudantes.
Palavras-chave: Trajetória de Aprendizagem. Pensamento Matemático Avançado. Ensino-Aprendizagem Exploratório. Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

POTENTIALITIES OF A LEARNING TRAJECTORY FOR COMPREHENSION OF MATRICES AND LINEAR EQUATIONS SYSTEMS CONTENTS IN A CHEMISTRY COURSE

Abstract: This article presents aspects and results from a PhD thesis on which was investigated evidences of the development of Advanced Mathematical Thinking (AMT) in written productions of undergraduate students from the first semester of course in Chemistry in a discipline of Analytical Geometry and Linear Algebra, in order to highlight potentialities of the learning trajectory built in the referred study for the comprehension of contents of Matrices and Linear Equations Systems. It was verified through the analyzes that, during the development of the learning trajectory, the participating students mobilized in their resolutions the following AMT processes: symbolic representation, mental representation, visualization, intuition, representations switch and translation, analogy, generalization and synthesis. It was concluded that the teaching of Matrices and Linear Equations Systems contents through investigative tasks, with an exploratory approach considering difficulties and previous knowledge of students, can provide the development of AMT processes, contributing to student learning.
Keywords: Learning Trajectory. Advanced Mathematical Thinking. Inquiry-based Learning. Matrices and Linear Equations Systems.

---

[1] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Docente do Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR (Campus Apucarana). E-mail: michelle@utfpr.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0127-7373
[2] Doutora em Matemática. Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL. E-mail: angelamarta@uel.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5624-6398

Introdução

Pesquisas na área da Educação Matemática apontam para o crescente número de estudantes do Ensino Superior que enfrentam obstáculos na aprendizagem da Matemática, seja pela falta de domínio de conhecimentos matemáticos prévios (BARROS; FERNANDES; ARAÚJO, 2016), seja pela falta de conexão entre conteúdos e de questionamento e justificação de técnicas utilizadas para a resolução de tarefas (LUCAS *et al.*, 2014).

Assim, é preciso que o trabalho em sala de aula priorize o desenvolvimento do pensamento matemático do estudante, proporcione a troca de experiências e a justificação de ideias por meio de momentos de reflexão e discussão com os pares, para que o estudo da Matemática não se reduza a mera realização “de procedimentos e algoritmos memorizados, cheios de formalismos, e sem significado para o estudante” (KLAIBER, 2019, p. 64).

Nessa direção, a pesquisa de Klaiber (2019) propõe o desenvolvimento de uma Experiência de Ensino pautada em duas perspectivas: uma relacionada aos processos cognitivos mobilizados pelos estudantes durante o processo de aprendizagem de conceitos matemáticos, e a outra, voltada às tarefas, discussões e ações que compõem o ambiente de sala de aula planejado pelo professor.

Segundo a autora, essas perspectivas se fundem na construção de um caminho de aprendizagem em Álgebra Linear capaz de proporcionar aos estudantes um ambiente de aprendizagem favorável para a mobilização de conhecimentos prévios e a construção de novos conceitos, e de propiciar ao professor uma maior compreensão de como se desenvolve a aprendizagem e o pensamento matemático dos estudantes (KLAIBER, 2019).

No presente artigo apresentamos alguns aspectos e resultados de uma pesquisa de doutorado da primeira autora, na qual se investigou indícios de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado (PMA) em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química, em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, com o objetivo de destacar potencialidades da trajetória de aprendizagem construída no referido estudo para a compreensão de conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

Apresentamos, a seguir, as perspectivas do Ensino-Aprendizagem Exploratório da Matemática e do PMA, o contexto, os procedimentos metodológicos, bem como os resultados e algumas considerações a respeito desse estudo.

Um diálogo entre o Pensamento Matemático Avançado e o Ensino-Aprendizagem Exploratório

Reconhecemos a necessidade de um trabalho em sala de aula que priorize a atividade matemática do estudante proporcionando reflexões, indagações e transposições cognitivas que lhe auxiliem na resolução de problemas e na abstração de conceitos matemáticos. Nesse sentido, acreditamos que a compreensão de processos mentais desenvolvidos pelos estudantes durante a construção e compreensão do conhecimento matemático, possibilita ao professor orientar ações pedagógicas e propor tarefas que desenvolvam o raciocínio e o pensamento matemático.

Com esse propósito, nessa seção propomos uma discussão acerca da teoria de Dreyfus (2002) com relação ao desenvolvimento de processos mentais e da perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório (PONTE, 2005), a qual tem como intenção proporcionar a reflexão e a aprendizagem por meio da seleção, resolução e discussão de tarefas matemáticas.

