revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O USO DE TAREFAS EXPLORATÓRIAS NO ESTUDO DA TRIGONOMETRIA EM TRIÂNGULOS ESFÉRICOS RETÂNGULOS[1]

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.28-51

Jussara Aparecida da Fonseca[2]
José Carlos Pinto Leivas[3]

Resumo: o presente trabalho tem por objetivo analisar como alunos de um curso de licenciatura em matemática verificam expressões da trigonometria em triângulos esféricos retângulos, a partir das razões trigonométricas da geometria plana, na realização de tarefas exploratórias. Para tanto, por meio de uma abordagem de pesquisa qualitativa, buscamos aporte no papel das tarefas exploratórias no ensino de matemática e pautamos nossa coleta de dados na produção escrita dos sujeitos, oriundas das resoluções de dez dessas tarefas. Como resultado da análise feita, constatamos que a maioria dos participantes não tiveram dificuldades na verificação de expressões que exploravam as razões trigonométricas em triângulos retângulos planos, obtidos a partir de construções sobre as faces do triedro associado ao triângulo esférico retângulo, bem como naquelas definidas a partir da permutação de elementos. Verificamos que as dificuldades apresentadas se relacionaram principalmente na determinação da tangente de um arco, que em diversas situações foi indicada de forma equivocada. Além disso, alguns alunos apresentaram dificuldades na dedução das fórmulas que dependiam de outras expressões, não conseguindo articular um resultado já verificado com aquele a ser confirmado.
Palavras-chave: Trigonometria esférica. Tarefa exploratória. Triângulos esféricos.

THE USE OF EXPLORATORY TASKS IN THE STUDY OF TRIGONOMETRY IN RIGHT SPHERICAL TRIANGLES

Abstract: the present work aims to analyze how students of a mathematics degree course verify expressions of trigonometry in spherical right triangles, from the trigonometric reasons of plane geometry, in the performance of exploratory tasks. For this, through a qualitative research approach, we seek to contribute to the role of exploratory tasks in the teaching of mathematics and base our data collection on the subjects written production, derived from the resolutions of ten of these tasks. As a result of the analysis, we found that most participants had no difficulties in verifying expressions that explored trigonometric ratios in flat right triangles, obtained from constructions on the faces of the triedro associated with the spherical right triangle, as well as those defined in from the permutations elements. We found that the difficulties presented were mainly related to the determination of the tangent of an arc, which in several situations was wrongly indicated. In addition, some students had difficulties in deducting formulas that depended on other expressions, failing to articulate a result already verified with the one to be confirmed.
Keywords: Spherical trigonometry. Exploratory task. Spherical triangles.

Introdução

A trigonometria, comumente trabalhada na Educação Básica e nos cursos de licenciatura em matemática, tem como objeto de estudo as relações métricas de ângulos e

[1] O trabalho refere-se a um recorte da tese de doutorado da primeira autora.

[2] Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN); Professora do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete; E-mail: jussara.mat@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6722-0743.

[3] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Paraná (UFPR); Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Franciscana (UFN); E-mail: leivasjc@ufn.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6876-1461.

lados de triângulos no plano euclidiano. Contudo, essa não é a única trigonometria, pois existe uma ramificação dessa, conhecida como trigonometria esférica.

Coutinho (2015, p. 4) apresenta, de forma clara, a diferença entre as duas trigonometrias. Segundo o autor, “a trigonometria é chamada plana se investiga as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo que pertença a um plano. Diz-se esférica quando estuda os triângulos situados na superfície de uma esfera”.

O autor destaca, ainda, que não existe uma trigonometria esférica, propriamente dita, em que se determinaria, por exemplo, um seno ou um cosseno esférico. O que existe é a trigonometria usual aplicada em triângulos esféricos, a qual acaba sendo denominada trigonometria esférica.

Nessa perspectiva, a trigonometria esférica é um exemplo constituído de relações métricas em triângulos não-euclidianos. Os triângulos nos quais se desenvolve essa trigonometria são conhecidos por triângulos esféricos recebendo tal denominação por serem obtidos sobre uma superfície esférica, em um modelo de geometria não-euclidiana. Esse modelo é conhecido por geometria esférica, a qual é caracterizada como não-euclidiana principalmente por não admitir a existência de retas paralelas, mas não somente por isso.

De acordo com Coutinho (2001), temos no matemático alemão Georg Bernhard Riemann (1826-1866), o principal responsável pela criação da geometria esférica. Na geometria criada por Riemann, circunferências máximas assumem o papel de reta. Além da substituição do axioma das paralelas, há também modificação de outras noções da geometria euclidiana, como a noção de “estar entre” e de “infinitude da reta”. Assim, a reta passou a ser vista como ilimitada e não mais como infinita.

O surgimento da trigonometria está diretamente relacionado aos estudos da Astronomia, a qual se desenvolveu a partir de conhecimentos envolvendo triângulos esféricos, nos levando a constatar que a trigonometria foi desenvolvida primeiro com triângulos esféricos (COUTINHO, 2015).

O marco de separação entre a trigonometria e a Astronomia foi o tratado “*De triangulis omnimodis libri quinque”* (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos), do matemático Johann Müller Regiomontanus (PEREIRA, 2010). Esse trabalho é considerado a primeira exposição sistemática e formal da trigonometria plana e da esférica, desvinculando a última da Astronomia.

Uma importante aplicação da trigonometria em triângulos esféricos consiste dos deslocamentos aéreos e marítimos. Apesar de o nosso planeta ter a forma de um geoide, para efeitos de orientação e localização o consideramos como uma esfera, conhecida como globo terrestre. Esse é composto por elementos importantes, tais como os meridianos, a linha do Equador e os polos. Os meridianos correspondem a semicircunferências máximas que ligam os polos norte e sul, os quais são os pontos de intersecção do globo terrestre e seu eixo de rotação. A linha do Equador é a circunferência máxima definida pela secção plana perpendicular ao eixo de rotação.

Os deslocamentos terrestres se dão a partir de um sistema de eixos coordenados, em que o horizontal é representado pelo Equador e o vertical pelo meridiano de Greenwich, considerado o marco zero dos meridianos. Esse sistema permite a definição de medidas denominadas latitude e longitude, que são denominadas coordenadas geográficas.

Conhecidas essas coordenadas e/ou outras informações próprias da navegação, tais como rumo, azimute e derrota[4], é possível com a trigonometria esférica determinar o melhor caminho a ser percorrido por uma embarcação ou aeronave em viagens de longas distâncias. Também, obter a distância entre dois pontos quaisquer do planeta Terra.

O conhecimento relacionado à trigonometria em triângulos esféricos é amplo e de suma importância e, por isso, buscamos na pesquisa de doutorado da primeira autora trazer elementos dessa área de estudo. É inegável sua importância para entendimento dos deslocamentos sobre o globo terrestre, bem como sua ligação com outras áreas do conhecimento, em especial, da geografia. Todavia, pela amplitude e quantidade de fórmulas descritas no estudo da trigonometria em triângulos esféricos, escolhemos para a investigação realizada, aquelas decorrentes de triângulos esféricos retângulos.

Sendo assim, o presente trabalho é um recorte dessa pesquisa e tem por objetivo analisar como alunos de um curso de licenciatura em matemática, verificam expressões da trigonometria em triângulos esféricos retângulos na realização de tarefas exploratórias, a partir das razões trigonométricas da geometria plana.

Nesta direção, inicialmente, realizamos uma discussão sobre o papel das tarefas no ensino de matemática, em especial, das tarefas exploratórias propostas por João Pedro da Ponte. Após, apresentamos nossos encaminhamentos metodológicos, destacando além da caracterização dos sujeitos participantes, a forma de organização das tarefas. Finalmente, realizamos a análise e discussão dos dados coletados, a partir das tarefas propostas.

[4] Rumo, azimute e derrota são terminologias próprias da navegação. Rumo e azimute se referem a direção (ângulo) que uma embarcação deve seguir e derrota é o caminho propriamente dito e pode ser ortodrômica, quando o caminho seguido é um arco de circunferência máxima ou loxodrômica, quando é mantido o mesmo rumo, durante todo o percurso. Maiores informações consultar: COUTINHO, L. **Trigonometria esférica**: a matemática de um espaço curvo. Rio de Janeiro: Interciência, 2015.

Tarefas exploratórias no ensino de matemática

João Pedro da Ponte, conhecido educador matemático português, em seus estudos sobre as investigações matemáticas propõe a noção de tarefa. A escolha, a elaboração e a aplicação de tarefas matemáticas são a base para o desenvolvimento de investigações matemáticas em sala de aula.

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar, propostos pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2008), corroboram essa ideia ao apontar que para um ensino efetivo, a seleção de tarefas matemáticas deve ocorrer de modo a possibilitar a introdução de conceitos importantes e despertar a curiosidade dos alunos, desafiando-os intelectualmente.

O termo tarefa pode se referir a um exercício, problema, exploração ou investigação e é designado a partir de quatro dimensões: grau de complexidade, estrutura, contexto referencial e tempo necessário para sua realização (PONTE, 2005, 2010).

