revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

EULER NÃO SABIA NADA DE MATEMÁTICA?

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.145-171

Valéria Ostete Jannis Luchetta[1]
João Ricardo Viola dos Santos[2]

Resumo: *A Matemática do Matemático é o fundamento da Matemática do Professor de Matemática. O que sustenta a Matemática da sala de aula da Educação Básica é a Matemática do Matemático*. Pois bem, neste artigo produzimos uma discussão a respeito dessa suposta condição de necessidade, muitas vezes de suficiência, que opera como uma ideia naturalizada nas discussões de formação de professores de matemática. Para isso, realizamos uma leitura plausível de alguns escritos de Euler e de modos como Educadores Matemáticos e Matemáticos falam a respeito da formação matemática dele. Tomando como referência o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) produzimos (sendo produzidos) outras possibilidades para Licenciaturas em Matemática. Nossas principais considerações são na direção de movimentarmo-nos com essa discussão que coloca em xeque conhecimentos matemáticos de Euler, e procura desdobrar efeitos que dela decorre, em construções de projetos políticos de formações matemáticas em Licenciaturas em matemática: sempre em processos, movimentos.
Palavras-Chave: Formação de Professores de Matemática. Formação Matemática. Modelo dos Campos Semânticos.

EULER DIDN'T KNOW ANYTHING ABOUT MATHEMATICS?

Abstract: *The Mathematics of Mathematician is the foundation of Mathematics of Mathematics Teacher. What supports the Mathematics of the Basic Education classroom is the Mathematics of Mathematician*. Well, in this paper we produced a discussion about this supposed condition of necessity, often of sufficiency, which operates as a naturalized idea in discussions on Mathematics Teacher Education. For this, we carry out a non-defect reading of some of Euler's writings and the answers of Mathematics Educators and Mathematicians talk about his mathematical idea. Our framework is the Model of the Semantic Fields (MCS) in which we produced (being produced) other possibilities for initial courses of prospective mathematics. We point out some considerations in the direction of moving with this question that puts Euler 's mathematical knowledge in check, and seeks to unfold its effects in the construction of political projects of mathematical preparation in undergraduate courses of prospective mathematics teachers.
Key-Words: Mathematics Teacher Education. Mathematical Preparation. Model of Semantic Fields.

Introdução

Em um instigante resumo publicado em 2008, na ocasião do centenário da *International Comission of Mathematics Instruction* (ICMI), Romulo Lins ofereceu um *insight* para pensar outros horizontes culturais, políticos e filosóficos para uma formação matemática de professores de matemática: *Where would Leonhard Euler stand today as a school teacher?*

[1] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estatual Paulista (Unesp). Professora do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), São Paulo, Brasil. E-mail: valeria@ifsp.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8658-0795.
[2] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estatual Paulista (Unesp). Professor da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Mato Grosso do Sul, Brasil. E-mail: joao.santos@ufms.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4560-4791.

> […] I was led to consider both the status of Leonhard Euler as a mathematician in his lifetime and his mathematical knowledge as seen from the point of view of present-day mathematics. Although an accomplished mathematician, excellent problem-solver and superbly fluent in applications, it seems that if he were he required to take the tests we give our undergraduates students on Calculus, Analysis, Linear Algebra and Algebra (just to mention a few basic courses), there would be a substantial chance that he would fail them. The reason is quite obvious: he knew nothing of arithmetised (epsilon-delta) Calculus and Analysis, he knew nothing of vector spaces, linear independence, bases and dimension, he knew nothing of groups, rings, fields, his notion of 'function' was that of an analytical expression and he knew nothing of sets. The reason is also obvious: those things did not even exist at his time. But even failing those tests Euler would probably make a quite good mathematics school teacher. What can we learn from this?[3] (LINS, 2008, p. 1-2).

Há uma naturalização na formação inicial de professores de matemática de que disciplinas como Cálculo Diferencial Integral, Estruturas Algébricas, Álgebra Linear, Análise Real, para citar algumas, são essenciais, suficientes e, sem sombra de dúvidas, impossíveis de serem retiradas de uma formação matemática dos licenciandos. É comum nas discussões de formação de professores ideias tais como: *formação sólida em matemática, formação básica, formação nos fundamentos da matemática*, serem tomadas como verdades e nunca serem colocadas em xeque. Entretanto, ao olharmos para a prática profissional de professores da Educação Básica, outras ideias são movimentadas: *eu aprendo mesmo é na prática*; *não me serviu de nada a formação matemática que tive em disciplinas de Análise Real, por exemplo; uma coisa é a matemática acadêmica, outra coisa é a matemática escolar.* Nesse contraste, notamos um abismo entre essas ideias, um descompasso entre o que é "ensinado" na licenciatura, em termos de formação matemática, o que é "movimentado" na escola, em termos de prática profissional.

Na literatura em Educação Matemática, em específico na área de formação de professores (ou em conhecimentos específicos de professores de matemática) há diversas pesquisas que produzem certas singularidades e particularidades para conhecimentos

[3] Fui levado a considerar o *status* de Leonhard Euler como um matemático em vida e seu conhecimento matemático visto do ponto de vista da matemática atual. Embora um matemático talentoso, excelente solucionador de problemas e esplendidamente fluente em aplicações, parece que se ele fosse requisitado a fazer os testes que damos aos nossos estudantes de graduação nas disciplinas de Cálculo, Análise, Álgebra Linear e Álgebra (apenas para mencionar algumas dos cursos básicos), haveria uma chance substancial de ele falhar neles. A razão é bastante óbvia: ele não sabia nada da aritmetização (épsilon-delta) do Cálculo e da Análise, ele não sabia nada de espaços vetoriais, independência linear, bases e dimensões, ele não sabia nada de grupos, anéis, corpos, sua noção de 'função' era o de uma expressão analítica e ele não sabia nada de conjuntos. A razão também é óbvia: essas coisas nem existiam na sua época. Mas mesmo reprovando nesses testes, Euler provavelmente daria um bom professor de matemática do Ensino Básico. O que podemos aprender com isso? (LINS, 2008, p. 1-2, tradução nossa).

profissionais de professores de matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; MOREIRA, 2004; MOREIRA; DAVID, 2003, 2005; LINS, 2006; WATSON, 2008; VIOLA DOS SANTOS, 2014, 2016A, 2016B; ELIAS, 2018; ELIAS; SACHS, 2018). Nessa temática de pesquisa, há tentativas de construir ideias e conceitos do que seria a matemática do professor de matemática, em termos de suas especificidades e demandas. Essas pesquisas são importantes do ponto de vista político, pois explicitam a necessidade de considerar o professor como um profissional que tem seu campo de conhecimentos e não como alguém que sabe matemática e desenvolve algumas estratégias metodológicas para ensiná-la. Matemáticas de professores de matemática (no plural para destacar a variedade de abordagens) se constitui como algo específico da profissão de professores de matemática.

Nossas discussões, neste artigo, são produzidas em outra direção, em uma tentativa de produzir problemas, reverberar alguns efeitos com uma pergunta: O que sustenta essas duas afirmações, tais como: *A Matemática do Matemático é o fundamento da Matemática do Professor de Matemática? O que sustenta a Matemática da sala de aula da Educação Básica é a Matemática do Matemático?* Não se trata de permanecer na direção de quais disciplinas devem fazer parte da formação inicial de professores de matemática, nem mesmo de pensar de maneira metodológica uma organização curricular interessante para o futuro professor de matemática. O que está em jogo em nossa discussão é colocar em xeque essa ideia de que a matemática e a formação matemática se instituem de maneira naturalizada nas discussões a respeito da formação matemática de professores de matemática.

Euler sabia alguma coisa de matemática?

Em nossa empreitada, produzimos uma discussão a respeito dessa suposta condição de necessidade, muitas vezes de suficiência, das disciplinas de formação matemática, que opera como um discurso naturalizado nos terrenos de formação de professores de matemática. Para isso, realizamos uma leitura plausível de alguns escritos de Euler e dos modos como Educadores Matemáticos e Matemáticos falam a respeito da formação matemática dele. Tomando como referência o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), produzimos (sendo produzidos) outras possibilidades para Licenciaturas em Matemática.

Trata-se de uma problematização dos modos como Euler produzia sua matemática, por um lado, e como educadores matemáticos e matemáticos, se afetam como uma provocação em relação à formação matemática de Euler. Viola dos Santos (2012, p. 37-38) faz a seguinte pergunta para Educadores Matemáticos e Matemáticos:

> *Eu vou apresentar um exemplo de um cara que, seguramente, não sabia*

> *nada de estruturas algébricas, de análise com épsilons e deltas, não sabia nada de conjuntos. Quando digo nada, quero dizer que ele seria reprovado em qualquer primeira prova de teoria dos conjuntos, quaisquer primeiras provas de estruturas, qualquer primeira prova de cálculo. Entretanto, ele era um excelente resolvedor de problemas, excelente formulador de problemas, hábil e fluente em aplicações da Matemática a várias áreas e com domínio certo da Matemática. Eu falo do Euler. O que você acha disso? Como você justifica essa formação sólida e essas disciplinas de conteúdo matemático nas licenciaturas, tomando esse exemplo emblemático?*

Em suma, nossas considerações são na direção da pergunta colocada por Lins (2008): *What can we learn from this?*

Assim, apresentamos nossos pressupostos teórico-metodológicos, o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), uma leitura/produção com algumas obras de Euler, junto com os modos como Educadores Matemáticos e Matemáticos se posicionaram com um questionamento a respeito de uma suposta falta na formação matemática de Euler. Em nossas produções, essas discussões são movimentadas na construção de um argumento em relação à formação matemática de professores de matemática.