Para Dreyfus (2002), a aprendizagem frequentemente resulta do desenvolvimento de uma sequência de tarefas durante as quais uma variedade de processos mentais ocorre e interage. Segundo o autor, o estudo desses processos matemáticos e psicológicos que ocorrem na mente do estudante e interagem entre si corresponde ao estudo do Pensamento Matemático Avançado (PMA).

Consoante ao autor, o PMA não está presente somente no estudo da matemática avançada, normalmente no Ensino Superior, mas também no desenvolvimento de um pensamento mais complexo a respeito de conceitos matemáticos elementares.

Dessa forma, Dreyfus e Eisenberg (1996) e Dreyfus (2002) apresentam diversos processos mentais que ocorrem no pensamento matemático, como a intuição, a representação, a visualização, e a generalização, dentre outros; contudo, Dreyfus (2002) classifica a *representação* e a *abstração* como os principais para o PMA.

O processo de *representação*, de acordo com Dreyfus (2002), possui três subprocessos principais: a *representação simbólica,* a *representação mental*, e a *visualização.*

Por meio da *representação simbólica* o indivíduo comunica, de forma escrita ou falada, através de sinais e símbolos, o significado que ele atribui a um determinado conceito.

A *representação mental* diz respeito às diversas representações mentais que o indivíduo pode possuir de um determinado conceito. Tais representações podem ser concebidas por meio do processo de *visualização,* que por sua vez, auxilia na geração e no desenvolvimento da imagem de uma situação problema, atuando na análise e na exploração do problema como uma ferramenta versátil para o raciocínio matemático.

Desse modo, o processo de *visualização* possui estreita relação com o processo de *intuição*, sendo este último, o produto das imagens conceituais do indivíduo (DREYFUS; EISENBERG, 1996).

O raciocínio visual não se limita apenas às situações geométricas pois, quando resolvemos um problema matemático necessitamos fazer o uso de diferentes representações em paralelo. Desse modo, Dreyfus (2002) aponta outros dois processos relacionados ao processo de *representação*: a *mudança de representações e tradução entre elas*, e a *modelação.*

Para o autor, além de o indivíduo conhecer diferentes representações de um conceito, é necessário que ele seja capaz de aplicar o conceito de forma flexível em diferentes contextos e problemas, movimentando-se entre as representações e escolhendo a(s) mais adequada(s), o que descreve o processo de *mudança de representações e tradução entre elas*.

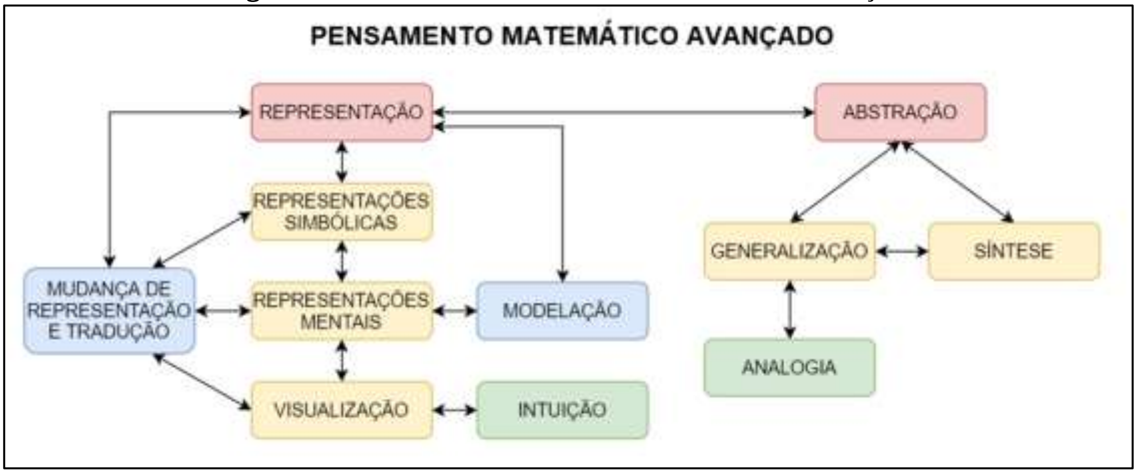
Já a *modelação* se assemelha ao processo de *representação mental*, no entanto, consiste na representação matemática de um processo não matemático, de um sistema externo físico.

O processo de *abstração* está estreitamente relacionado aos processos de *generalização* e de *síntese.* A *generalização* consiste na transição de casos gerais para casos particulares, identificando pontos comuns para expandir domínios de validade, e a *síntese,* consiste na combinação ou composição de partes do conhecimento de forma a constituir um todo (DREYFUS, 2002).

No entanto, a *abstração* demanda do indivíduo um esforço cognitivo maior, visto que constitui um processo de construção de estruturas mentais a partir de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Para Dreyfus (2002), um estudante alcança um nível avançado do pensamento matemático quando abstrai situações matemáticas de forma consciente.