De acordo com Ponte (2005, p. 17-18), o grau de complexidade varia de reduzido a elevado e a estrutura entre aberta e fechada, sendo que "uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas".

Cruzando as duas dimensões, o autor define quatro tipos de tarefa, de acordo com o grau de complexidade e estrutura (Figura 1).

Figura 1: Tipo de tarefas de acordo com o grau de complexidade e a estrutura

Fonte: Ponte (2010, p. 21)

Os exercícios e problemas são tarefas com estrutura fechada, sendo os primeiros de reduzida complexidade e os segundos de complexidade elevada. Explorações e investigações são tarefas com estrutura aberta, com grau de complexidade reduzido e elevado, respectivamente.

Ponte (2003) ressalta que não há clara distinção entre as explorações e as investigações. Como são tarefas abertas, o grau de complexidade pode variar de aluno a aluno. Ainda para o autor, esses tipos de tarefas possibilitam que os alunos desenvolvam suas competências matemáticas, assumindo, portanto, papel importante na sala de aula.

Outra dimensão importante na classificação das tarefas é o contexto referencial. Uma tarefa pode ter um contexto de situação real ou puramente matemático (PONTE, 2003, 2005, 2010). De acordo com o autor, existem estudos que apontam a existência de um contexto intermediário – a semirrealidade[5]. Esse outro contexto se justifica pelo fato de que mesmo que uma tarefa envolva situações reais, para o aluno pode não significar isso, acarretando que tal tarefa apresente um contexto tão abstrato quanto o da matemática pura.

A quarta e última dimensão utilizada na classificação das tarefas é o tempo. Uma tarefa pode ser de curta, média ou longa duração, sendo que, na maioria das vezes, exercícios são de curta duração, problemas, explorações e investigações são de média e projetos são de longa duração.

Cyrino e Jesus (2014) apontam a demanda cognitiva como uma das dimensões a serem utilizadas na classificação de tarefas, conforme estudos do projeto QUASAR[6]. De acordo com as autoras, "o nível de demanda cognitiva de uma tarefa está relacionado aos tipos de raciocínio matemático que são exigidos dos alunos para sua realização, bem como com o nível e o tipo de aprendizagem que proporciona aos alunos" (CYRINO; JESUS, 2014, p. 754).

Neste caso, as tarefas podem ser do tipo: memorização; procedimentos sem conexão com significado; procedimentos com conexão com significado e fazer matemática. As tarefas de memorização e procedimentos sem conexão com significados são consideradas de baixo nível de demanda cognitiva; já as tarefas de procedimentos com conexão com significados e as de fazer matemática, são tomadas como de elevado nível de demanda cognitiva.

Assim, um paralelo entre as ideias de Cyrino e Jesus (2014) e as de Ponte (2003, 2005, 2010), podemos considerar que as tarefas exploratórias e investigativas são de elevado nível de demanda cognitiva, sendo relacionadas, respectivamente, às tarefas de procedimentos com conexão com significado e tarefas de fazer matemática.

[5] Ver: SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

[6] QUASAR (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning) foi um projeto desenvolvido nos Estados Unidos com o objetivo de melhorar o ensino de matemática de estudantes que frequentavam escolas em comunidades menos favorecidas economicamente. O projeto dava ênfase ao pensamento, ao raciocínio, à resolução de problemas e à comunicação de ideias matemáticas.

No processo de ensino e de aprendizagem matemática, é necessário que as tarefas sejam utilizadas de forma diversificada, favorecendo os objetivos da aprendizagem. Nessa perspectiva, as tarefas fechadas (exercícios e problemas), proporcionam o desenvolvimento do raciocínio matemático, pois dependem da relação entre dados e resultados e as de caráter aberto (explorações e investigações), contribuem para a construção da capacidade de lidar com situações complexas, com autonomia e criticidade (PONTE, 2005).

Ainda, para Ponte (2005), as tarefas de natureza desafiante (problemas e investigações) são importantes para os alunos vivenciarem a verdadeira experiência matemática, enquanto que as acessíveis (exercícios e explorações) possibilitam o desenvolvimento da autoconfiança na construção do conhecimento matemático.

Canavarro e Santos (2012, p. 100) reconhecem as tarefas como base da prática de ensino de matemática, destacando a diversificação dessas como agentes propulsores de um conjunto de experiências matemáticas variadas. Essas são vivenciadas pelos alunos, possibilitando diferentes alcances aos objetivos de ensino do professor.

Corroborando, Cyrino e Jesus (2014, p. 754) ressaltam que, quando o professor conhece e reflete a respeito das tarefas, ele pode:

> - escolher tarefas adequadas a seus objetivos de ensino; - iniciar um processo de ensino que priorize tarefas desafiadoras, nas quais o aluno pode estabelecer conexões com significados ou com ideias e conceitos matemáticos; - reconhecer que as tarefas podem expressar mais do que o conteúdo; - perceber como as tarefas influenciam o seu ensino e, consequentemente, a aprendizagem dos alunos; - proporcionar um ambiente de aprendizagem durante as aulas de matemática; e - perceber qual o impacto de suas ações no processo de ensino e de aprendizagem.

Uma etapa importante no processo de ensino e de aprendizagem é a elaboração de tarefas. Swan (2017), ao discorrer sobre a concepção de tarefas, estipula quatro objetivos: desenvolvimento do conhecimento factual e da fluência processual; desenvolvimento da compreensão conceitual; desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas não rotineiros (competência estratégica) e desenvolvimento da análise crítica (competência crítica).

Nesse sentido, a escolha por tarefas de cunho exploratório em sala de aula, elaboradas na direção do desenvolvimento de conceitos matemáticos e dirigidas a um ensino de caráter exploratório, favorece o processo de ensino e de aprendizagem. Para Ponte *et al.* (2015, p. 114), “o trabalho exploratório na aula de Matemática cria oportunidades para que os alunos construam ou aprofundem a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas".

Assim, tarefas voltadas a um ensino exploratório, no qual o professor é mediador do processo e o aluno é o responsável pela construção de seu conhecimento, apresentam características que vão além da simples memorização de regras e que proporcionam a aprendizagem com compreensão.

Encaminhamentos metodológicos

O presente trabalho é de natureza qualitativa. Para Creswell (2010), pesquisas com essa abordagem apresentam as seguintes características: ambiente natural; pesquisador como instrumento fundamental; múltiplas fontes de dados; análise de dados indutiva; relevância dos significados dos participantes; projeto emergente; lente teórica; análise de dados interpretativa e relato holístico.

A pesquisa foi realizada no ambiente em que os participantes estavam inseridos, sendo o pesquisador o instrumento principal para coleta de dados, a partir de variadas fontes (bibliografias, observações, sequência didática, etc.). O projeto de pesquisa foi construído de forma passível a alterações, caso necessárias. A análise dos dados ocorreu de forma interpretativa e indutiva, com base em uma fundamentação teórica, enfatizando os significados construídos pelos participantes e com objetivo de construção de um relatório final, abrangendo os diversos fatores envolvidos no processo de pesquisa.

Os sujeitos da pesquisa foram doze alunos de diferentes semestres do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete, denominados A1, A2, ..., A12. Cabe ressaltar que na análise e discussão dos dados não haverá informações das participantes A2 e A6, as quais estavam ausentes nos dias em que desenvolvemos as tarefas apresentadas neste artigo. Todavia, decidimos indicar que faziam parte dos sujeitos da pesquisa, tendo em vista terem participado de todas as demais etapas.

A coleta de dados se deu por intermédio de um conjunto de atividades extraclasse, formadas por tarefas exploratórias e propostas semanalmente aos participantes. Para a pesquisa de doutorado, foram realizadas quatro atividades exploratórias no plano, quatro na superfície esférica e três em triângulos esféricos. Aqui, como trata-se de um recorte, iremos apresentar uma das atividades exploratórias em triângulos esféricos.

Assim, os dados foram coletados a partir das resoluções apresentadas pelos participantes de dez tarefas em que se buscava a dedução das fórmulas da trigonometria em triângulos esféricos retângulos, ou seja, as apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1: Fórmulas da trigonometria para um triângulo esférico ABC retângulo em Â

I. $\cos a = \cos b \cdot \cos c$	VI. $tg\, b = sen\, c \cdot tg\, \hat{B}$
II. $sen\, b = sen\, a \cdot sen\, \hat{B}$	VII. $tg\, c = sen\, b \cdot tg\, \hat{C}$
III. $sen\, c = sen\, a \cdot sen\, \hat{C}$	VIII. $tg\, c = tg\, a \cdot \cos \hat{B}$
IV. $\cos \hat{B} = \cos b \cdot sen\, \hat{C}$	IX. $tg\, b = tg\, a \cdot \cos \hat{C}$
V. $\cos \hat{C} = \cos c \cdot sen\, \hat{B}$	X. $\cos a = cotg\, \hat{B} \cdot cotg\, \hat{C}$

Fonte: elaborado pela autora

Observamos que essas fórmulas remetem às razões trigonométricas não apenas dos ângulos, mas também dos lados do triângulo esférico retângulo, envolvendo sempre três elementos. Lembrando que resolver um triângulo, significa determinar todos os seus termos desconhecidos, é possível observar que as expressões, constantes do Quadro 1, nos permitem resolver um triângulo esférico retângulo. Isso ocorre, pois, sendo conhecidos dois elementos do triângulo (lado e/ou ângulo), além do ângulo reto, é possível determinar um terceiro elemento e, com esse, determinar todos os demais elementos.