Modelo dos Campos Semânticos

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS) é uma possibilidade (um quadro de referência) teórico-epistemológica que nos permite ler e analisar modos de produção de significados. A noção central, à qual desdobram todas as outras, é a de conhecimento: "Um conhecimento consiste em uma *crença-afirmação* (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma *justificação* (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz)" (LINS, 2012, p. 12).

Para que um conhecimento seja produzido, de fato, é necessário que o sujeito (da enunciação, epistêmico) justifique suas *crenças-afirmações*; não basta apenas acreditar naquilo que está afirmando. Com essa caracterização, conhecimento é da ordem do sujeito que faz uma enunciação e não da ordem do enunciado: não há conhecimentos em livros. Do ponto de vista do MCS, conhecimentos com justificações diferentes são conhecimentos diferentes, mesmo que tenham uma mesma crença-afirmação. Como observa Lins (1994), "apenas quando este texto, a Matemática, é enunciado, que há produção de conhecimento" (LINS, 1994, p. 43).

Esta caracterização de conhecimento é importante e central em nossas discussões, pois explicitaremos dois conhecimentos distintos, dois processos de produções de significados. Analisaremos *crenças-afirmações* e *justificações* que Euler nos apresenta em seus textos, ou seja, produziremos uma leitura a partir de alguns de seus trabalhos em um processo no qual, ao lermos, produziremos nossos conhecimentos, nossas "[...] justificações no processo de enunciação de *crenças-afirmações*." (SILVA, 2003, p. 20). Outros conhecimentos são aqueles que são produzidos em nossa contemporaneidade, majoritariamente no século XX com a axiomatização da matemática, e que, muitas vezes, são movimentados nas Licenciaturas em Matemática, ora tomados como matemática acadêmica (Moreira, 2004), ou Matemática do Matemático (LINS, 2006), ou mesmo *Disciplinary Mathematics* (WATSON, 2008).

Outra noção do MCS é a de significado, caracterizada como aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto, no interior de uma atividade (LINS, 1999). Mas isto não quer dizer que significado é qualquer coisa que dizemos, já que é sempre local. Segundo Lins e Gimenez "/.../ não é tudo que pode ser dito [pelo sujeito], já que qualquer dada cultura aceita alguns, mas nunca todos os modos possíveis de produzir significados" (1997, p. 143). Objeto é aquilo para que se produz significado (LINS, 2012, p. 28). Em um processo, um sujeito produz significados e constitui objetos. Segundo Lins, "[...] a constituição de objetos se dá sempre no processo de produção de significado, no processo de produção de conhecimento" (LINS, 1994a, p. 38). Ainda segundo Lins,

> Um objeto é, no MCS, qualquer coisa sobre a qual uma pessoa está falando, seja ela "concreta" - por exemplo, uma cadeira em frente a mim - ou "simbólica" - por exemplo, letras em um pedaço de papel (LINS, 2004c, p. 4, tradução nossa).
>
> [...] para o MCS não existe o significado de um "objeto" sem referência ao contexto em que se fala de um objeto (que se pensa com ele, que se pensa sobre ele). Talvez seja útil dizer que significado é sempre local (LINS, 2012, p. 28).

Outra noção que se desdobra em nossas discussões é a de interlocutor, caracterizada como uma direção na qual um sujeito produz significados e constitui objetos. Segundo Lins,

> O interlocutor é uma direção na qual se fala. Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação que me autoriza a dizer o que estou dizendo (LINS, 2012, p. 19).

Segundo Lins (2012, p. 19), nossos interlocutores marcam um horizonte cultural, ou seja, os limites do que pode ser dito, pois eles são as marcas da legitimidade.

> Para o MCS, "verdadeiro" não é um atributo daquilo que se afirma (quando há produção de conhecimento), mas sim um atributo do conhecimento produzido. Já legitimidade aplica-se (ou não) a modos de produção de significado (LINS, 2012, p. 21).

De acordo com Lins (2012), “[...] como consequência de ser enunciado na direção de um interlocutor, e de ter mesmo sido produzido, todo conhecimento é verdadeiro. Isto não quer dizer que aquilo que é afirmado seja ‘verdade’” (LINS, 2012, p. 21).

Até agora temos algumas noções do MCS que oferecem uma possibilidade para ler/produzir processos de produção de significados. Em muitos trabalhos, que tomam como referência o MCS, essas noções (conhecimento, significado, objeto, interlocutor) já oferecem possibilidades interessantes. Entretanto, nossa leitura/produção a partir de textos de Euler e com posicionamentos de Educadores Matemáticos e Matemáticos, é produzida de modo detalhado. Assim, se faz necessário apresentar a noção de estipulações locais, caracterizada no MCS como afirmações que em uma atividade não precisam ser justificadas. Esta noção foi caracterizada a partir dos trabalhos do filósofo Nelson Goodman. Logo, um conjunto de estipulações locais caracteriza um núcleo e nas palavras de Lins, “O núcleo de um campo semântico é constituído por estipulações locais, que são, localmente, verdades absolutas, que não requerem, localmente, justificação” (LINS, 2012, p. 26). Em um processo de leitura/produção *fina, em detalhes*, de modos como Euler operava e construía suas ideias matemáticas, tomar a noção de estipulações locais se faz necessária.

Lins (2012) afirma que “é no interior de campos semânticos que se produz conhecimento e significado, que objetos são constituídos” (LINS, 2012, p. 18). Daí, temos a noção de campo semântico, como “[...] Um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade” (LINS, 2012, p. 17). É possível, muitas vezes desejável, ler um processo de produção de significados se atentando às estipulações locais que são operadas em certos núcleos. Por vezes, mesmo pessoas, aparentemente, falando uma suposta “mesma coisa”, elas podem estar produzindo justificações diferentes, como produzimos em nossas discussões com Euler.

Por fim, realizamos nossas leituras/produções tomando a noção de leitura plausível que se caracteriza como uma tentativa de ler o outro pelo que faz e fala e não pela falta. Trata-se de uma tentativa de tentar ler/produzir com os modos deste outro operar, em atenção aos modos como usa certas palavras, define certas ideias e se movimenta, sobrevivendo cognitivamente em um determinado tempo e espaço cultural, político, filosófico. Segundo Lins (1999, p. 93), “Toda tentativa de se entender um autor deve passar pelo esforço de olhar o mundo com os olhos do autor, de usar os termos que ele usa de uma forma que torne o todo de seu texto plausível”.

Um alinhavo sobre a produção matemática de Euler

No prefácio da obra *Euler: The Master of Us All*, de William Dunham, encontramos os seguintes dizeres: “Nenhum estudante de literatura ficaria satisfeito com uma mera sinopse de Hamlet. Da mesma forma, nenhum matemático deveria seguir por sua carreira sem encontrar Euler face a face” (DUNHAM, 1999, p. xvi, tradução nossa). Salientamos que esse “face a face não se refere aos inúmeros resultados e teoremas atribuídos a Euler, mas sim a ficarmos diante de suas obras originais” (LUCHETTA, 2017, p. 14), e observarmos em seus escritos como sua mente criativa trabalhava, como sua matemática era produzida.

Acompanhar de perto os escritos de Euler é de fato uma lição à docência, pois ele é didático, “conversa” com seus leitores e vai mostrando seu raciocínio até chegar a um resultado. Em termos de nosso referencial teórico, o MCS, Euler nos apresenta explicitamente seus modos de produção de significados na constituição de objetos matemáticos em uma direção. Neste artigo, apresentaremos algumas passagens de suas obras que sustenta nossa afirmação. Porém, para isso, apresentamos, brevemente, alinhavos da vida e obra de Leonhard Euler.

Figura 1: Retrato de Leonhard Euler por Handman (1753).

Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/Jakob_Emanuel_Handmann.

Leonhard Euler nasceu no dia 15 de abril de 1707 na Basileia, Suíça. Filho de Paulus Euler, um ministro calvinista e de Margaretha Brucker. Antes de frequentar a escola, Euler foi instruído por seu pai e teve um matemático amador, Johann Burckhardt, como professor particular. Aos 13 anos, Euler ingressou na Universidade da Basileia, no departamento de Artes, para receber uma educação geral. De acordo com seus escritos biográficos, ele estava insatisfeito com seus estudos, e procurou o famoso professor Johann Bernoulli (1667 – 1748), que era professor da cadeira de matemática nesta Universidade, para instruí-lo. Aos 16 anos, Euler recebeu o grau de mestre em filosofia com uma dissertação, escrita em latim, comparando as ideias filosóficas de René Descartes (1596 - 1650) e Isaac Newton (1643 - 1727).