A Figura 1 ilustra como se relacionam os processos do PMA propostos por Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996).

Figura 1: Processos do Pensamento Matemático Avançado



Fonte: adaptado de Klaiber (2019, p. 55).

Segundo Klaiber (2019), na Figura 1 são apresentados os processos e relações que se mostram mais relevantes para a compreensão do PMA, porém, existem outros processos e relações envolvidos nesse pensamento, como a descoberta, a classificação e a verificação que também contribuem para a aprendizagem da Matemática.

Consideramos a relevância de tais processos internos do indivíduo que ocorrem quando o estudante interage com a tarefa produzindo conhecimento, porém, acreditamos que a aprendizagem possui também um aspecto social, no qual a interação entre professores e estudantes desempenha um papel fundamental na construção do conhecimento matemático.

Nesse contexto, o Ensino-Aprendizagem Exploratório é uma perspectiva na qual se prioriza o desenvolvimento do raciocínio matemático por meio de tarefas exploratórias e investigativas, e de um ambiente de sala de aula no qual os estudantes possam discutir e justificar ideias matemáticas. Nesse ambiente, o professor deixa de assumir o papel de transmissor do conhecimento e passa a ser mediador das discussões e reflexões dos estudantes (PONTE, 2005).

Ponte (2005) propõe três fases que podem orientar o professor no planejamento de uma aula pautada no Ensino-Aprendizagem Exploratório da Matemática: (i) a introdução da tarefa; (ii) a realização da tarefa pelos estudantes; e (iii) a discussão e síntese final das aprendizagens.

Durante a introdução da tarefa o autor recomenda que o professor observe aspectos relacionados à compreensão da tarefa pelos estudantes e à adequabilidade dos recursos utilizados. Na fase seguinte ocorre a realização da tarefa, na qual espera-se que o professor explore as intervenções dos estudantes, aproveitando oportunidades para a introdução ou discussão de conceitos e procedimentos matemáticos. Na última fase, ocorre a discussão das resoluções e a síntese dos conceitos e procedimentos abordados na resolução da tarefa, o professor deve aproveitar esse momento da aula "para procurar que se clarifiquem os conceitos e procedimentos, se avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática" (PONTE, 2005, p. 16).

Notamos então, que um ponto central para uma abordagem exploratória da matemática é a escolha e elaboração das tarefas que serão trabalhadas em sala de aula.

Para auxiliar o professor nesse processo, Ponte (2005) sugere duas dimensões fundamentais para as tarefas: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O primeiro oscila entre *reduzido* e *elevado*, já o segundo, está relacionado à clareza dos objetivos da tarefa, ao que é fornecido e ao que é indeterminado no enunciado da mesma, oscilando entre *fechada* e *aberta.*

Os exercícios e explorações são classificados pelo autor como tarefas de desafio reduzido, distinguindo-se de acordo com os conhecimentos prévios do estudante. Uma tarefa na qual o estudante necessite desenvolver uma estratégia de resolução trata-se de uma exploração (tarefa aberta), enquanto uma tarefa na qual o estudante conheça quais procedimentos deve utilizar é um exercício (tarefa fechada).

Os problemas e investigações constituem tarefas de desafio elevado que se distinguem das demais por demandarem um maior nível de envolvimento dos estudantes. Os problemas são tarefas fechadas que objetivam a aplicação de procedimentos conhecidos; enquanto as investigações são tarefas abertas nas quais o estudante, além de usar criativamente conceitos já conhecidos, desenvolve novos conceitos e estratégias (PONTE, 2005).

No Quadro 1 são elencadas potencialidades de cada um dos tipos de tarefas abordados por Ponte (2005) no desenvolvimento de processos do PMA discutidos por Dreyfus (2002).

Quadro 1: Relação entre as Tarefas de Ponte (2005) e os Processos do PMA de Dreyfus (2002)

Ensino-Aprendizagem Exploratório (PONTE, 2005)	**Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 2002)**	**Relações entre Tarefa e Processo/Subprocesso**
Tarefa	**Processo/ Subprocesso**	
Exercícios	Representação/ Representação Simbólica	Possibilitam que o aluno desenvolva o raciocínio matemático, reforce procedimentos e desenvolva habilidades como a utilização de símbolos e sinais matemáticos.
Explorações	Representação/ Representação Mental, Visualização e Dedução	Fazem com que os alunos utilizem a intuição para desenvolver uma estratégia de resolução, propiciando a criação de esquemas e quadros de referências (representação mental).