As tarefas propunham a dedução das dez fórmulas por três estratégias distintas: (I) expressões obtidas a partir de explorações de razões trigonométricas definidas nos triângulos retângulos planos (tarefas 1, 2, 6 e 7); (II) expressões determinadas a partir da permutação de elementos (tarefas 3 e 5) e (III) expressões definidas com base na manipulação de outras já verificadas (tarefas 4, 8, 9 e 10).

No próximo tópico detalharemos cada tarefa, bem como a estratégia a ser utilizada em sua resolução e a análise das respostas apresentadas pelos participantes.

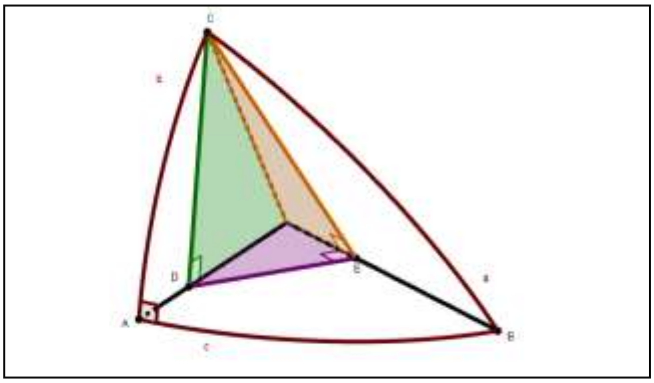
Análise e discussão dos dados

A dedução das fórmulas da trigonometria em triângulos esféricos pode ser realizada de diferentes formas. Uma opção é partir da dedução das leis dos senos e dos cossenos para lados e para ângulos de triângulos esféricos quaisquer e determinar as fórmulas para o caso particular, em um ângulo medindo 90º.

Outra possibilidade, que realizamos nesse trabalho, é explorar relações entre elementos (ângulos e lados) de um triângulo esférico retângulo e ângulos de triângulos retângulos planos, obtidos a partir de construções sobre as faces do triedro correspondente ao triângulo esférico. Neste cenário, com base nas razões trigonométricas para triângulos retângulos planos (seno, cosseno e tangente) e em manipulações algébricas é possível determinar as fórmulas da trigonometria em triângulos esféricos retângulos.

Antes da realização das tarefas envolvendo a dedução das fórmulas da trigonometria em triângulos esféricos retângulos, os alunos realizaram, com o auxílio do software GeoGebra, a construção de um triângulo esférico ABC, retângulo em Â, com seu respetivo triedro. A partir de passos orientados pela pesquisadora, construíram triângulos retângulos planos sobre as faces de triedro (Figura 2), os quais são a base para a realização das tarefas.

Figura 2: Representação do triângulo esférico ABC, retângulo em Â, e triângulos planos construídos nas faces de seu triedro



Fonte: elaborado pela autora

Em uma primeira etapa exploratória, após a construção mostrada na Figura 2, os alunos deveriam indicar relações/correspondências entre elementos do triângulo esférico retângulo (ângulos e lados) e ângulos dos triângulos retângulos planos. Neste processo, os alunos deveriam identificar, por exemplo, que o ângulo plano CÔE do triângulo retângulo plano COE correspondia ao lado a do triângulo esférico retângulo ABC. Esse foi um passo importante, pois garantiria a relação entre uma razão trigonométrica de um ângulo de um triângulo retângulo plano e a mesma para um elemento (lado ou ângulo) do triângulo esférico retângulo.

Após os alunos identificarem todas as correspondências entre os elementos do triângulo esférico retângulo e os ângulos de triângulos retângulos planos, houve um momento de socialização para confirmação dos resultados encontrados. Na sequência passamos para a segunda etapa exploratória, em que foram propostas as tarefas apresentadas no Quadro 2, acompanhadas de uma cópia impressa da construção realizada anteriormente (Figura 2).

Quadro 2: Tarefas da atividade exploratória em triângulos esféricos

Atividade Exploratória em Triângulos Esféricos
Deduza as relações trigonométricas para o triângulo esférico ABC, retângulo em Â, realizando as tarefas a seguir.
1. Utilizando os triângulos CDO, CEO e DEO, mostre que $cos\, a = cos\, b \cdot cos\, c$.
2. De modo análogo, utilizando os triângulos CDO, CDE e CEO, mostre que $sen\, b = sen\, \hat{B} \cdot sen\, a$.
3. Defina uma expressão semelhante a encontrada na tarefa anterior, permutando as letras b e c para os ângulos e os lados.
4. A partir da relação $sen\, c = sen\, \hat{C} \cdot sen\, a$ e dos triângulos CDE e CDO, mostre que $cos\, \hat{B} = cos\, b \cdot sen\, \hat{C}$.
5. Determine uma expressão semelhante a encontrada na tarefa anterior, a partir da permutação das letras b e c, dos ângulos e dos lados.
6. Utilizando os triângulos CDO, CDE e DEO, mostre que $tg\, b = sen\, c \cdot tg\, \hat{B}$.
7. Utilizando os triângulos DEO, CDE e CEO, mostre que $tg\, c = tg\, a \cdot cos\, \hat{B}$.
8. Utilizando as expressões deduzidas em (2), (3) e (5), mostre que $tg\, c = sen\, b \cdot tg\, \hat{C}$.
9. Utilizando as expressões deduzidas em (1), (2) e (5), mostre que $tg\, b = tg\, a \cdot cos\, \hat{C}$.
10. Utilize as expressões encontradas em (1), (4) e (5) para mostrar que $cos\, a = cotg\, \hat{B} \cdot cotg\, \hat{C}$

Fonte: elaborado pela autora

Como as fórmulas eram desconhecidas dos participantes, elaboramos as tarefas exploratórias indicando que fórmula deveria ser deduzida e sugerindo alguns encaminhamentos para a realização do processo de dedução. Acreditamos que essa ação, não descaracteriza as tarefas propostas como de exploração, pois além de requerer do aluno a identificação da correspondência entre o elemento do triângulo esférico retângulo e o ângulo do triângulo retângulo plano, ainda demandava o reconhecimento e aplicação da razão trigonométrica a ser utilizada e o processo de demonstração, o qual não é trivial para a maioria dos alunos.

Para Ponte (2005), muitas vezes os tipos de tarefas não têm uma linha de demarcação muito nítida, sendo que um mesmo enunciado pode caracterizar um exercício ou uma exploração, por exemplo. O que vai definir são os conhecimentos prévios dos alunos e como são mobilizados para resolução da tarefa.

Assim, mesmo que as tarefas propostas não tenham característica de enunciado aberto, podem ser classificadas como exploratórias por sua proposta de desenvolvimento do raciocínio matemático e sua natureza desafiante, como destacado por Ponte *et al*. (2015, p. 114), "a abordagem exploratória valoriza o desenvolvimento do raciocínio através de tarefas com um caráter de algum modo aberto ou desafiante".

Além disso, como já destacamos tarefas desse tipo se assemelham a tarefas classificadas como procedimentos com conexão com significado, as quais conforme apontado por Stein e Smith (1998 *apud* CYRINO; JESUS, 2014), envolvem elevado nível de demanda cognitiva e têm entre outras características a sugestão, implícita ou explicita, de caminhos a serem seguidos, os quais são procedimentos amplos e gerais, intimamente ligados às ideias conceituais.

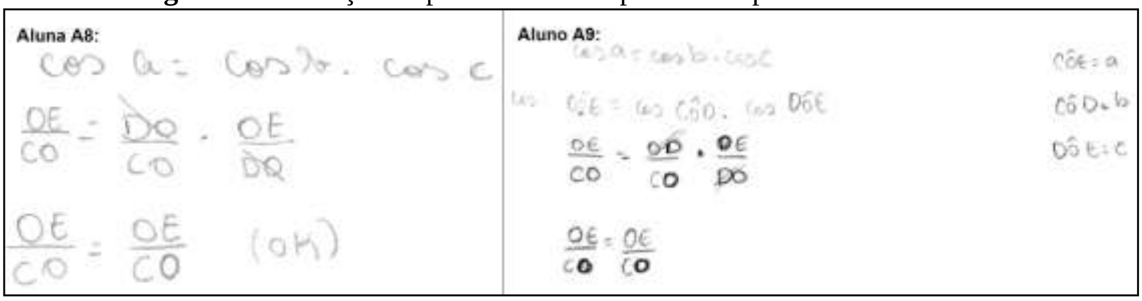
Acreditamos que as tarefas propostas vão ao encontro de Ponte (2005, p. 28), quando afirma que as tarefas escolhidas devem contemplar uma trajetória de aprendizagem coerente, permitindo aos alunos "a construção de conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática".