Paulus Euler almejava que seu filho seguisse-o no ofício do ministério estudando teologia, mas Euler dedicava-se a maior parte de seu tempo à matemática. Johann Bernoulli, percebendo a genialidade do jovem Euler, convenceu Paulus a permitir que Euler mudasse seus estudos para matemática. Euler tornou-se o discípulo preferido de Johann Bernoulli, e ficou muito amigo de seus filhos Nicolaus II (1695 - 1726), Daniel (1700 - 1782) e Johann II (1710 – 1790).

Em 1727, Euler chega a São Petersburgo para assumir a vacância na seção de medicina e fisiologia na recém-criada Academia de Ciências de São Petersburgo. A pedido de Daniel Bernoulli e Jakob Hermann (1678 - 1733), Euler foi logo transferido para a seção de matemática e física da Academia. A partir deste momento, segundo Hoare (2007, p. 408), cercado por um grupo de cientistas eminentes, tais como Jakob Hermann, Daniel Bernoulli, Christian Goldbach (1690 - 1764), F. Maier e Joseph Nicolas Delisle (1688 - 1768), sua genialidade desabrochou. Casou-se com Katharina Gsell (1707 - 1773), em 1734, filha de um artista suíço, com quem teve treze filhos, mas apenas cinco chegaram à idade adulta. Segundo D'Ambrosio (2009, p. 20), Euler sofria de uma doença cutânea, desde sua infância, "uma forma de tuberculose que afeta os gânglios linfáticos do pescoço". Em 1738, em decorrência desta doença, perde a visão direita e ficou com a esquerda muito prejudicada.

Em 1741, mudou-se para Prússia para fazer parte da Academia de Ciências de Berlim a convite de Frederico, o Grande (1712 - 1786), tornando-se diretor do curso de matemática da Academia Prussiana, passando vinte e cinco anos trabalhando na Academia de Ciências de Berlim, apresentando um grande número de artigos à Academia de São Petersburgo, bem como à Academia da Prússia. Devido a sua excelência acadêmica e sua reputação que se estendia a toda a Europa, foi também membro da *Académie Royale des Sciences de Paris*, da *Royal Society of London* e da *Società Scientifica Privata Torinese*, entre outras.

Euler regressa à São Petersburgo em 1766 com grandes privilégios a convite de Catarina II, a Grande (1729 - 1796), como membro da Academia de Ciências Russa, posição que ocupou até sua morte em 18 de setembro de 1783. Euler fica quase totalmente cego em 1771, mas sua produtividade continuou intensa, sua memória impecável permitia a ele ditar seus textos para seus assistentes.

Leonhard Euler teve uma longa carreira como matemático e cientista, sendo considerado o matemático mais produtivo da história. Segundo o historiador da ciência, Clifford Truesdell, vinte e cinco por cento de todo o trabalho matemático e científico publicado durante todo o século XVIII foi escrito por Euler. Escreveu livros de referência sobre assuntos de análise matemática, geometria analítica e diferencial, cálculo de variações, mecânica e álgebra. Publicou mais de 760 trabalhos de pesquisa, muitos dos quais ganharam prêmios em competições em revistas das academias científicas de grande prestígio em toda a Europa. Segundo Kleinert e Mattmüller (2007, p. 25), mesmo não tendo obrigações regulares de ensino, ele escreveu influentes livros didáticos contemplando uma grande variedade de assuntos como o cálculo diferencial e integral, a mecânica, a balística, a acústica, a astronomia, a teoria musical, a construção de navios, assim como um tratado sobre as Ciências Naturais na obra Cartas a uma princesa da Alemanha. Após sua morte, seus pupilos embarcaram no longo projeto de publicar suas centenas de obras inéditas.[4] Euler, era fluente

> [...] matematicamente, bom resolvedor de problemas e bom aplicador da Matemática. Ele não tinha os "verdadeiros fundamentos", mas tinha lucidez e tinha um domínio adequado para dizer o mínimo – da Matemática Elementar (segundo nossos parâmetros) (LINS, p. 120, 2005).

Quando Lins fala a respeito dos "verdadeiros fundamentos", ele se refere a matemática que foi estabelecida no século XX pelo grupo de matemáticos, majoritariamente franceses, denominado Nicolas Bourbaki, que a partir de 1935, escreveram uma série de livros com o objetivo de fundamentar toda a matemática em bases axiomáticas.

> - *Djairo Figueiredo: Eu acho que o Euler foi um caso excepcional. Se você acompanha sua história, ele teve possibilidades de estudar no começo com Bernoulli; depois, bem jovem, ele foi para São Petersburgo, estimulado por Daniel Bernoulli. Assim, ele tinha contato com competentes matemáticos da época. É claro que a matemática, na época de Euler, não tinha se desenvolvido tanto assim. Ele foi uma das pessoas que mais desenvolveram e criaram matemática. Tem uma história interessante que o fulano diz que aqui tem as poligonais de Euler, não sei o quê de Euler, tem outra coisa que é do Euler, isso, aquilo, do Euler. Daí você chega uma hora e fala: Vamos parar com isso porque senão vai chegar uma hora que você vai ter que trocar o nome de Matemática para 'Eulermática', por conta da quantidade de coisas que ele produziu [risos]. Ele é excepcional. Claro que a matemática que ele sabia, ele utilizou para resolver diversos problemas. E não sendo suficiente ele criou nova matemática. Caso excepcional! (Djairo Figueiredo, In: VIOLA DOS SANTOS, p. 53, 2012).*

Leituras e Produções com Euler

Nossas leituras e produções com Euler serão constituídas em três etapas. Gostaríamos de ressaltar que o desenvolvimento da matemática teve como fator decisivo no século XVIII a teoria de séries infinitas, tema este que Euler trabalhou durante toda a sua vida. Ele produziu 82 trabalhos que tratam de séries. Nosso interesse é apresentar uma diversidade dos modos de

[4] Para maiores detalhes das obras de Euler consulte o site: http://eulerarchive.maa.org/

produção de significados e conhecimentos para objeto(s) matemático(s) denominados(s) Séries (destaque para o plural na direção de que são conhecimentos diferentes) e a partir daí, produzir um argumento em relação à formação matemática.

Começamos nosso processo a partir de fragmentos do Capítulo V, da Seção II da Parte I, do livro *Elements of Algebra*, intitulado *Das Resoluções das Frações em Séries Infinitas*. Euler começa este capítulo, recordando:

> - *Euler: §289. Quando o dividendo não é divisível pelo divisor, o quociente é expresso, como já tínhamos observado, por uma fração. Assim, se tivermos que dividir 1 por* $1-a$ *, obtemos a fração* $\frac{1}{1-a}$*. Isso, porém, não nos impede de tentar a divisão de acordo com as regras que foram dadas, nem de continuarmos tão longe quanto desejarmos; e não vamos falhar deste modo para encontrar o verdadeiro quociente, embora sob diferentes formas (*EULER, 1840, p. 89, tradução nossa).

"Neste parágrafo Euler nos apresenta qual será o seu modo de produzir significado para o quociente $\frac{1}{1-a}$, ou seja, ele utilizará o algoritmo usual da divisão continuamente para encontrar o quociente" (LUCHETTA, 2107, p. 84). Euler constitui um núcleo em relação ao que denominamos algoritmo usual da divisão. Chamaremos essa atividade de produzir significado em relação a esse núcleo de **Campo Semântico da Divisão**.

Nos artigos seguintes, 290 e 291, Euler efetua a divisão de 1 por $1-a$, detalhando cada passagem e sintetiza os seus resultados. De modo geral,

Figura 2: Representações da divisão.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1-a \\ \underline{1-a} & 1 \\ +a & \end{array};\quad \begin{array}{r|l} 1 & 1-a \\ \underline{1-a} & 1+a \\ +a & \\ \underline{+a-a^2} & \\ +a^2 & \end{array};\quad \begin{array}{r|l} 1 & 1-a \\ \underline{1-a} & 1+a+a^2 \\ +a & \\ \underline{+a-a^2} & \\ +a^2 & \\ \underline{+a^2-a^3} & \\ +a^3 & \end{array};\quad \text{etc.}$$

Fonte: Luchetta (2017, p. 85).

Assim, conclui que a fração $\frac{1}{1-a}$ pode ser expressa de todas as seguintes formas:

Figura 3: Representações da fração.

$$\begin{array}{llll} I. & 1+\dfrac{a}{1-a}; & II. & 1+a+\dfrac{a^2}{1-a}; \\ III. & 1+a+a^2+\dfrac{a^3}{1-a}; & IV. & 1+a+a^2+a^3+\dfrac{a^4}{1-a}; \\ V. & 1+a+a^2+a^3+a^4+\dfrac{a^5}{1-a}; & etc. & \end{array}$$

Fonte: Luchetta (2017, p. 85).