	Representação/ Tradução	Por meio da apresentação de diferentes contextos auxiliam para que o aluno explore e relacione diferentes representações (como tabular, gráfica e geométrica) de um conceito. O computador pode ser uma ferramenta muito útil para as explorações.
Problemas	Representação e Abstração/ Generalização	Possibilitam que os alunos estabeleçam relações entre dados e resultados (pois são *fechados*) e iniciem a transição de casos particulares para casos gerais, assim como podem desenvolver subprocessos da Representação como, por exemplo, a tradução de um enunciado em linguagem natural para linguagem matemática.
Investigações	Representação e Abstração/ Sintetização	Estimulam a formulação de questões (pois são *abertas*) e exigem um maior esforço cognitivo para que partes do conhecimento sejam combinadas formando o conceito como um todo. Nesse caso, essas tarefas podem contemplar todos os processos do PMA.

Fonte: Bussmann, Klaiber e Silva (2017, p. 12).

Com base no exposto, sob essa perspectiva dialógica a respeito dos aspectos social e individual da aprendizagem, compreendemos o Ensino-Aprendizagem Exploratório como uma abordagem fecunda para o ensino da Matemática, capaz de potencializar o desenvolvimento do PMA e a mobilização dos processos mentais relacionados.

Procedimentos metodológicos e contexto da investigação

No estudo de Klaiber (2019) investigou-se indícios de desenvolvimento do PMA em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química de uma universidade pública federal no estado do Paraná, na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Tratou-se de um estudo qualitativo pautado na perspectiva do *Design Research*, segundo a qual o pesquisador dispõe-se a "analisar a aprendizagem no seu contexto, concebendo e estudando sistematicamente formas particulares de aprendizagem, estratégias e instrumentos educativos de uma forma sensível à natureza sistêmica da aprendizagem, educação e avaliação" (MOLINA; CASTRO; CASTRO, 2007, p. 1, tradução nossa).

Para e elaboração da trajetória de aprendizagem desenvolvida na pesquisa, foram selecionados conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, planejadas tarefas e discussões e antecipados possíveis erros e dificuldades dos estudantes.

A associação desses elementos, com base nas perspectivas teóricas do Ensino-

Aprendizagem Exploratório e do PMA, deu origem a nove episódios de ensino desenvolvidos durante seis semanas. Após a realização de cada episódio, eram conduzidas análises retrospectivas (STEFFE; THOMPSON, 2000) por meio das quais os episódios seguintes eram replanejados e as tarefas readequadas.

Os dados coletados compreenderam a produção escrita dos onze estudantes que participaram de todo o experimento, recolhida ao final de cada episódio; e as notas de campo da professora-pesquisadora, elaboradas durante e após cada episódio, descrevendo dúvidas, discussões e atitudes dos estudantes, bem como reflexões a respeito da sua própria prática.

Para a análise da produção escrita foram examinadas todas as resoluções de cada questão, que por sua vez, foram classificadas previamente como adequadas/corretas, parcialmente adequadas/corretas ou inadequadas/incorretas.

Em seguida, a categorização dos dados foi realizada a partir das características de cada um dos processos do PMA propostos por Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996) e das habilidades e procedimentos relacionados a esses processos, listados no Quadro 2 a seguir.

Quadro 2: Critérios para a identificação dos processos do PMA

PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO		
	Características segundo Dreyfus e Eisenberg (1996) e Dreyfus (2002)	**Habilidades/Procedimentos esperados/examinados/ considerados nas resoluções**
Representação Simbólica	- Comunicação de forma escrita ou falada, por meio de símbolos e sinais, do conhecimento sobre um determinado conceito matemático. - Notações matemáticas, por meio das quais ideias complexas ou processos mentais podem ser fragmentados e representados por notações físicas.	- Utilizar símbolos e/ou notações matemáticas para representar conceitos ou objetos matemáticos; e/ou - Compreender o significado de símbolos ou notações matemáticas na representação/interpretação de uma situação matemática.
Representação Mental	- Esquemas ou quadros de referências criados internamente pelo indivíduo para lidar com o mundo exterior. - Forma como o indivíduo enxerga um conceito. - Pode ser gerada por meio da visualização.	- Associar conceitos ou objetos matemáticos com operações algébricas ou aritméticas e métodos de resolução.
Visualização	- Imagem mental de um conceito. - Processo pelo qual as representações mentais podem vir a ser. - Auxilia na geração e gerenciamento da imagem de uma situação problemática, ela está intimamente ligada à análise e exploração do problema.	- Gerar alguma imagem mental de um conceito e externalizá-la por meio de esboços ou esquemas para representar e/ou compreender situações matemáticas, analisar e explorar problemas.