A primeira tarefa requeria a confirmação da fórmula $\cos a = \cos b \cdot \cos c$, conhecida como teorema de Pitágoras da geometria esférica. Esse resultado, como o conhecemos da geometria plana, não é válido na geometria esférica e, além disso, a fórmula apresentada envolve uma relação entre o valor da hipotenusa e dos catetos do triângulo esférico retângulo.

Para verificação da expressão $\cos a = \cos b \cdot \cos c$, os alunos deveriam identificar as relações: $\cos a = \frac{EO}{CO}$ $(\Delta\, CEO)$, $cos\ b = \frac{DO}{CO}$ $(\Delta\, CDO)$ e $\cos c = \frac{EO}{DO}$ $(\Delta\, DEO)$, com as quais se confirma que $\cos b \cdot \cos c = \frac{DO}{CO} \cdot \frac{EO}{DO} = \frac{EO}{CO} = \cos a$.

Pelas resoluções apresentadas, verificamos que A1, A3, A4, A5, A8, A9, A11 e A12 responderam de forma correta. Desses, A1, A3, A8, A9 e A11 utilizaram como estratégia trabalhar os dois membros da expressão, de modo a obter uma igualdade, como exemplificamos nas resoluções apresentadas na Figura 3.

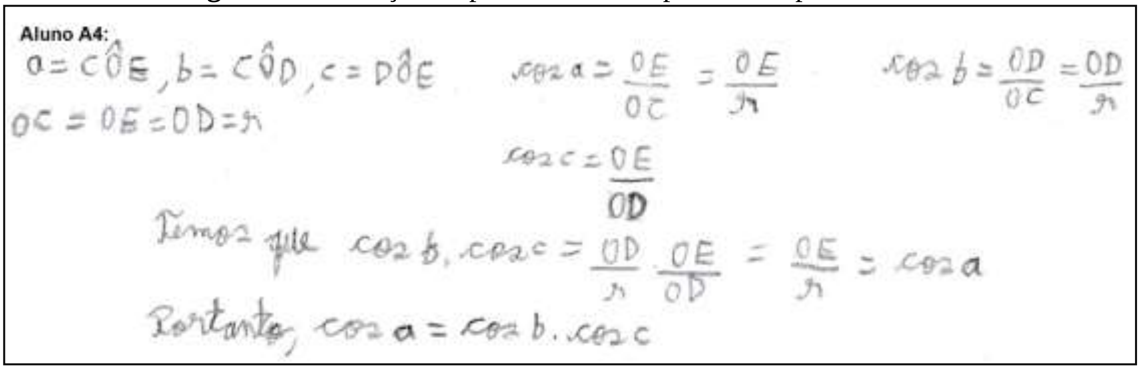
Figura 3: Resolução da primeira tarefa apresentada pelos alunos A8 e A9



Fonte: dados da pesquisa

Por sua vez, A4, A5 e A12 escolheram como estratégia para verificação a manipulação algébrica de um membro da igualdade de modo a obter a expressão do outro membro. Os três alunos destacaram as correspondências entre cada lado do triângulo esférico ABC e ângulos dos triângulos retângulos CDO, CEO e DEO, indicando a partir dessas relações o cosseno de cada um dos lados do triângulo esférico. Na Figura 4, apresentamos como exemplo a resolução elaborada por A4.

Figura 4: Resolução da primeira tarefa apresentada pelo aluno A4


Aluno A4:
$a = C\hat{O}E$, $b = C\hat{O}D$, $c = D\hat{O}E$ $\quad \cos a = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{r}$ $\quad \cos b = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{r}$
$OC = OE = OD = r$
$\cos c = \frac{OE}{OD}$
Temos que $\cos b . \cos c = \frac{OD}{r} . \frac{OE}{OD} = \frac{OE}{r} = \cos a$
Portanto, $\cos a = \cos b . \cos c$

Fonte: dados da pesquisa

Já A7 e A10 se equivocaram em suas resoluções ao identificarem o cosseno de um dos lados de forma errônea. O aluno A7 assinalou $\cos c = \frac{DE}{OD}$, ao invés de $\cos c = \frac{OE}{OD}$. Consequentemente, com o processo de simplificação, obteve o resultado $\frac{DE}{CO}$, que não corresponde a nenhuma razão trigonométrica. A aluna A10 se confundiu ao indicar $cos\,a = \frac{OE}{CE}$, quando deveria apontar $cos\,a = \frac{OE}{OC}$, o que a impossibilitou de verificar a validade da expressão $cos\,a = cos\,b \cdot cos\,c$.

A segunda tarefa, almejava que os alunos verificassem a expressão $sen\,b = sen\,\hat{B} \cdot sen\,a$, com base nas relações entre elementos do triângulo esférico retângulo e os triângulos retângulos planos CDO, CDE e CEO. Neste processo, encontrariam $sen\,b = \frac{CD}{CO}$ $(\Delta\,CDO)$, $sen\,\hat{B} = \frac{CD}{CE}$ $(\Delta\,CDE)$ e $sen\,a = \frac{CE}{CO}$ $(\Delta\,CEO)$, resultando em $sen\,\hat{B} \cdot sen\,a = \frac{CD}{CE} \cdot \frac{CE}{CO} = \frac{CD}{CO} = sen\,b$, ou seja, $sen\,b = sen\,\hat{B} \cdot sen\,a$.

Todos os participantes resolveram esta tarefa de forma correta, sendo que, com exceção de A4, utilizaram no processo de verificação o artificio de substituir as razões trigonométricas nos dois membros da expressão, e manipular algebricamente de modo a determinar uma igualdade. Já A4 escolheu como estratégia de resolução operar de um lado da igualdade de forma a obter o outro, como já havia feito na tarefa anterior.

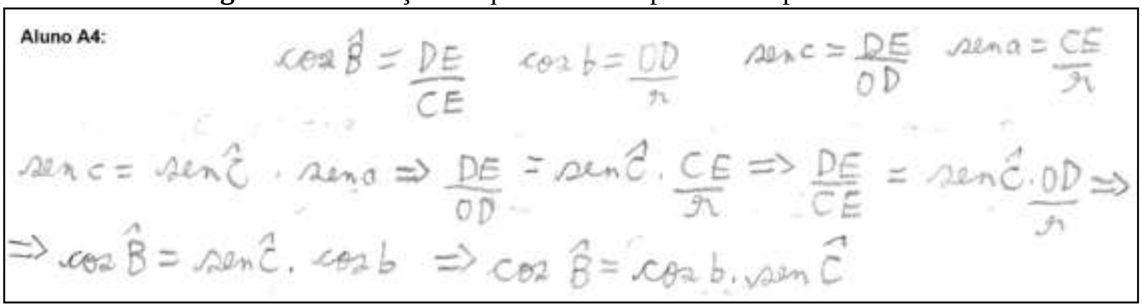
Na terceira tarefa, sugerimos determinar a fórmula $sen\, c = sen\, \hat{C} \cdot sen\, a$ a partir da permutação das letras “b” e “c” (indicativas dos lados e dos ângulos) na expressão $sen\, b = sen\, \hat{B} \cdot sen\, a$. Propomos essa tarefa com o intuito de tornar o processo de obtenção e verificação das fórmulas da trigonometria em triângulos esféricos menos maçante e repetitivo.

A maioria dos alunos resolveu essa tarefa sem maiores dificuldades. Apenas dois participantes, A10 e A12 apresentaram equívocos em suas respostas, nas quais permutaram apenas as letras minúsculas, indicativas dos lados do triângulo esférico, não realizando o processo para letras maiúsculas, referentes aos ângulos.

A tarefa seguinte explorava a fórmula $sen\, c = sen\, \hat{C} \cdot sen\, a$, determinada na terceira tarefa, além das relações trigonométricas nos triângulos retângulos CDE e CDO. Era esperado os alunos notarem que $sen\, c = sen\, \hat{C} \cdot sen\, a$ implicava em $sen\, \hat{C} = \frac{sen\, c}{sen\, a} = \frac{\frac{DE}{DO}}{\frac{CE}{CO}} = \frac{DE}{DO} \cdot \frac{CO}{CE}$ e dos triângulos CDE e CDO temos, respectivamente, que $cos\, \hat{B} = \frac{DE}{CE}$ e $cos\, b = \frac{DO}{CO}$. Assim, $cos\, b \cdot sen\, \hat{C} = \frac{DO}{CO} \cdot \frac{DE}{DO} \cdot \frac{CO}{CE} = \frac{DE}{CE} = \cos \hat{B}$.

Em suas resoluções, A1, A5, A7, A8, A9, A11 e A12 desenvolveram a dedução da fórmula de maneira análoga à essa que apresentamos. Os alunos A4 e A10 elaboraram raciocínios um pouco diferentes. Deles, A4 apresentou a resolução mostrada na Figura 5, na qual podemos observar que o aluno, partindo da expressão $sen\, c = sen\, \hat{C} \cdot sen\, a$, realizou algumas substituições e manipulações algébricas, com vistas a determinar a fórmula $\cos \hat{B} = cos\, b \cdot sen\, \hat{C}$.