Neste mesmo artigo, Euler mostra por meio de cálculos que todas essas expressões são iguais em valores a fração $\frac{1}{1-a}$. No artigo 292, Euler continua com sua explicação:

> - *Euler: §292. Sendo este o caso, podemos continuar a série, tanto quanto desejarmos, sem ser necessário realizarmos mais nenhum cálculo. E, assim, teremos* $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$*; ou podemos continuar esta, mais longe, e ainda continuar sem fim. Razão pela qual podemos dizer que a fração proposta foi resolvida em série infinita, que é,* $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12}$ *etc até o infinito; e <u>existem motivos suficientes</u> para afirmar que o valor desta série infinita é o mesmo que da fração* (EULER, 1840, p. 91, tradução nossa, grifo nosso).

Observe que Euler, aplicou o algoritmo usual da divisão para encontrar o quociente da divisão de 1 por $1 - a$, e depois de alguns passos, concluiu que $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$.

Segundo Luchetta (2017, p. 86) "nos séculos XVII e XVIII, era comum a utilização do princípio da extensão infinita, isto é, a passagem dos algoritmos finitos para os infinitos." Na história do desenvolvimento das séries, Nicholas Mercator (1620 - 1687) utilizava o *método da divisão longa* para encontrar séries infinitas, logo era legítimo para Euler aplicar o algoritmo da divisão continuamente *ad infinitum* para obter uma série infinita. Assim, Euler obtém a série infinita $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} + \cdots$

Em nossa leitura, Euler produz significado para esta série infinita a partir da divisão elementar, em outras palavras, ele estava nos mostrando **o que é uma série infinita**, ou seja, **a série surge a partir da divisão continuada *ad infinitum***. Euler produz significados, constitui objetos em relação ao **Campo Semântico da Divisão.** Destacamos que uma de suas estipulações locais era: é legítimo passar de algoritmos finitos para infinitos (princípio da extensão).

Segundo Simmons (1988), uma série infinita, ou simplesmente uma série, é uma expressão da forma $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, onde às últimas reticências indicam que os termos continuam indefinidamente. O número a_n chama-se n-ésimo termo da série. É usual escrevermos a série na forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Note que a operação de adição realizada uma infinidade de vezes não pode ser interpretada literalmente, e seu significado deve ser abordado de maneira sutil.

Ainda segundo Simmons (1988), entre os significados produzidos "naturalmente" para séries infinitas na matemática de hoje, temos a **divisão elementar:**

Figura 4: Método da chave

$$
\begin{array}{llll}
1 & & & \mid\underline{1-x} \\
\underline{1-x} & & & 1+x+x^2+\ldots \\
\quad +x & & & \\
\quad \underline{+x-x^2} & & & \\
\qquad\quad +x^2 & & & \\
\qquad\quad \underline{+x^2-x^3} & & & \\
\qquad\qquad\quad +x^3 & & & \text{etc.}
\end{array}
$$

Fonte: Luchetta (2017, p. 81).

mostrando que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$. Queremos saber como a função do primeiro membro da igualdade acima está relacionada com a série infinita que parece formar-se no segundo membro. Isto é, seria verdade que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$? Portanto, Simmons apresentará as definições, teoremas e proposições sobre a Teoria de Séries para responder esta indagação.

Vamos voltar ao modo de produção de significado de Euler, para realizarmos uma leitura de seus conhecimentos e significados matemáticos. Apoiamo-nos em um artigo científico que trata de séries divergentes, *De seriebus divergentibus*, publicado em 1760, e o Capítulo III do livro *Foundations of Differential Calculus*, publicado em 1755, que trabalha com algumas das séries apresentadas no livro *Elements of Algebra*.

No artigo *De seriebus divergentibus*, Euler constitui o objeto "séries", assim para ele, as "*séries infinitas surgem a partir da expansão da expressão finita*" e "*ambas devem ter o mesmo valor*". E nos afirma, que toda série têm uma expressão finita que lhe originou. Assim, produzimos significado para a soma de uma série dizendo que somar uma série infinita significa retornar a série dada à expressão finita que a gerou. Por exemplo, em notação atual, no artigo 292, a expressão finita $\frac{1}{1-a}$ é a soma da série $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ pois utilizando o algoritmo usual da divisão infinitamente é possível expandir $\frac{1}{1-a}$ e obter a série $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$. De acordo com o MCS, Euler, neste caso, está produzindo significado para a soma da série em um Campo Semântico da Divisão.

"Além disso, nesta época o *princípio da generalidade da álgebra* [outra estipulação local para ele] garantia a Euler que esta soma era válida para qualquer valor de a" (LUCHETTA, 2017, p. 88). Este princípio consistia da suposição: "Se uma fórmula analítica foi derivada usando as regras da álgebra, então ela era pensada válida em geral" (FERRARO, 2008, p. 209-210, tradução nossa).

Gostaríamos de destacar a diferença do modo de produção de significado para a soma da série que Euler nos apresentou, com o significado produzido hoje em teoria de séries. Atualmente, dizemos que $\frac{1}{1-a}$ é a soma da série $\sum_{i=0}^{\infty} a^i$ para $|a| < 1$, pois de acordo com a definição da Teoria de Séries, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a^i = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right) = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$.

Neste caso, estamos produzindo significado para a soma de uma série em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por sequências, somas parciais e limite: **Campo Semântico Teoria das Séries**. Logo, o objeto “soma de uma série” foi constituído de um modo diferente daquele feito por Euler, que produzimos anteriormente, ou seja, são objetos distintos pois cada objeto foi constituído dentro de Campos Semânticos diferentes. Um: Campo Semântico da Divisão. Outro: Campo Semântico Teoria das Séries.

Vamos continuar nossa leitura plausível do parágrafo §1 do artigo *De seriebus divergentibus*,

> *- Euler: §1. Se as séries convergentes são definidas como aquelas cujos termos decrescem continuamente e, finalmente, se a série continua até o infinito, desaparecem completamente; é fácil ver, que as séries cujos termos infinitesimais não tornam-se nada, mas nem permanecem finito ou crescem até o infinito, são designadas, desde que não sejam convergentes, a classe de séries divergentes. Dependendo se os últimos termos da série, que se obtém na progressão continuada até o infinito, são de magnitude finita ou infinita, temos dois tipos de séries divergentes, que podem ser subdivididas em duas classes, dependendo se todos os termos possuem o mesmo sinal ou os sinais alternados + e - um com o outro. No geral, portanto, teremos quatro tipos de séries divergentes que, por motivo de maior clareza, eu gostaria de adicionar alguns exemplos.*
>
> $$I.\ 1+1+1+1+1+1+etc. \qquad \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+etc.$$
>
> $$III.\ 1+2+3+4+5+6+etc. \qquad 1+2+4+8+16+32+etc.$$
>
> $$II.\ 1-1+1-1+1-1+etc. \qquad \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+etc.$$
>
> $$IV.\ 1-2+3-4+5-6+etc. \qquad 1-2+4-8+16-32+etc.$$
>
> (EULER, 1760, p. 1, tradução nossa).

Euler “produzia significado para **séries convergentes** como aquelas séries que os termos de forma gradual se tornam menores e finalmente desaparecem completamente.” (LUCHETTA, 2017, p. 89). Euler intitulou **séries divergentes** “as séries cujos termos não se tornam zero, mas nunca diminuem abaixo de um certo valor ou mesmo aumentam até o infinito” (LUCHETTA, 2017, p. 89). Observe que a definição utilizada atualmente para séries convergentes é completamente diferente desta apresentada por Euler, pois envolve sequências numéricas, somas parciais e limites.

Atualmente, na Teoria de Séries, a sequência de termo geral $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ denomina-se série numérica associada à sequência $\{a_n\}$. Nos referimos a s_n como **soma parcial de**

ordem n da série. Se existe $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$, o número real s é chamado de **soma** da série. Se a soma for um número real, diremos que a série é **convergente**. Se a soma for infinita ($+\infty$ ou $-\infty$) ou se o limite não existir, diremos que a série é **divergente.**

Observe que os objetos séries convergentes para Euler, **não** são os mesmos objetos séries convergentes de hoje, este fato pode causar um certo estranhamento já que a eles são atribuídos os mesmos nomes. Os objetos que Euler constituiu, embora tenham os mesmos nomes de hoje, são completamente distintos.

Voltando às nossas leituras/produções com Euler a partir do artigo 292, podemos escrever:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} + \cdots (i)$$

ou seja, o quociente $\frac{1}{1-a}$ pode ser expandido em uma série infinita $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ e a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é a expressão finita, neste caso $\frac{1}{1-a}$, que a gerou.

Diante do que foi apresentado, era legítimo, para Euler, escrever (i). Assim, Euler substituirá valores numéricos para a . Vejamos!