Intuição	- É o produto das imagens conceituais dos estudantes, assim, à medida que o estudante adquire mais experiência, ele passa de intuições iniciais, baseadas em suas matemáticas pré-formais, para intuições formais, mais refinadas.	- Utilizar conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas.
Mudança de representação e tradução	- O indivíduo se movimenta entre as diversas representações e sabe mudar de representações em contextos diferentes, escolhendo a(s) representação(ões) mais eficiente(s).	- Transitar entre diferentes representações matemáticas de um mesmo conceito ou objeto matemático e escolher a(s) representação(ões) mais eficiente(s).
Modelação	- Na modelagem o sistema externo é físico e o modelo matemático é uma estrutura mental, ou seja, consiste na representação matemática de um processo ou objeto não matemático. - Semelhante ao processo de representação mental (análogos).	- Construir ou adequar um modelo matemático a partir dos dados do enunciado da questão para estudar o comportamento de um processo.
Generalização	- Consiste na transição de casos particulares para casos gerais, é derivar ou induzir a partir de casos particulares, identificar pontos em comum, expandir domínios de validade. - Nem sempre inclui a formação de um conceito.	- Reconhecer conceitos e objetos matemáticos obtidos a partir de resultados gerais; e/ou - Induzir, a partir de casos particulares, obtendo resultados/métodos genéricos.
Analogia	- Encontrar semelhanças entre casos específicos, abordando outros casos de forma análoga, até formular casos mais gerais. - a compreensão profunda de analogias possibilita aos estudantes transitar de casos mais gerais aos mais específicos ou de casos específicos aos gerais.	- Abordar situações matemáticas semelhantes de forma análoga; e/ou - Encontrar semelhanças entre casos específicos.
Síntese	- Consiste em combinar ou compor as partes do conhecimento de forma a constituir um todo que, muitas vezes, equivale a mais do que a soma de suas partes. - Separar as propriedades e relações comuns do objeto dos aspectos específicos da representação para formar o conceito abstrato.	- Utilizar conceitos e conteúdos matemáticos diversos para analisar e interpretar uma situação matemática; e - Estabelecer relações entre propriedades e conceitos matemáticos.

Fonte: Klaiber (2019, p. 171).

Devido à escassez de espaço, para este artigo apresentaremos a elaboração da tarefa de um dos nove episódios de ensino realizados, bem como a análise da produção escrita de uma das questões desse instrumento, com base nos pressupostos mencionados. Ao final do artigo, apresentaremos os resultados obtidos por meio da análise de todos os episódios desenvolvidos na pesquisa de doutoramento da primeira autora.

A trajetória de Aprendizagem

O desenvolvimento da Experiência de Ensino na pesquisa de doutoramento de Klaiber (2019) deu origem a uma trajetória de aprendizagem para conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

Tal trajetória de aprendizagem é composta por uma prova escrita, por meio da qual realizou-se um diagnóstico das dificuldades, necessidades e interesses dos estudantes e foram alinhados os objetivos de aprendizagem da professora-pesquisadora; e cinco tarefas, que foram elaboradas com foco no desenvolvimento do PMA e aplicadas segundo os pressupostos do Ensino-Aprendizagem Exploratório.

A prova escrita foi resolvida no primeiro episódio de ensino e reaplicada no último (nono) episódio. Por meio desse instrumento pode-se realizar um comparativo a respeito da mobilização dos processos do PMA ao início e ao final da trajetória de aprendizagem.

No sexto episódio de ensino, desenvolvido no laboratório de informática e com a duração de 150 minutos, ocorreu a resolução da tarefa intitulada "Representação geométrica da solução de sistemas lineares". Foram realizadas explorações por meio do *software* GeoGebra, que possibilitaram aos estudantes trabalhar a dificuldade de se pensar Sistemas de Equações Lineares por meio de representações geométricas. Essa dificuldade foi observada na análise da prova escrita mencionada e também em pesquisas como a de Jordão (2011).

As oito questões que constituem a referida tarefa (Figura 2) abordaram os conteúdos de classificação e interpretação geométrica da solução de um Sistema de Equações Lineares, e foram elaboradas com o objetivo de oportunizar ao estudante explorar e relacionar diferentes representações para o conceito.

Figura 2: Tarefa "Representação geométrica da solução de sistemas lineares"

1- Responda: O que significa resolver um sistema linear?

2- Construa duas retas no Geogebra seguindo as instruções:

a) Crie seis controles deslizantes (por exemplo **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**), configure para que eles sejam números "inteiros" e variem de -30 a 30.

b) Digite no campo "entrada" a equação **ax**+**by**=**c**. Note que **a**, **b** e **c** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

c) Digite no campo "entrada" a equação **ex**+**dy**=**f**. Note que **e**, **d** e **f** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

3- Utilizando as retas construídas acima, verifique e comente a solução e a classificação de cada um dos sistemas lineares trabalhados na aula passada:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 4y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$

4- Abra um novo documento no Geogebra, vá em "exibir" e selecione "janela de visualização 3D". Construa três planos seguindo as instruções:

a) Crie doze controles deslizantes com as mesmas configurações usadas no exercício 2.

b) Digite no campo "entrada" a equação **ax**+**by**+**cz**=**d**. Note que **a**, **b**, **c** e **d** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

c) Repita o procedimento anterior para criar os outros dois planos, lembre-se de mudar os nomes dos controles deslizantes para cada plano.