Figura 5: Resolução da quarta tarefa apresentada pelo aluno A4


Aluno A4:

$cos\, \hat{B} = \frac{DE}{CE}$ $\quad cos\, b = \frac{OD}{R}$ $\quad sen\, c = \frac{DE}{OD}$ $\quad sen\, a = \frac{CE}{R}$

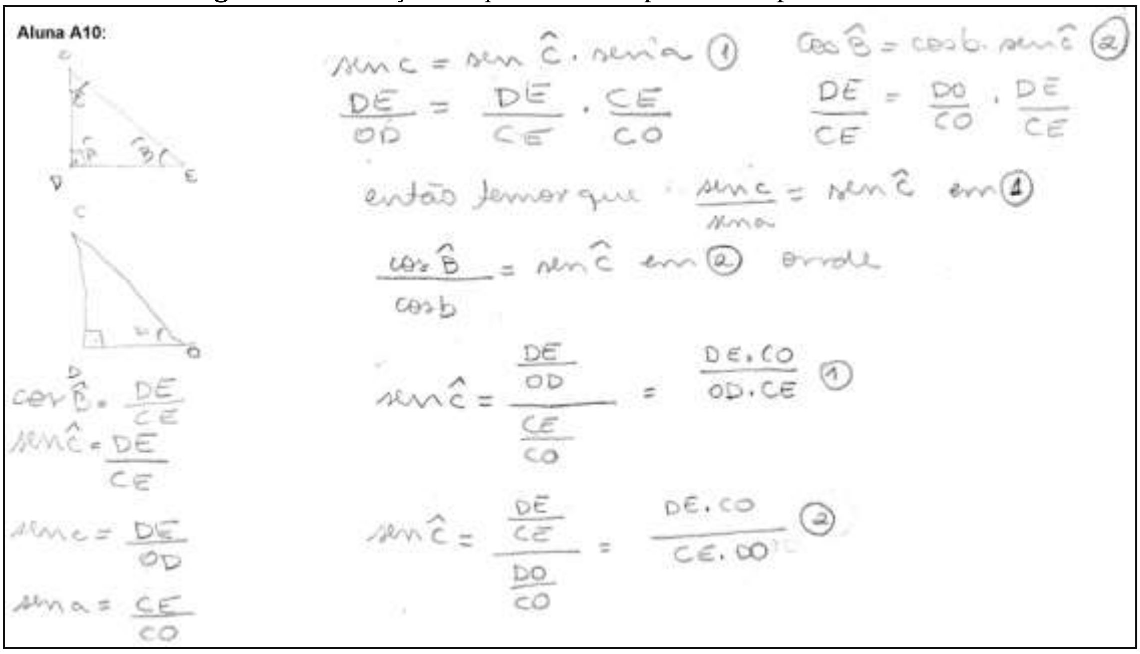
$sen\, c = sen\, \hat{C} \cdot sen\, a \Rightarrow \frac{DE}{OD} = sen\, \hat{C} \cdot \frac{CE}{R} \Rightarrow \frac{DE}{CE} = sen\, \hat{C} \cdot \frac{OD}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow cos\, \hat{B} = sen\, \hat{C} \cdot cos\, b \Rightarrow cos\, \hat{B} = cos\, b \cdot sen\, \hat{C}$

Fonte: dados da pesquisa

Já a estratégia utilizada pela aluna A10 consistiu em isolar $sen\, \hat{C}$ nas expressões $sen\, c = sen\, \hat{C} \cdot sen\, a$ e $\cos \hat{B} = cos\, b \cdot sen\, \hat{C}$ e, com base nas razões trigonométricas obtidas nos triângulos retângulos CDE e CDO, determinou a igualdade entre as expressões, como podemos verificar na Figura 6.

Figura 6: Resolução da quarta tarefa apresentada pela aluna A10



Fonte: dados da pesquisa

Pelas resoluções apresentadas por A4 e A10, constatamos que sobre uma mesma tarefa podem incidir diferentes modos de interpretação e representação. Nessa direção, Ponte afirma que “na resolução de uma tarefa é decisivo o modo como os alunos interpretam as representações indicadas nos enunciados e como criam e interpretam as suas próprias representações” (PONTE, 2014, p. 22).

Um aluno (A3) respondeu a esta tarefa de forma incorreta. Seu erro consistiu na determinação do $sen\, c$, o qual definiu como $sen\, c = \frac{CE}{CD}$, ao invés de $sen\, c = \frac{DE}{OD}$. Esse equívoco o impossibilitou de realizar a dedução da fórmula cos $\hat{B} = cos\, b \cdot sen\, \hat{C}$.

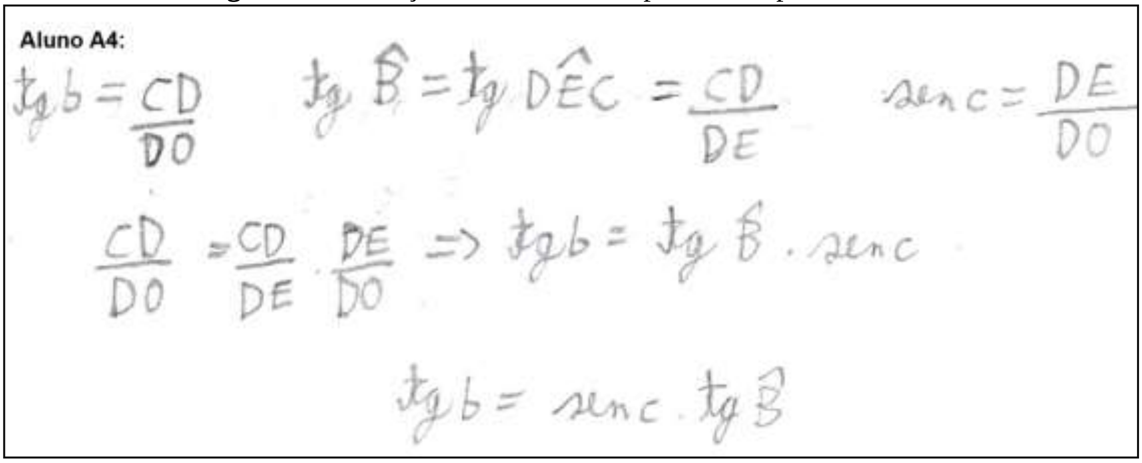
A quinta tarefa era análoga à terceira e solicitava a determinação da expressão $cos\, \hat{C} = cos\, c \cdot sen\, \hat{B}$, partindo da permutação das letras “b” e “c”, indicativas dos lados e ângulos do triângulo esférico, na fórmula $cos\, \hat{B} = cos\, b \cdot sen\, \hat{C}$. Assim, era uma tarefa simples, que apenas solicitava a determinação da expressão.

Pelos resultados apresentados, apuramos que somente a aluna A10 não realizou a permutação das letras “b” e “c” de forma certa. A aluna substituiu apenas a letra minúscula, referente ao lado, do mesmo modo que já havia realizado na terceira tarefa. Assim, observamos que, mesmo considerando que essa tarefa seria de fácil resolução, não o foi para todos os alunos. Nesse sentido, concordamos com Ponte (2003b, p. 30), ao afirmar que “é difícil saber à partida qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos”.

As tarefas seguintes requeriam a validade das fórmulas $tg\, b = sen\, c \cdot tg\, \hat{B}$ e $tg\, c = tg\, a \cdot cos\, \hat{B}$, de modo análogo ao aplicado nas duas primeiras tarefas. Para $tg\, b = sen\, c \cdot tg\, \hat{B}$, era necessário observar, nos triângulos CDO, CDE e DEO, as seguintes relações: $tg\ b = \frac{CD}{DO}\ (\Delta\, CDO)$, $tg\ \hat{B} = \frac{CD}{DE}\ (\Delta\, CDE)$ e $sen\ c = \frac{DE}{DO}\ (\Delta\, DEO)$, com as quais deduzimos que $sen\ c \cdot tg\, \hat{B} = \frac{DE}{DO} \cdot \frac{CD}{DE} = \frac{CD}{DO} = tg\ b$. Por sua vez, a expressão $tg\, c = tg\, a \cdot cos\, \hat{B}$ explorava as razões trigonométricas nos triângulos CDE, CEO e DEO, com a seguinte correspondência: $tg\ c = \frac{DE}{EO}\ (\Delta\, DEO)$, $cos\ \hat{B} = \frac{DE}{CE}\ (\Delta\, CDE)$ e $tg\ a = \frac{CE}{EO}\ (\Delta\, CEO)$, a partir das quais temos que $cos\ \hat{B} \cdot tg\ a = \frac{DE}{CE} \cdot \frac{CE}{EO} = \frac{DE}{EO} = tg\ c$.