> - *Euler: §293. O que dissemos pode parecer à primeira vista estranho, mas a consideração de alguns casos particulares tornará mais fácil o entendimento. Vamos supor, em primeiro lugar, que* $a = 1$. *Nossa série irá tornar-se* $1+1+1+1+1+1+1$ *etc ; e a fração* $\frac{1}{1-a}$ *que deve ser igual, torna-se* $\frac{1}{1-1}$ *ou* $\frac{1}{0}$. *Agora, temos que relembrar antes que* $\frac{1}{0}$ *é um número infinitamente grande. Portanto, aqui é confirmado de maneira satisfatória*[5]. *Novamente, se supormos* $a = 2$, *nossa série tornar-se 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 etc. até o infinito, e seu valor deve ser o mesmo que* $\frac{1}{1-2}$, *ou seja,* $\frac{1}{-1} = -1$, *que à primeira vista parece absurdo. Mas devemos observar que, se queremos parar em qualquer termo da série acima, não podemos fazê-lo, sem anexar a ele a fração que resta. Suponha, por exemplo, que estamos parando em 64, depois de ter escrito 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 devemos adicionar a fração* $\frac{128}{1-2}$ *ou* $\frac{128}{-1}$ *ou* -128, *teremos portanto* $127 - 128$ *que é de fato* -1. *Se fôssemos continuar a série sem intervalo, a fração deixaria de ser considerada. Mas, nesse caso, a série poderia ainda continuar* (EULER, 1840, p. 91, tradução nossa).

Apresentamos uma leitura de conhecimentos e significados produzidos por Euler a partir do Artigo 293. Euler substituí $a = 1$ na expressão (i) obtendo $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$

Observe que a série infinita apresentada no artigo 293 é o primeiro tipo de séries

[5] Segundo Boyer (1996, p. 308), "o símbolo do infinito é livremente considerado como denotando o recíproco do número 0" por Euler, e de fato podemos constatar esta produção de significado, em particular, nos artigos 82 e 83 da Parte I, Seção I, Capítulo VII, do livro *Elements of Algebra*, Euler apresenta de forma detalhada a constituição do objeto infinito.

divergentes que Euler apresentou no parágrafo §1 do artigo *De seriebus divergentibus*. Assim, segundo Euler a partir do artigo 293, no parágrafo §2 do artigo *De seriebus divergentibus*.

> *- Euler: §2. Há muita discórdia entre os matemáticos em relação às séries divergentes, enquanto alguns negam, outros não, que elas podem ter uma soma bem definida. Em primeiro lugar é realmente claro, que as somas das séries, que eu me referi na primeira classe, são realmente infinitas, porque tomando termos suficientes dela, podemos chegar a uma soma maior do que qualquer número dado. Por isso, não há dúvida, que as somas das séries deste tipo podem ser exibidas pela expressão $\frac{a}{0}$. Assim, a grande controvérsia entre os geômetras é principalmente sobre os três tipos restantes; e os argumentos que são apresentados por ambos os lados para defenderem suas posições, incorporam tanta força persuasiva, que nenhuma parte se sentiu obrigada a concordar com a outra* (EULER, 1760, p. 1, tradução nossa).

Euler produz significado para a soma da série $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ como ∞, pois "tomando termos suficientes" desta série, a soma será "maior do que qualquer número dado", ou seja, a soma desta série pode ser expressa por $\frac{1}{0}$. E, de acordo com o parágrafo §1 deste mesmo artigo, esta série é classificada como divergente. Euler estava produzindo significado num Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão, no contexto que analisamos. Atualmente, o modo de produção de significado para séries convergentes e divergentes é feito em um Campo Semântico cujo núcleo é constituído por sequências, somas parciais e limites. Como conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação (MCS) **os conhecimentos produzidos são distintos**.

> *- Henrique Lazari: Têm outros, Romulo. O Fermat que era amador, advogado. Mas, eu ficaria pensando, quantos "Eulers" a gente teria no quadro da Secretaria de Educação. Vamos dizer, é um caso muito singular [risos].*
> *- Romulo Lins: Por que, Henrique, ao invés de passar quatro anos falando sobre construção dos reais, convergência (não que eu acho que não se deva falar disso, de convergência, ponto), gastando o tempo que se gasta em coisas de Espaços Métricos e Topologia, você não poderia gastar esse tempo com outras coisas realmente elementares. Por exemplo, se o cara ganhasse confiança em, por exemplo, problemas de geometria elementar sem pensar em axiomatização, problemas de geometria elementar escolares. Você não acha que isso aumenta o ganho em termos de tempo, talvez?*
> *- Henrique Lazari: Eu até entendo, Romulo.*
> *- Romulo Lins: Outra coisa, Henrique, em relação à Universidade na Inglaterra (que mobilizou o estudo) é que se você for graduado em Engenharia, Contabilidade, Química, e quiser dar aulas, você faz um curso de complementação (que é o mesmo tanto para o cara que fez bacharelado em Matemática, quanto para cara que fez contabilidade) e pode dar aula.*
> *- Henrique Lazari: Provavelmente, teve uma formação específica que deu a eles uma independência intelectual. Imagine um economista, por exemplo, que resolve dar aulas de matemática. Esse cara não viu Topologia, não viu coisa assim, mas ele viu Micro Economia, Teoria de Firma e, para ter passado por isso, deve ter se dedicado, ter trabalhado sério em cima disso tudo. Ele vai, necessariamente, ter criado certos hábitos que estão muito próximos dos hábitos criados por quem faz um curso de Espaços Métricos. É interessante, porque Economia é um curso de humanas, mas se você pegar um manual de Economia percebe isso. Isso acontece, por exemplo, com o pessoal de contabilidade. Por que às vezes você tem*

> *médicos que dão bons professores de matemática? E os médicos têm Cálculo e Estatística, só. O Economista ainda tem Cálculo de Várias Variáveis, tem Álgebra Linear, essas coisas. Mas de um modo geral, pelo menos é o que a gente vê e eu não quero generalizar, o cara tem aquele conjunto que corresponderia a esse núcleo, uma formação muito vinculada à resolução de problemas, a certos comportamentos profissionais* (Henrique Lazari. *In:* VIOLA DOS SANTOS, p. 142, 2012).

Em uma tentativa de explicitar que são conhecimentos distintos, explicitamos um exemplo com os termos da matemática contemporânea no campo semânticos da Teoria de Séries.

Considere a série: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ... onde $a_n = 1$ para todo inteiro positivo n. Portanto, a enésima soma parcial s_n é n. Assim, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Por essa razão, a série dada é divergente.

Ao produzirmos significados para a série 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ..., chegamos à mesma conclusão de Euler, que a série é divergente. Mas os modos de produção de significados são diferentes. Diante do texto 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ... = $+\infty$, Euler produziu significado para ele dentro de um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão, logo Euler produziu um conhecimento onde a *crença-afirmação* é 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ... = $+\infty$, junto com a *justificação*: essa expressão surgiu quando substituiu-se $a = 1$ em (i). Note que, esta justificação hoje não é legítima, pois $\sum_{i=0}^{+\infty} a^i = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$ e no caso em questão, não podemos fazer a substituição. O conhecimento que produzimos hoje utilizando a Teoria de séries é produzido em um Campo Semântico cujo núcleo é constituído por sequências, somas parciais e limites, logo produzimos um conhecimento (diferente de Euler) onde a crença-afirmação é 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ... = $+\infty$, junto com a justificação: $\sum_{i=0}^{\infty} 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Observe que as justificações são distintas, embora coincidam em relação a *crença-afirmação*. Portanto, podemos dizer que os conhecimentos produzidos são diferentes.

> - *Plínio Moreira: Eu acho bom o exemplo para mostrar que um dos maiores matemáticos da época, o cara que mais publicou em matemática, que publicou em várias áreas da matemática, não conhecia os números reais do ponto de vista formal que se tem hoje. /.../ O exemplo é bom no sentido de mostrar a diferença, ou seja, você vai formar um professor da escola, então ele não precisa receber essa formação que o matemático precisa. Nesse caso, o exemplo é fundamental para distinguir duas matemáticas. Que uma coisa é uma formação sólida para ser professor, para trabalhar nas circunstâncias em que o professor da escola trabalha e outra é uma formação sólida para ser matemático, para trabalhar nas circunstâncias em que o matemático trabalha* (Plínio Moreira, *In:* VIOLA DOS SANTOS, p. 268, 2012).

Aqui queremos salientar que Euler foi um dos desbravadores na utilização de séries divergentes, sendo que muitas vezes, ele as utilizava de maneira natural, sem muitas preocupações. Estas séries somente ganharam espaço na matemática no final do século XIX. Em 1899, Félix Edouard Justin Émile Borel (1871 - 1956) desenvolveu de modo sistemático a Teoria de séries divergentes, sendo ela uma teoria à parte da Teoria de séries. Para maiores detalhes consultar Luchetta (2017).