5- Mova os controles deslizantes de forma que os três planos fiquem paralelos distintos.

a) Anote as equações desses três planos e compare-as.

b) Que tipo de solução temos para este sistema de três equações lineares?

c) Como podemos classificar esse sistema?

6- Mova os controles deslizantes de forma que as três equações fiquem múltiplas.

a) O que aconteceu com os planos, qual a posição deles?

b) Que tipo de solução temos para este sistema de três equações?

c) Como podemos classificar esse sistema?

7- Mova os controles deslizantes de forma que obtenhamos as equações de um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas com uma única solução, ou seja, um Sistema Possível Determinado. Anote o sistema obtido.

8- Delete um dos planos construídos no Geogebra. Se formássemos um sistema linear com as equações desses dois planos que restaram, quais tipos de solução poderíamos obter para esse sistema?

Fonte: Klaiber (2019, p. 319).

Tais questões constituem explorações e investigações que, de acordo com o Quadro 1, são capazes de mobilizar os seguintes processos do PMA: representação mental, visualização, dedução e mudança de representação e tradução, síntese e abstração.

A professora-pesquisadora iniciou a aplicação da tarefa entregando aos estudantes, que estavam dispostos em duplas em cada computador, uma cópia com as questões e disponibilizando o tempo de 80 minutos para as resoluções. Ela instruiu os estudantes para que fizessem o uso do *software* GeoGebra quando necessário, anotando individualmente os raciocínios e cálculos utilizados para serem entregues ao final da aula.

Durante essa fase de resolução da tarefa, a professora-pesquisadora caminhou pela sala, observando as discussões dos estudantes e auxiliando-os nas dúvidas a respeito do uso do *software*. A resolução das questões de 1 a 7 ocorreu de forma tranquila, sem muitas dúvidas a respeito do enunciado da tarefa ou dos procedimentos que deveriam ser adotados.

No entanto, durante a resolução da questão 8 professora-pesquisadora observou que os estudantes estavam com dificuldades na interpretação da representação gráfica do sistema obtido, tal representação apresentava uma reta como interseção dos dois planos.

Enquanto discutiam, um dos estudantes comentou a respeito da solução do sistema linear: - Não é SPI, pois os planos não são paralelos, e também não é SPD, pois não tem um ponto em comum... o que chamou a atenção da professora-pesquisadora.

Terminada essa fase da aula, a professora-pesquisadora iniciou então a fase de discussão e síntese das aprendizagens.

O diálogo a seguir, extraído de Klaiber (2019), ocorreu ao discutirem a resolução da Questão 8 e mostra uma parte das argumentações entre a professora-pesquisadora e dois estudantes, A e B.

> **Professora:** o que significa resolver um sistema linear? E no caso do sistema linear que vocês obtiveram?
> **Estudante A:** buscamos um ponto em comum nos planos, esse ponto é a solução do sistema.
> **Professora:** e no caso dos planos coincidentes, o que aconteceu?
> **Estudante A:** todos os pontos eram iguais, infinitos pontos em comum.
> **Estudante B:** a solução era indeterminada.
> **Professora:** e nesse caso o que aconteceu?
> **Estudante A:** tem pontos em comum e tem pontos diferentes.
> **Professora:** quantos pontos em comum?
> **Estudante A:** não sei, infinitos? Então o sistema é possível indeterminado!
> **Professora:** isso mesmo!

O diálogo acima revela a importância da fase de discussão coletiva das resoluções que, nesse caso, possibilitou aos estudantes a reflexão e a compreensão do conceito de solução possível indeterminada (SPI) de um Sistema de Equações Lineares, além de estimular o desenvolvimento de habilidades de comunicação e argumentação.

Na análise dos registros escritos para essa questão, foi observado que apenas dois estudantes a resolveram adequadamente. Quatro estudantes apresentaram resoluções inadequadas, visto que não obtiveram as equações do sistema linear, apenas elencaram as possíveis classificações para a solução do mesmo. Os demais estudantes deixaram a questão em branco.

Considerando os registros escritos e o exposto no Quadro 2, foi inferido que os processos mobilizados pelos estudantes que resolveram adequadamente a questão foram:

> - intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;
> - representação simbólica, pois, compreenderam o significado de símbolos ou notações matemáticas na representação e interpretação da situação matemática;
> - representação mental, pois, associaram o conceito de solução de um sistema linear com o tipo de solução representada geometricamente;
> - analogia, pois, abordaram de forma análoga as soluções de sistemas lineares 2x2 e 3x3 (KLAIBER, 2019, p. 253).