Analisando as respostas apresentadas para ambas as tarefas, verificamos que A1, A4, A7, A8, A9 e A12 as resolveram de forma correta. Esses alunos, com exceção de A4, utilizaram o recurso de manipular algebricamente ambos os membros da expressão, de modo a determinar uma igualdade. Já A4 apresentou uma estratégia de resolução diferente, como podemos observar na Figura 7.

Figura 7: Resolução da sexta tarefa apresentada pelo aluno A4



Fonte: dados da pesquisa

Na resolução apresentada, podemos notar que A4 identificou as razões trigonométricas para $tg\ b, tg\ \hat{B}$ e $sen\ c$, e, partindo de uma delas $\left(tg\ b = \frac{CD}{DO}\right)$, utilizou o recurso de multiplicar e dividir uma expressão, simultaneamente, por um mesmo termo, escolhido de maneira conveniente. O mesmo artificio foi utilizado na resolução da sétima tarefa.

A10 e A11 apresentaram respostas incorretas em uma das tarefas. A aluna A10 respondeu corretamente a sexta tarefa, mas se equivocou na sétima, ao definir $tg\ c = \frac{DE}{DO}$ e $tg\ a = \frac{CE}{OC}$, Na verdade, essas razões correspondem, respectivamente, a $sen\ c$ e $sen\ a$. Já o aluno A11, definiu $tg\ b = \frac{DO}{DC}$ e $tg\ \hat{B} = \frac{DE}{DC}$ erroneamente, visto que equivalem a $\frac{1}{tg\ b} = cotg\ b$ e $\frac{1}{tg\ \hat{B}} = cotg\ \hat{B}$.

Os outros dois alunos, A3 e A5, responderam as duas tarefas de forma incorreta. Ambos se equivocaram nas substituições das razões trigonométricas, impossibilitando a realização da verificação da fórmula. O aluno A3 indicou que $sen\ c = \frac{DO}{DE}$, $tg\ c = \frac{OE}{DE}$ e $tg\ a = \frac{OE}{CE}$; porém as razões apresentadas correspondem a: $\frac{DE}{DO} = \frac{1}{sen\ c} = cossec\ c$, $\frac{OE}{DE} = \frac{1}{tg\ c} = cotg\ c$ e $\frac{OE}{CE} = \frac{1}{tg\ a} = cotg\ a$. A aluna A5 definiu $tg\ b = \frac{DO}{DC}$, $tg\ \hat{B} = \frac{DE}{DC}$, $tg\ c = \frac{EO}{ED}$ e $tg\ a = \frac{EO}{CO}$, as quais estão incorretas, visto que $\frac{DO}{DC} = \frac{1}{tg\ b} = cotg\ b$, $\frac{DE}{DC} = \frac{1}{tg\ \hat{B}} = cotg\ \hat{B}$, $\frac{EO}{ED} = \frac{1}{tg\ c} = cotg\ c$ e $\frac{EO}{CO} = \cos c$. Pelos erros cometidos pelos alunos, constatamos que eles não têm clareza quanto a definição da tangente de um arco.

A oitava e nona tarefas, exploravam algumas das expressões já deduzidas para a verificação das fórmulas $tg\, c = sen\, b \cdot tg\, \hat{C}$ e $tg\, b = tg\, a \cdot cos\, \hat{C}$. Para a dedução de $tg\, c = sen\, b \cdot tg\, \hat{C}$, das tarefas 3 e 5, temos, respectivamente, que: $sen\, c = sen\, \hat{C} \cdot sen\, a$ e $cos\, \hat{C} = cos\, c \cdot sen\ \hat{B} \Rightarrow \cos c = \frac{\cos \hat{C}}{sen\ \hat{B}}$. Logo, $tg\ c = \frac{sen\ c}{\cos c} = \frac{sen\ \hat{C} \cdot sen\ a}{\frac{\cos \hat{C}}{sen\ \hat{B}}} = sen\ \hat{B} \cdot sen\ a \cdot \frac{sen\ \hat{C}}{\cos \hat{C}}$. Como $tg\ \hat{C} = \frac{sen\ \hat{C}}{\cos \hat{C}}$ e $sen\ \hat{B} \cdot sen\ a = sen\ b$, obtemos $tg\ c = sen\ b \cdot tg\ \hat{C}$.

Do mesmo modo, para a verificar a expressão $tg\, b = tg\, a \cdot cos\, \hat{C}$, com base nas expressões $cos\, a = cos\, b \cdot cos\, c$ (tarefa 1), $sen\, b = sen\ \hat{B} \cdot sen\ a$ (tarefa 2) e $sen\ \hat{B} \cdot \cos c = \cos \hat{C}$ (tarefa 5). Podemos observar que: $tg\ b = \frac{sen\ b}{\cos b} = \frac{sen\ \hat{B} \cdot sen\ a}{\frac{\cos a}{\cos c}} = sen\ \hat{B} \cdot \cos c \cdot \frac{sen\ a}{\cos a} = \cos \hat{C} \cdot tg\ a$.

Observamos que A3, A4 e A9 responderam corretamente as duas tarefas. A3 e A9 substituíram as razões trigonométricas e simplificaram a expressão, com o objetivo de encontrar uma igualdade e A4 apresentou uma resolução semelhante àquela que mostramos anteriormente. Na Figura 8, ilustramos uma dessas resoluções, a partir da resposta apresentada pelo aluno A3 para a nona tarefa.

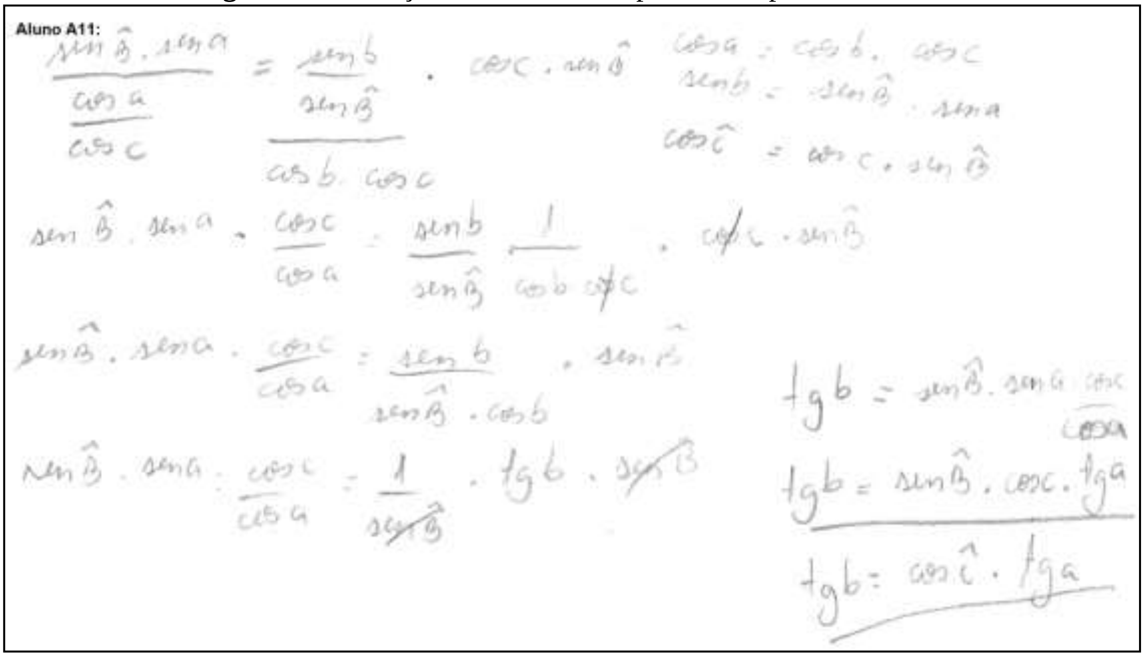
Figura 8: Resolução da nona tarefa apresentada pelo aluno A3

Fonte: dados da pesquisa

A aluna A8 respondeu corretamente a oitava tarefa, mas não respondeu a nona. Na oitava tarefa, utilizou o artificio de partir de um membro da expressão e realizar manipulações algébricas de modo a determinar o outro membro.

Já A1, A5 e A11 responderam de forma parcialmente correta a nona tarefa e não resolveram a oitava (A1) ou realizaram substituições incorretas, as quais impossibilitam a dedução da fórmula (A5 e A11). Para a nona tarefa, os três alunos realizaram as substituições de forma acertada, bem como algumas manipulações algébricas, mas se equivocaram nas conclusões. Na figura 9, apresentamos a resolução elaborada por A11, na qual observamos que o aluno, assim como A1 e A5, mostrou que o segundo membro da expressão é equivalente a $tg\ b$ (quarta linha da resolução). Contudo, A11 não percebeu que esse era o resultado a ser obtido, realizando novas operações no primeiro membro da expressão. Essa continha a sentença $sen\ \hat{B}\cdot sen\ a \cdot \frac{\cos c}{\cos a}$. Neste processo, era esperado obter como resultado $sen\ \hat{B}\cdot sen\ a \cdot \frac{\cos c}{\cos a} = \frac{sen\ \hat{B}\cdot sen\ a}{\cos c / \cos a} = \frac{sen\ b}{\cos b} = tg\ b$, porém, simplificou de maneira inconveniente, encontrando $sen\ \hat{B}\cdot sen\ a \cdot \frac{\cos c}{\cos a} = sen\ \hat{B}\cdot \cos c \cdot tg\ a$, que apesar de correta, não auxilia nas conclusões da tarefa.