Continuando a produção de conhecimentos e significados para o Artigo 293, Euler toma $a = 2$ em (i). Assim, temos $\frac{1}{1-2} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \ldots$

Observe que Euler diz *que à primeira vista parece ser absurdo* esse resultado, e em seguida justificou sua afirmação. Observe que esta série infinita é o terceiro tipo de séries divergentes que Euler apresentou no parágrafo §1 do artigo *De seriebus divergentibus.* Esta série foi discutida com maiores argumentações no livro *Foundations of Differential Calculus*, no parágrafo §103, neste Euler, nós dizemos que intuitivamente a soma da série 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + … deveria resultar ∞, pois os termos desta série estão aumentando continuamente. Mas como esta série originou-se da expansão da fração $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots$ pela divisão contínua, substituindo $a = 1, 2$, obtemos as seguintes séries com as suas respectivas somas: $A.\, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \frac{1}{1-1} = \infty$, $B.\, 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = \frac{1}{1-2} = -1$.

"Euler observa que os termos da série B, com exceção do primeiro termo, são todos maiores do que os termos correspondentes da série A, portanto, a soma da série B deveria ser maior do que a soma da série A" (LUCHETTA, 2017, p. 94). Mas, a série A tem soma infinita enquanto a série B tem soma negativa, que é menor do que zero. "Segundo Euler 'isso está além da compreensão', pois estes resultados ultrapassam as ideias comuns da aritmética onde adicionando somente termos positivos resulta uma soma negativa" (LUCHETTA, 2017, p. 94).

No artigo *De seriebus divergentibus*, parágrafo §7 e no livro *Foundations of Differential Calculus*, parágrafos §98 e §100, "Euler busca subsídios para resolver o paradoxo de uma quantidade negativa ser ao mesmo tempo menor do que zero, ou nada, e maior do que o infinito" (LUCHETTA, 2017, p. 96). Assim, no parágrafo §7,

> [...] Euler produz significado para as quantidades negativas como sendo menores do que nada, justificando que estas surgiram da subtração de um número maior, por exemplo $a + 1$, de um número menor, por exemplo a, ou seja, $a - (a + 1) = -1$. Euler estava produzindo significado para as quantidades negativas em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído por operações aritméticas (LUCHETTA, 2017, p. 96).

No parágrafo §98, deste mesmo artigo, Euler apresenta "uma outra produção de significado para as quantidades negativas como sendo menores do que nada. Ele considerou a série dos números inteiros $\ldots, -4, -3, -2, -1, +0, +1, +2, +3, +4, \ldots$" (LUCHETTA, 2017, p. 96) e junto com o *princípio de continuidade*, ele percorre da direita para a esquerda esta série, observando "que os números estavam diminuindo continuamente e se aproximando do zero, e então continuando a série, os números tornavam-se negativos" (LUCHETTA, 2017, p. 96). Diante do que foi posto, Euler concluiu: "a partir disto, entendemos que os números positivos diminuem, passando por 0, a números negativos" (LUCHETTA, 2017, p. 96). Euler estava produzindo significado para as quantidades negativas em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela série dos números inteiros e pelo princípio de continuidade. Assim, temos dois diferentes modos de produzir significados para as quantidades negativas sendo menores do que nada.

Por outro lado, retomando o parágrafo §7, do artigo *De seriebus divergentibus:*

> [...] Euler produziu significado para as quantidades negativas como sendo maiores do que as quantidades infinitas, segundo ele, estas são encontradas, por exemplo, quando consideramos a soma da série $1 + 2 + 4 + 8 + +16 + \ldots = -1$, cujo resultado desta soma originou-se da divisão do número +1 pelo número -1. Para corroborar ainda mais a esta ideia, Euler utiliza a série harmônica, que descreveremos melhor no próximo parágrafo. Neste caso, podemos dizer que Euler estava produzindo significado para as quantidades negativas em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela divisão elementar, pela soma da série 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... e pela série harmônica (LUCHETTA, 2017, p. 96).

No parágrafo §100, do livro *Foundations of Differential Calculus*, Euler considerou a série harmônica para produzir significado para as quantidades negativas como sendo maiores do que as quantidades infinitas. Assim, ele tomou a série harmônica, cujo termo geral é $\frac{1}{x}$, $\ldots, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, +\frac{1}{0}, +\frac{1}{1}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, +\frac{1}{4}, \ldots$ e junto com o *princípio de continuidade*, ele percorreu da direita para a esquerda esta série. Ele observou que "os termos aumentam continuamente, de modo que $\frac{1}{0}$ é infinitamente grande, e ao passarmos por esse número, os termos tornam-se decrescentes e negativos" (LUCHETTA, 2017, p. 97). Portanto, "era legítimo pensar que os números negativos podiam ser considerados maiores do que o infinito" (LUCHETTA, 2017, p. 97). Em nossa leitura, Euler estava produzindo significado para as quantidades negativas em um Campo Semântico cujo núcleo foi constituído pela série harmônica e pelo princípio de continuidade.

Observe que toda a produção de conhecimento e significados que Euler está fazendo é uma tentativa de produzir justificações junto com a *crença-afirmação*: $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + +16 + 32 + 64 + \ldots$

Mas o que são os números negativos?

Números negativos menores que zero e maiores que infinito

Euler ainda não estava satisfeito. No livro *Foundations of Differential Calculus*, no parágrafo §104, ele "concluiu que devemos fazer uma distinção entre os números negativos da forma – 1, – 2, – 3, ... e os números negativos da forma $\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-1}, \frac{+3}{-1}, \ldots$ o primeiro sendo menor do que zero e o último maior do que o infinito" (LUCHETTA, 2017, p. 97). Mas, segundo Euler, este fato faria com que os fundamentos da análise/álgebra entrassem em ruína. Vejamos como ele resolve este problema no artigo *De seriebus divergentibus*.

> - *Euler: §8. Embora esta distinção pareça ser uma ideia genial, é, no entanto, pouco satisfatória para os adversários e, portanto, parece violar a certeza da análise. Por isso, se os dois valores de – 1, na medida em que ele é ou = 1 – 2 ou =*$\frac{1}{-1}$ *, são de fato diferentes um do outro, de modo que não podem ser confundidos, a certeza e a aplicação das regras que seguimos nos cálculos seriam completamente abolidas, e isso seria certamente mais absurdo do que a distinção para o qual foi pensado. Mas se 1 – 2 =*$\frac{1}{-1}$ *, como as leis da álgebra exigem, a questão de modo algum está concluída, uma vez que a quantidade – 1 em si, que é definida como sendo igual à série 1 + 2 + 4 + 8 + etc., entretanto, é menor do que zero e a mesma dificuldade permanece. No entanto, parece ser verdade, dizermos que as mesmas quantidades que são menores do que nada, ao mesmo tempo podem ser consideradas como maiores do que o infinito. Assim, não somente a partir da álgebra, mas também da geometria, sabemos que há um salto das quantidades positivas para as quantidades negativas, através do nada ou zero, e outro através do infinito, e portanto as quantidades que a partir do zero, tanto aumentam como diminuem, retornarão a si mesmas, e finalmente alcançarão o mesmo termo = 0 novamente, de modo que as quantidades maiores do que o infinito também são menores do que nada e as quantidades menores do que o infinito também correspondem às quantidades maiores do que nada* (EULER, 1760, p. 4-5, tradução nossa).

Quando os matemáticos do século XVIII encontravam-se com "algo" novo, a pergunta que era legítima fazerem era: "O que é isso?", aqui, a pergunta seria: "O que são os números negativos?" Diante desta demanda de produção de significado

> [...] Euler constituiu o objeto "números negativos" como aquelas quantidades que são simultaneamente menores do que zero e maiores do que o infinito. E esta forma de constituir este objeto estava de acordo, segundo Euler, tanto com os preceitos da álgebra como os da geometria, pois "sabemos que há um salto das quantidades positivas para as quantidades negativas através do zero" e outro salto das quantidades positivas para as quantidades negativas através do infinito. Segundo Barbeau e Leah (1976, p. 157), "o negócio de passar de um lado a outro do infinito a partir de números positivos para os números negativos é pelo menos tão antigo quanto Wallis"

> (tradução nossa). Logo, este argumento metafísico apresentado por Euler era legitimado pela comunidade matemática de sua época (LUCHETTA, 2017, p. 98).

Em nossa leitura, os parágrafos acima apresentam um modo de produção de significado para os números negativos que era razoável com as suposições desta comunidade, e que são bem distintos do que estabelecemos (hoje) ao falarmos de números negativos.

> \- *Romulo Lins: Esse argumento desmonta completamente essa mitologia criada em torno do cara ter que fazer essas disciplinas, a ideia da formação do professor como bacharel mais pedagogia. Isso desmonta. Se isso funciona em outro país é uma coisa a se estudar. Funciona? Como funciona? Certamente se funciona não é por uma qualidade intrínseca a essa formação matemática e sim por conta de outras relações* (Romulo Lins, *In:* VIOLA DOS SANTOS, p. 193, 2012).