Para os estudantes que resolveram a questão de forma inadequada, foram encontrados indícios da mobilização do processo de intuição apenas, pois, eles listaram as possíveis classificações para um Sistema de Equações Lineares.

Após a análise de todas as questões dessa tarefa, os processos do PMA identificados foram: intuição, representação mental, representação simbólica, mudança de representação e tradução, analogia, generalização e síntese. Tais processos foram mobilizados pela maioria dos estudantes.

Foram relatadas pela professora-pesquisadora as seguintes potencialidades desse episódio de ensino para o ensino e aprendizagem dos conteúdos propostos:

> A manipulação e visualização das retas e dos planos no GeoGebra proporcionaram aos estudantes relacionar as representações algébrica e geométrica de Sistemas Lineares, e superar dificuldades identificadas pela professora-pesquisadora com a construção (manual) dessas representações.
> [...] A condução das discussões pela professora-pesquisadora segundo a perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório contribuiu, em especial, para que fossem evidenciadas dúvidas e situações matemáticas que não foram notadas pelos estudantes.
> Como no caso da Questão 8, que foi deixada em branco por parte da turma, foi possível discutir outras situações em que um Sistema Linear poderia ter infinitas soluções (além do caso trivial em que os planos representados são paralelos coincidentes), e também realizar conexões com alguns conceitos da Geometria Analítica, para posterior estudo de retas e planos (KLAIBER, 2019, p. 255).

Na seção seguinte, apresentaremos os resultados e potencialidades do produto dessa Experiência de Ensino: uma trajetória de aprendizagem para conteúdos de Matrizes e Sistemas Lineares, voltada para estudantes ingressantes do Ensino Superior.

Potencialidades da trajetória de aprendizagem para o desenvolvimento de processos do PMA

Ao final da Experiência de Ensino, no nono episódio, foi aplicado um instrumento de reavaliação com oito questões extraídas da prova escrita com função diagnóstica, que havia sido aplicada no primeiro episódio.

Por meio da análise da produção escrita dos onze estudantes para esses dois episódios foi realizado um estudo comparativo com foco nos processos do PMA mobilizados pelos estudantes.

Considerando o total de 88 resoluções analisadas em cada um dos referidos episódios, no Quadro 3 são exibidos os processos do PMA mobilizados pelos estudantes e a quantidade de resoluções nas quais foram identificados indícios desses processos.

Quadro 3: Mobilização de processos do PMA no primeiro e último episódios de ensino

Processo do PMA	**Quantidade de resoluções nas quais o processo foi evidenciado**	
	Episódio 1	**Episódio 9**
Representação Simbólica	22	63
Representação Mental	23	51
Visualização	12	9
Intuição	30	72
Mudança de Representação e Tradução	4	18
Modelação	2	11
Generalização	-	-
Analogia	1	6
Síntese	1	16
Total de resoluções analisadas	**88**	**88**

Fonte: Klaiber (2019).

De acordo com o Quadro 3 observa-se uma maior mobilização dos processos de representação mental, representação simbólica, intuição, mudança de representação e tradução, modelação, analogia e síntese, o que demonstra a contribuição da trajetória de aprendizagem para o desenvolvimento de processos mentais relacionados ao PMA nos estudantes.

O processo de visualização foi o único identificado menos vezes nas resoluções do último episódio, no entanto, nota-se que o processo de representação mental teve um aumento significativo de mobilizações. Tal ocorrência pode ser justificada pelo fato de a visualização, segundo Dreyfus (2002), ser um processo por meio do qual as representações mentais podem ser concebidas.

A respeito dos processos relacionados à abstração, foram encontrados indícios dos processos de analogia e de síntese na produção escrita de seis dentre os onze estudantes participantes do estudo, no entanto, evidenciou-se a mobilização do processo de generalização apenas no sexto episódio, abordado nesse artigo, o que demonstra uma carência de tarefas que propiciem o desenvolvimento de tal processo na trajetória de aprendizagem.

Além disso, de acordo com Klaiber (2019), enquanto no primeiro episódio apenas três estudantes mobilizaram a maior parte dos processos identificados, no último episódio foram encontrados indícios da mobilização de processos do PMA pela maioria dos estudantes, na resolução de sete dentre as oito questões propostas.

Verificou-se que a trajetória de aprendizagem elaborada na pesquisa de doutorado relatada apresentou potencialidades para o desenvolvimento de processos do PMA bem como para o ensino e aprendizagem de conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, uma vez que o conhecimento de tais processos por parte do professor contribui para o desenvolvimento de um caminho de aprendizagem mais eficaz para os estudantes (DREYFUS; EISENBERG, 1996).