Figura 9: Resolução da nona tarefa apresentada pelo aluno A11



Fonte: dados da pesquisa

O erro cometido por esses alunos nos leva a refletir sobre uma das características das tarefas que propusemos neste trabalho, ou seja, a que foi categorizada por Cyrino e Jesus como de alta demanda cognitiva. Neste tipo de tarefa,

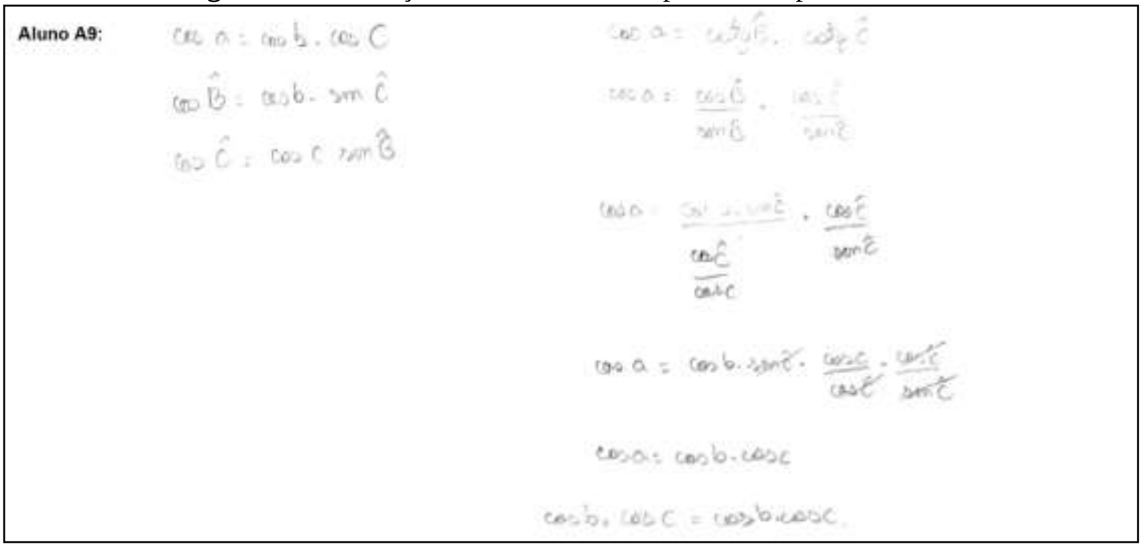
> [...] apesar de procedimentos gerais poderem ser seguidos, eles não podem ser seguidos sem compreensão. Os alunos precisam envolver-se com ideias conceituais que estão por trás dos procedimentos a serem seguidos para completarem a tarefa com sucesso e desenvolvendo a compreensão (CYRINO; JESUS, 2014, p. 755).

Por fim, A7, A10 e A12 responderam as duas tarefas de forma incorreta. Na oitava tarefa, A10 e A12 e A7 realizaram substituições incorretas, impossibilitando a dedução da fórmula $tg\, c = sen\, b \cdot tg\, \hat{C}$. Na nona, A10 deixou a tarefa em branco, A7 se equivocou nas definições de $tg\, b$ e $tg\, a$, a partir de outras fórmulas. Por sua vez, A12, na realização de suas simplificações, escreveu uma expressão equivocada, acarretando em conclusões incorretas.

A última tarefa, de forma similar, solicitava a verificação da fórmula $cos\, a = cotg\, \hat{B} \cdot cotg\, \hat{C}$ a partir das expressões $cos\, a = cos\, b \cdot cos\, c$, $cos\, \hat{B} = cos\, b \cdot sen\, \hat{C}$ e $cos\, \hat{C} = cos\, c \cdot sen\, \hat{B}$. Aqui, temos que: $cos\, \hat{B} = cos\, b \cdot sen\, \hat{C} \Rightarrow \cos b = \frac{\cos \hat{B}}{sen\, \hat{C}}$ (1) e $cos\, \hat{C} = cos\, c \cdot sen\, \hat{B} \Rightarrow \cos c = \frac{\cos \hat{C}}{sen\, \hat{B}}$ (2). Substituindo (1) e (2) na expressão $cos\, a = cos\, b \cdot cos\, c$, encontramos $cos\, a = cos\, b \cdot cos\, c = \frac{\cos \hat{B}}{sen\, \hat{C}} \cdot \frac{\cos \hat{C}}{sen\, \hat{B}} = \frac{\cos \hat{B}}{sen\, \hat{B}} \cdot \frac{\cos \hat{C}}{sen\, \hat{C}} = cotg\, \hat{B} \cdot cotg\, \hat{C}$.

Somente os participantes A4, A9 e A11 responderam a tarefa da forma esperada, sendo que as resoluções de A4 e A11 são similares a essa que acabamos de apresentar e A9 adotou a estratégia de operar os dois membros da expressão, visando obter uma igualdade, como pode ser observado na Figura 10.

Figura 10: Resolução da décima tarefa apresentada pelo aluno A9



Fonte: dados da pesquisa

A1, A5 e A7, responderam de forma parcialmente correta e os demais (A3, A8, A10, A12) deixaram a tarefa em branco. Em suas resoluções, aqueles que responderam parcialmente correto, se equivocaram ao realizar uma manipulação algébrica, pois indicaram que $\frac{\cos b \cdot \cos c}{\cos b \cdot \cos c} = \frac{\cos b \cdot \cos c \cdot tg\hat{C} \cdot \cos c \cdot \cos b \cdot tg\,\hat{B}}{\cos b \cdot \cos c} \Rightarrow 1 = \frac{tg\,\hat{C} \cdot tg\,\hat{B}}{cos\,b \cdot cos\,c}$, ao invés de $1 = tg\,\hat{C} \cdot tg\,\hat{B} \cdot cos\,b\ \cdot\ cos\,c$. Tal passo os impossibilitou de encontrar uma igualdade e concluir a tarefa de maneira acertada. Podemos observar que a simplificação esperada acarreta no resultado correto, pois $1 = tg\,\hat{C} \cdot tg\,\hat{B} \cdot cos\,b\ \cdot\ cos\,c \Rightarrow \frac{1}{tg\,\hat{C} \cdot tg\,\hat{B}} = cos\,b\ \cdot\ cos\,c \Rightarrow cotg\hat{C} \cdot cotg\,\hat{B} = cos\,a$.

Refletindo sobre os resultados apresentados pelos alunos nas três últimas tarefas, percebemos que talvez fosse necessária outra forma de organização ou maior disponibilidade de tempo para sua realização. Isso vai ao encontro do que aponta Ponte (2010, p. 25),

> [...] para terem uma experiência de aprendizagem significativa em Matemática, os alunos precisam de trabalhar por um tempo prolongado num campo de problemas – pelo menos várias aulas. Durante esta atividade, eles têm a oportunidade de compreender os aspectos não triviais dos novos conhecimentos, relacioná-los com o seu conhecimento anterior e desenvolver novas representações e estratégias.

A partir dos resultados apresentados pelos participantes e dos critérios: resposta correta (C), resposta parcialmente correta (PC), resposta incorreta (E) e resposta em branco (B), podemos sintetizar as informações em um quadro-resumo, como apresentado no Quadro 3.

Quadro 3: Síntese dos resultados da atividade exploratória em triângulos esféricos

	A1	**A3**	**A4**	**A5**	**A7**	**A8**	**A9**	**A10**	**A11**	**A12**
1ª Tarefa	C	C	C	C	E	C	C	E	C	C
2ª Tarefa	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
3ª Tarefa	C	C	C	C	C	C	C	E	C	E
4ª Tarefa	C	E	C	C	C	C	C	C	C	C
5ª Tarefa	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C
6ª Tarefa	C	E	C	E	C	C	C	C	E	C
7ª Tarefa	C	E	C	E	C	C	C	E	C	C
8ª Tarefa	B	C	C	E	E	C	C	E	E	E
9ª Tarefa	PC	C	C	PC	E	B	C	B	PC	E
10ª Tarefa	PC	B	C	PC	PC	B	C	B	C	B

Fonte: elaborado pela autora

As tarefas elaboradas para determinação e verificação das expressões referentes à trigonometria em triângulos esféricos retângulos podem ser separadas em três grupos: (I) expressões obtidas a partir de explorações de razões trigonométricas definidas em triângulos retângulos planos (tarefas 1, 2, 6 e 7); (II) expressões definidas pela permutação de elementos (tarefas 3 e 5) e (III) expressões deduzidas pela manipulação de outras já verificadas (tarefas 4, 8, 9 e 10).