Com base no que foi argumentado até agora, quando Euler enuncia que 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + … = -1, é totalmente legítimo, pois os números negativos podiam ser maiores do que o infinito.

Queremos destacar que diante da demanda de produzir significado para a soma de uma série divergente onde o resultado parecia ser paradoxal, Euler não hesitou na busca uma argumentação plausível para a comunidade científica da época. De fato,

> [...] basta olharmos novamente para a produção de significado que ele nos apresentou, onde a série surgiu da divisão, logo a série infinita é igual a expressão finita que lhe originou e 'ela pode ser usada nas operações matemáticas como equivalente aquela expressão, mesmo para valores da variável para os quais as séries divergem' (KLINE, 1983, p. 313, tradução nossa) (LUCHETTA, 2017, p. 98).

Utilizando a Teoria de Séries de hoje, a produção de significado para o artigo 293, tomando $a = 2$, é feita do seguinte modo: considere a série 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + ... + 2^n + … em que $a_n = 2^n$. Logo, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, portanto ele não existe. Pelo Critério do termo geral para divergência, segue que a série é diverge.

> Queremos chamar atenção para a importância das justificações que ocorrem durante a produção de um conhecimento para tentarmos produzir uma leitura de que modo o autor opera. De fato, diante do parágrafo §1 do artigo *De seriebus divergentibus*, no qual Euler afirma que a série 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + etc. é divergente, podemos produzir significado para esta afirmação sem nenhum estranhamento, pois hoje concordamos com ela. Porém, ao passo que investigamos a produção de conhecimento que Euler fez 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + etc. = -1 no artigo 293, substituindo $a = 2$ na expansão da fração $\frac{1}{1-a}$ em série infinita, isto nos causa não apenas um estranhamento, mas um limite epistemológico, pois isto não pode ser dito hoje na comunidade matemática, não é legítimo (LUCHETTA, 2017, p. 98-99).

Ao nos depararmos com essa afirmação, poderíamos simplesmente dizer que Euler "errou" ao considerar a série de maneira formal, não notando quais eram os valores de a que poderiam ser substituídos na fração $\frac{1}{1-a}$ para que a série convergisse. Chamamos atenção para o fato que nossa leitura é apoiada na leitura plausível, isto é, "o que nos interessa é saber por que Euler produzia significado para esta série desta forma" (LUCHETTA, 2017, p. 99). Para entendermos de onde e como Euler falava, investigamos seus trabalhos anteriores, onde ele produziu significado para a série 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + etc., e somente tendo em vista "seus trabalhos anteriores pudemos perceber toda a coerência de sua produção de significado, toda a riqueza de sua argumentação e veja bem: Era legítimo para Euler enunciar 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + etc. = -1, pois o -1 é um número maior do que o infinito!" (LUCHETTA, 2017, p. 99).

Tendo em mente toda nossa argumentação realizada até aqui, diante do texto "$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots = \frac{1}{1-a}$", para $|a| < 1$, tanto Euler como nós (hoje) concordamos com ele, e sentimos que estamos compartilhando interlocutores e pertencemos a um mesmo espaço comunicativo, mas ao examinarmos os modos de produção de significados e os conhecimentos produzidos a partir deste texto, verificamos que de fato tanto os significados como os conhecimentos são distintos. Por isto que o Modelo dos Campos Semânticos é um referencial que nos possibilita "produzir leituras suficientemente finas de processos de produção de significado" (LINS, 2012, p. 18) e que nos oportuniza vislumbrar os objetos matemáticos sendo constituídos.

> - *Márcio Soares: Espere, deixe-me ver se entendi. Eu não vi nenhum problema nessa pessoa. Eu também acho que se essa pessoa faz isso, ela é perfeitamente capaz de, se quiser, saber criticar. Supondo ver que aqui é um conjunto, essa pessoa é capaz de pensar: isso aqui é interessante ou não é? Eu vou precisar disso ou não vou? A pessoa tem essa capacidade. Será que a idéia de conjunto é útil para eu ir mais adiante em matemática? Se for útil, em que sentido? Eu acho que uma pessoa que sabe resolver problema, que sabe formular problema começa a ter essa idéia, começa a ter essa independência, quer dizer, a pessoa já tem praticamente tudo, que é a independência intelectual. Ele vai poder pegar um livro, ver se ele gosta e fazer essa formação. (Márcio Soares, In: Viola dos Santos, p. 129,2012)*
> - *João Viola: E a ideia, professor, é discutir sobre essas disciplinas que a gente tem hoje na licenciatura, discutir sobre a possibilidade dessas não darem essa condição, necessariamente, para a formação matemática de um professor de matemática.*
> - *Márcio Soares: Não, não dão, nisso eu concordo com você. Acho que elas não dão e, em princípio, elas não dariam não. Acho que depende muito da pessoa. Eu acho que, em princípio, não é porque o sujeito vai estudar conjunto, Análise, Álgebra, não sei o que, não sei o quê... Eu acho que se se ensina a pensar, ele aprende a pensar. Pronto. Isso para mim. Pensar para mim é isso, ter o raciocínio matemático, ter essa ideia* (Márcio Soares, *In:* VIOLA DOS SANTOS, p. 130, 2012).

Discutimos neste artigo uma possibilidade de produzir significados por meio de uma leitura da história da matemática. Apresentamos situações que ampliam nosso repertório em relação a modos distintos de produções matemáticas, aos modos de operar, quais estipulações locais valem, que outras não, em quais direções é possível produzir a construção de um argumento. Se Euler sabia ou não matemática, essa é apenas uma desculpa, ou mesmo um convite, para nosso propósito: discutir produções de significados e conhecimentos e construir um espaço no qual a diferença possa ser vivida, experienciada.

Euler produzia suas ideias de Séries no Campo Semântico da Divisão. Nossos alunos de Cálculo produzem ideias de séries no Campo Semântico da Teoria de Séries. Para o primeiro, o princípio da extensão era uma estipulação local e se constitui como uma legitimidade. Para o segundo, conceitos de limite e infinito se constituem como outras estipulações locais. *Números negativos menores que zero e maiores que infinito? Não, professor(a) isso não faz sentido em nosso modo de produzir matemática.*

Algumas considerações

Nesse artigo explicitamos, em um processo de leituras e produções, como os modos de produção de significados de Euler são diferentes dos que temos, atualmente, em livros de Cálculo Diferencial Integral, por exemplo, muito movimentados nas Licenciaturas. Claro que há proximidades entre a produção de Euler e as produções nos livros didáticos, porém, ao olharmos em detalhes, como fizemos neste artigo, vemos que se tratam de objetos matemáticos diferentes.

Um desdobramento desta consideração é na direção de construir uma formação matemática para futuros professores de matemática que não tome como naturalizada a seguinte ideia: *A Matemática do Matemático é o fundamento da Matemática do Professor de Matemática. O que sustenta a Matemática da sala de aula da Educação Básica é a Matemática do Matemático*. Não se trata disso. A formação matemática de um futuro professor de matemática precisa ser estruturada a partir de um projeto político de uma escola da Educação Básica. A partir deste, que produções matemáticas, tomadas enquanto um meio de produzir vidas, modos de ler mundos (inventar mundos), criticar processos, fazer projeções, ler relações econômicas, enxergar desigualdades, ficar atento em generalizações, ler plausivelmente os modos de produção de significados matemáticos e não matemáticos de alunos em sala de aula, podem fazer parte deste projeto. Esse complexo cenário precisa ser nosso ponto de partida para pensarmos uma formação matemática de futuros professores de matemática.

Esse discurso naturalizado de que a formação matemática de professores de matemática se fundamenta na matemática do matemático não se mantem. Euler, de fato, não sabia nada da matemática que, supostamente, é tomada como fundamental para a formação matemática de professores de matemática. É possível estabelecer relações, realizar uma leitura pela falta da produção matemática de Euler e construir um processo de progresso na construção de matemáticas ao longo do tempo. Porém, essa construção vai sempre tomar como generalizante a formação matemática ideal e deixar de lado os contextos políticos, econômicos, culturais dos programas de formação inicial de professores de matemática. Com o *insight* de Lins, em 2008, construímos um argumento para o qual coloca em suspensão essa estrutura fundamental (Cálculo Diferencial Integral, Álgebra Linear, Análise Real, para citar algumas) das Licenciaturas em Matemática.

Discussões na direção de construir uma formação matemática inicial para futuros professores de matemática não pode (ou mesmo não deveria) se sustentar em argumentos superficiais, em decisões de manter ou tirar uma disciplina; em pensar em uma formação mais aligeirada, em termos de sofisticação matemática, ou mais complexa em termos de aprofundamentos em certas áreas; ou mesmo, visto o que mais acontece, em termos de uma disputa ideológica entre educadores matemáticos, matemáticos puros, matemáticos aplicados, estatísticos em demarcar terrenos e poder nos espaços das licenciaturas em matemática.