Nesse sentido, foi constatado pela professora-pesquisadora que o trabalho com diferentes representações para tais conceitos, propiciado pelas tarefas, beneficiou os estudantes na utilização, interpretação e tradução entre diferentes representações de situações matemáticas.

Destacou-se também o uso do *software* GeoGebra como uma alternativa eficaz para a visualização e exploração de representações geométricas de Sistemas de Equações Lineares, complementando a abordagem predominantemente algébrica adotada por livros didáticos do Ensino Médio (BATTAGLIOLI, 2008) e do Ensino Superior, como detectado por Klaiber (2019) na análise dos livros didáticos da disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Por fim, Klaiber (2019) relatou que no decorrer da Experiência de Ensino o trabalho em grupo foi um facilitador da aprendizagem, possibilitando o compartilhamento de diferentes estratégias entre os estudantes e a mediação das aprendizagens pela professora-pesquisadora provocando “[...] alterações no ambiente de sala de aula e nas rotinas de trabalho dos estudantes, exigindo desses uma participação ativa em seu processo de aprendizagem e favorecendo a formulação de conjecturas e a justificação” (p. 297).

Considerações Finais

A Experiência de Ensino desenvolvida em Klaiber (2019) possibilitou a ampliação do conhecimento disponível a respeito do ensino e da aprendizagem da Álgebra Linear e, em particular, de conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

Nesse sentido, a elaboração e aplicação das tarefas da trajetória de aprendizagem – como a tarefa apresentada nesse artigo – mostrou-se uma construção cheia de significados, articulando conhecimentos a respeito das dificuldades e conhecimentos prévios dos estudantes, da abordagem de livros didáticos da disciplina e de pesquisas a respeito do ensino e da aprendizagem dos conteúdos mencionados.

Assim, apresentamos nesse artigo uma trajetória de aprendizagem pautada nas perspectivas do Ensino-Aprendizagem Exploratório (PONTE, 2005) e do PMA (DREYFUS, 2002; DREYFUS; EISENBERG, 1996) que demonstrou, com relação aos estudantes, potencialidades para desenvolver:

- processos do PMA, em especial, os relacionados ao processo de abstração;
- a compreensão de conteúdos de Sistemas de Equações Lineares; e
- habilidades de comunicação oral e argumentação.

E aos professores, mostrou-se como um caminho promissor para a elaboração de tarefas e objetivos de aprendizagem, de hipóteses sobre o processo de aprendizagem; e para a construção de um ambiente de sala de aula que priorize o papel ativo dos estudantes, promovendo discussões, reflexões e argumentações entre esses.

Destacamos que os resultados aqui apresentados, obtidos a partir da pesquisa de Klaiber (2019), estão sujeitos às especificidades do contexto não sendo, portanto, generalizáveis. Porém, estimamos que provoquem novos estudos e propostas que possam contribuir para o desenvolvimento do PMA e, assim, para a aprendizagem da Matemática no Ensino Superior.

Referências

BARROS, P. M.; FERNANDES, J. A.; ARAÚJO, C. M. Prontidão de alunos do ensino superior para a aprendizagem de álgebra linear. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 43-59, 2016.

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas lineares na segunda série do ensino médio**: um olhar sobre os livros didáticos. 2008. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP, São Paulo. 2008.

BUSSMANN, C. J. C.; KLAIBER, M. A.; SILVA, D. P. Processos mentais de Dreyfus e o Ensino Exploratório: discussão e possível intervenção em sala de aula. *In:* ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14, 2017. Cascavel. **Anais...** Cascavel:

Unioeste, 2017. p. 1-13.

DREYFUS, T.; EISENBERG, T. On Different Facets of Mathematical Thinking. *In:* STERNBERG, R. J.; BEN-ZEEV; T. (Eds.). **The nature of mathematical thinking.** USA: Lawrence Erlbaum Associates, 1996. p. 253-284.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. *In*: TALL, D. (Org.), **Advanced mathematical thinking.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

JORDÃO, A. L. I. **Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio.** 2011. 193 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP, São Paulo. 2011.

KLAIBER, Michelle Andrade. **Introdução à Álgebra Linear em um curso de licenciatura em química:** o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado por meio de uma Experiência de Ensino. 2019. 329 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina – UEL/PR, Londrina. 2019.

LUCAS, C. O. *et al*. Aspectos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e Espanha: Análise de um Questionário. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.16, n.1, p.1-24, 2014.

MOLINA, M.; CASTRO, E.; CASTRO, E. Teaching experiments within design research. **The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences**, v. 2, n. 4, p. 435-440, 2007.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. *In:* GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, 2005. p.11-34.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *In:* KELLY, A.; LESH, E. (Eds.), **Handbook of research design in mathematics and science education.** Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000, p. 267-306.

Recebido em: 19 de junho de 2020
Aprovado em: 30 de julho de 2020