Com essa separação, a partir das estratégias utilizadas no processo de resolução, buscamos investigar se o aluno conseguiu: determinar expressões da trigonometria em triângulos esféricos retângulos, a partir de razões trigonométricas definidas em triângulos retângulos planos; obter novas fórmulas com a permutação de elementos e deduzir expressões pela manipulação algébrica de outras já verificadas.

Além disso, buscamos em Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) subsídios para análise e avaliação das tarefas exploratórias. Os autores destacam que, do mesmo modo que outras atividades de sala de aula, aquelas de caráter investigativo e exploratório também precisam ser avaliadas. Nessa perspectiva, sugerem instrumentos, escalas e dimensões, que adaptamos ao nosso contexto e à nossa necessidade.

Assim, para analisar as atividades exploratórias, escolhemos critérios qualitativos (muito bom, bom, regular e insuficiente), construídos com base em objetivos relacionados ao desenvolvimento da trigonometria em triângulos esféricos retângulos, como mostramos no

Quadro 4.

Quadro 4: Critérios para avaliação de desempenho na atividade exploratória em triângulos esféricos

Desempenho	Características
Muito bom	Entende totalmente os conceitos e princípios matemáticos das tarefas; Relaciona elementos de triângulo esférico com elementos da geometria plana; Demonstra a veracidade de expressões da trigonometria esférica; Utiliza terminologia e linguagem matemática de forma excelente.
Bom	Entende quase totalmente os conceitos e princípios matemáticos das tarefas; Relaciona quase todos os elementos de triângulo esférico com elementos da geometria plana; Demonstra a veracidade de quase todas as expressões da trigonometria esférica; Utiliza terminologia e linguagem matemática adequadas.
Regular	Entende parcialmente os conceitos e princípios matemáticos das tarefas; Relaciona parcialmente os elementos de triângulo esférico com elementos da geometria plana; Não demonstra todos os resultados envolvendo dedução de expressões (fórmulas) da trigonometria esférica; Utiliza terminologia e linguagem matemática parcialmente adequadas.
Insuficiente	Demonstra pouco ou nenhum entendimento dos conceitos e princípios matemáticos das tarefas; Não relaciona o triângulo esférico com elementos da geometria plana; Termos matemáticos e notação são utilizados de forma inadequada; Não consegue realizar o processo de demonstração.

Fonte: elaborado pela autora

Nessa direção, observando os dados apresentados nos Quadros 3 e 4, averiguamos que A4 e A9 responderam todas as tarefas de forma correta. Sendo assim, esses alunos apresentaram um desempenho muito bom, ao deduzir as fórmulas, tanto a partir das razões trigonométricas em triângulos planos, quanto utilizando outras expressões já verificadas. Também, como determinar outras fórmulas pela permutação de elementos utilizando nos processos simbologia matemática adequada. Cabe ressaltar que A4 se destacou ao apresentar formas diversificadas para a confirmação das fórmulas.

Por sua vez, os alunos A1, A7, A8, A11 e A12 apresentaram um bom desempenho, visto que confirmaram a veracidade das expressões que dependiam das razões trigonométricas em triângulos retângulos planos e da simples permutação de elementos, empregando linguagem matemática, na maioria das vezes, de maneira adequada. Porém, tiveram dificuldades naquelas que resultavam da manipulação algébrica de outras fórmulas da trigonometria em triângulos esféricos retângulos.

Já A3, A5 e A10 apresentaram dificuldades na dedução, tanto das fórmulas oriundas das razões trigonométricas em triângulos retângulos planos, quanto naquelas decorrentes de outras expressões. Em diferentes momentos, esses alunos identificaram erroneamente as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente). Em relação as expressões determinadas a partir da permutação de elementos, apenas A10 demonstrou dificuldades para sua realização.

Quanto ao desempenho geral, consideramos que os de A3 e A5 foram regulares, pois esses alunos conseguiram verificar apenas algumas das fórmulas da trigonometria em triângulos esféricos retângulos. Em diferentes deduções, se equivocaram na definição das razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), impossibilitando a determinação de conclusões acertadas. Já A10 apresentou um desempenho insuficiente. A aluna determinou, em diferentes deduções, as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de forma errônea, acarretando em resultados inconclusivos, demonstrando pouco entendimento da trigonometria em triângulos retângulos.

Considerações finais

O presente trabalho teve por objetivo analisar como alunos de um curso de licenciatura em matemática, definem/verificam expressões da trigonometria em triângulos esféricos retângulos, a partir das razões trigonométricas da geometria plana. Para tanto, elaboramos tarefas exploratórias, com orientações, visando a dedução/definição das dez fórmulas da trigonometria em triângulos esféricos retângulos.

As tarefas exploratórias propostas foram divididas em três grupos, de acordo com estratégia indicativa para sua resolução. Assim, tínhamos quatro tarefas (1, 2, 6 e 7), as quais indicavam a dedução das fórmulas a partir da exploração de razões trigonométricas em triângulos retângulos planos; duas tarefas (3 e 5), que definiam novas expressões com base na permutação de elementos; e quatro tarefas (4, 8, 9 e 10) que dependiam da manipulação algébrica de outras expressões já verificadas.

Neste cenário, ao analisar os dados coletados, constamos que a maioria dos alunos não teve dificuldades na resolução daquelas que envolviam a exploração de razões trigonométricas em triângulos retângulos planos e da permutação de elementos. Aqueles que apresentaram dificuldades, foi por se equivocarem em relação à definição da própria razão trigonométrica, em especial, a tangente de um ângulo.

Em relação às tarefas que necessitavam da manipulação algébrica de outras expressões para a verificação da fórmula, a maioria dos alunos apresentou dificuldades, não conseguindo articular as informações das expressões já verificadas com o resultado que queriam demonstrar. Alguns alunos até realizaram substituições corretas e algumas operações, mas acabaram se perdendo no processo de dedução. Acreditamos que isso se deva por não terem clareza de onde precisavam chegar para garantir que comprovaram um determinado resultado.

Cabe destacar que foi importante a ação realizada anteriormente à aplicação das tarefas exploratórias que apresentamos nesse trabalho. Nessa ação, construímos, com o auxílio do software GeoGebra, um triângulo esférico retângulo e seu respectivo triedro, bem como triângulos retângulos planos sobre as faces do triedro. A exploração dessa construção, possibilitou aos participantes identificarem a correspondência entre os elementos do triângulo esférico retângulo e os ângulos dos triângulos retângulos planos, para os quais já conheciam as razões trigonométricas.

Como atividade posterior a essa que apresentamos no presente trabalho, realizamos aplicações da trigonometria em triângulos esféricos, na justificativa de resultados da própria trigonometria esférica, como a lei dos quadrantes, na resolução de triângulos esféricos retângulos e na determinação de longas distâncias sobre o globo terrestre. Não foi possível trazer esses dados aqui, em virtude da limitação de espaço do artigo.

Nossa intenção mais ampla, com o trabalho ora apresentado, é mostrar possibilidades para o desenvolvimento de outros modelos geométricos dentro de um curso de formação inicial de professores de matemática. Assim, esperamos que ele possa vir a incentivar estudos futuros no campo das geometrias não-euclidianas, em especial da geometria esférica.

Agradecimentos: O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

CANAVARRO, A. P.; SANTOS, L. Explorar tarefas matemáticas. *In:* CANAVARRO, A. P. *et al.* (eds.). **Investigação em Educação Matemática** - Práticas de ensino em Matemática. Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática. Castelo de Vide (Portugal), p. 99-104, 2012.

CYRINO, M. C. C.; JESUS, C. C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professores que ensinam matemática. **Ciência & Educação.** Bauru, v. 20, n. 3, p. 751-764, 2014

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

COUTINHO, L. **Trigonometria esférica**: a matemática de um espaço curvo. Rio de Janeiro:

Interciência, 2015.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Tradução: Magda Lopes. Consultoria, supervisão e revisão técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Artmed, 2010.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OS MATHEMATICS. **Princípios e normas para a matemática escolar**. 2. ed. Trad. Magda Melo. Edição portuguesa. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2008.

PEREIRA, A. C. C. **A obra "De triangulis omnimodis libri quinque" de Johann Müller Regiomontanus (1436-1476)**: uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria. 2010. 342 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. *In:* ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA (APM). 2003. **Actas** [...]. Lisboa: APM, p. 25-39, 2003.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In*: GTI (org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34,

PONTE, J. P. Explorar e investigar em matemática: uma atividade fundamental no ensino e aprendizagem. **Unión**: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Rio Claro, n. 21, p. 13- 30, 2010.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. *In:* PONTE, J. P. (ed.). **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-27.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. rev. ampl., 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

PONTE, J. P. *et al*. Exercícios, problemas e explorações: perspectivas de professoras num estudo de aula. **Quadrante**, Vol. XXIV, n. 2, p. 111-134, 2015.

SWAN, M. Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão conceptual, a competência estratégica e a consciência crítica. **Educação e Matemática**. Lisboa, n. 145, p. 67-72, 2017.

Recebido em: 26 de junho de 2020
Aprovado em: 25 de setembro de 2020