Matemáticas, como meio de organizar, manter, inventar modos de vidas são indispensáveis na formação de seres humanos. Construir um currículo para uma Licenciatura em Matemática é uma tarefa que se coloca para a comunidades de formadores, sejam eles quais forem, que atuam nesses espaços. Pensando na prática docente, deseja-se que os professores tenham um amplo e diversificado conhecimento a respeito dos assuntos que ensinarão,

> [...] o professor precisa saber mais, e não menos Matemática, mas sempre esclarecendo que este mais não se refere a mais conteúdo, e sim a um entendimento, uma lucidez maior, e isto inclui, necessariamente, a compreensão de que mesmo dentro da Matemática do matemático produzimos significados diferentes para o que parece ser a mesma coisa. (LINS, 2005, p. 122).

Segundo Lins, o que é mais importante para a formação de um futuro professor de matemática é que diante, por exemplo da série $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots$, tomando $a = 2$, obtemos $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + etc.$, esta situação faça seu chão sumir sob seus pés, pois isso segundo Lins, "cria a possibilidade do tornar-se, não torna-se um matemático, mas tornar-se - como deve ser um professor - um atento leitor da diferença". (LINS, 2004a, p. 119). Sendo assim, a Matemática do matemático oferece uma oportunidade singular de discutir a diferença. E para Lins,

> [...] isto é, ao meu entendimento, exercer uma educação através da Matemática, e num sentido que coloca a escolha de conteúdos claramente como apenas uma escolha do que me vai ser mais útil em minha empreitada e, nunca, como uma escolha "do que deve ser ensinado" (LINS, 2004, p. 119).

Em vista disso, ao nos depararmos com os diferentes modos de produções de significados que Euler nos apresenta, "estamos ampliando nossos horizontes, estamos experimentando a possibilidade de vislumbrarmos outros lugares, outros modos de produção de significados para os objetos matemáticos, outras práticas de ensino" (LUCHETTA, 2017, p. 217).

Nas Licenciaturas em Matemática poderíamos construir espaços nos quais os alunos pudessem estudar, ler, produzir com diferentes matemáticos ao longo do tempo, Euler, Fermat, Weierstrass, entre outros. Não apenas em um sentido restrito de uma história da matemática, mas em um projeto amplo de problematização de modos particulares de produção de matemáticas, levando em consideração seus contextos culturais, filosóficos, políticos em uma direção de explicitar diferenças com produções matemáticas que acontecem nas salas de aula da Educação Matemática. Como afirmam, Oliveira, Linardi e Viola dos Santos (2020, no prelo), uma formação de professores de matemática poderia ser estruturada em noções como repertórios e leituras.

> Um ponto central de nossas problematizações é pensar na direção da construção de formações iniciais de diferentes educadores matemáticos a partir das noções de repertórios e leituras. Repertórios em um sentido amplo de partilha e movimentação entre diferentes processos de produção de significados. /.../ a noção de leituras, que se constitui na direção política de acreditar e afirmar que educadores matemáticos precisam ler processos de produção de significados de seus alunos de modo a interagir e intervir, em tentativas de ampliar, colocar em xeque, explorar outras possibilidades na construções de diferentes espaços comunicativos.

Repertórios e leituras como noções centrais de um projeto político de formação de professores se apresentam como uma possibilidade na qual formações de **diferentes professores** é uma condição necessária. Diferentes professores, pois nossas escolas e os alunos que habitam esses espaços são plurais, com múltiplos contextos sociais, culturais e econômicos.

> *- Ole Skovsmose: Eu tenho duas respostas e vou voltar para a ideia da Dinamarca. Para a Escola Básica, entre 6 e 16 anos, essa pessoa é excelente. Quando eu penso na qualificação de professores, eu gosto de pensar sobre uma qualificação para um grupo de professores, pois quando ele entra na escola trabalha com em grupos de professores com outros conhecimentos. É importante você ter esses grupos com qualidades diferentes. Esse é um bom grupo. Para a escola de 16 a 19 anos, talvez ele tivesse algumas dificuldades, porque precisaria dar aula de Cálculo (Porém acho que o Euler conseguiria [risos]). Eu penso que o importante é termos um grupo de professores com qualidades diferentes. Para mim a qualidade de um professor não fala muito sobre a qualidade de professores. Eu falo de qualidades de professores de uma escola, de um grupo. Você pode ter um professor que não sabe nada sobre Cálculo, mas sabe muito sobre possibilidades, processos. Ele ajuda* (Ole Skovsmose, *In:* VIOLA DOS SANTOS, p. 175, 2012).

Euler não sabia nada de matemática? Sim, se tomarmos A Matemática do século XX, estruturada em termos de sua axiomatização (acreditamos que em poucas leituras destes textos, Euler seria capaz de ir bem em uma primeira prova de Cálculo I, ou até mesmo produzir novas ideias). Não, pois ele produziu conceitos, ideias, argumentos, um vasto repertório com demandas e problemas de sua época. Ele de fato sabia e produziu muitas novas ideias matemáticas.

Nosso argumento central não se restringe em responder essa pergunta afirmando ou negando-a, mas em uma direção de movimentarmo-nos com ela, com efeitos que dela decorre para construir um projeto político de uma formação matemática na Licenciatura para futuros professores de matemática da Educação Básica: sempre em processo, em movimento.

Nesse artigo, produzimos alguns movimentos, efeitos e desdobramentos para uma formação em matemáticas**,** em espaços de formação de educadores matemáticos.

Referências

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. C. Content Knowledge for Teaching: What make it special? **Journal of Teacher Education,** v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008

BARBEAU, E. J.; LEAH, P. J. Euler's 1760 Paper on Divergent Series. **Historia Mathematica**. v. 3, n. 2, p. 141-160, 1976.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

D'AMBROSIO, U. Euler, Um Matemático Multifacetado. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 9, n. 17, p. 13-31, abril/set. 2009.

DUNHAM, W. **Euler:** The Master of Us All. MAA, 1999.

ELIAS, H. R.; SACHS, L. Um ensaio teórico sobre saber mais matemática para ensinar. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 11, p. 955-977, 2018.

ELIAS, H. R. Os Números Racionais na Matemática Acadêmica: uma discussão visando à formação matemática de professores. **Boletim de Educação Matemática**. BOLEMA JCR, v. 32, p. 439-458, 2018.

EULER, L. **Foundations of Differential Calculus** (1748). Translated by John D. Blanton. New York: Springer-Verlag, 2000. v. 1.

EULER, L. De seriebus divergentibus. **Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae 5**, 1760, p. 205-237. Reimpresso em **Opera Omnina**: Series 1, v. 14, p. 585-617. Tradução de Alexander Aycock. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org. Acesso em: 23 maio 2016.

EULER, L. **Elements of Algebra** (1840). Translated by Rev. John Hewlett. New York: Springer-Verlag, 1984.

FERRARO, G. **The rise and development of the theory of series up to the early 1820s**. New York: Springer Science & Business Media, 2008.

HOARE, G. Leonhard Euler (1707-1783). **The Mathematical Gazette**. v. 91, n. 522, p. 406-414, nov. 2007. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/40378414. Acesso em: 03 maio 2016.

KLEINERT, A.; MATTMÜLLER, M. Leonhardi Euleri Opera Omnia: a centenary project. **Newsletter of The European Mathematical Society**, n. 65, p. 25-31, set. 2007.

LINS, R. C. O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: Uma Análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis: Revista Técno-Científica**, Blumenau, v.1, n. 7, p. 29-39, abril/jun. 1994.

___________. Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática. *In:* BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Editora Cortez, 2004. p. 92 -120.

____________. A Formação Pedagógica em disciplinas de conteúdo matemático nas licenciaturas em matemática. **Revista de Educação PUC**. Campinas, 2005.

_________. Characterizing the mathematics of the mathematics teacher from the point of view of meaning production. *In:* 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, 2004. Copenhagen. **Proceedings…** Plenary and Regular Lectures, 2006, p. 1-16.

_____________. Where would Leonhard Euler stand today as a school teacher? *In:* Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI, 2008, Roma. **Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI**. Roma: ICMI, 2008.

____________. O Modelo dos Campos Semânticos: Estabelecimentos e Notas de Teorização. *In:* ANGELO, C. L. *et al*. (Org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 11- 30.

LINARDI, P. R.; OLIVEIRA, V. C. A. VIOLA DOS SANTOS, J. R. Desconstruindo *Tabus* na Formação Matemática de Professores de Matemática. *In:* (Org): Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática. **Problematizações sobre Formação Matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática.** SBEM. (no prelo).

LUCHETTA, V. J. O. **Uma possível produção de significados para as séries no livro Elementos de Álgebra de Leonhard Euler**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/152354. Acesso em: 26 jun 2020.

MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do professor:** formação na licenciatura e prática docente na escola básica. 2004. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetike**, Campinas, v.11, n.19, p. 57-80, 2003.

_____________. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente**.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SILVA, A. M. **Sobre a dinâmica da produção de significado para a Matemática**. 2003. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/102156. Acesso em: 26 jun. 2020.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução de Seiji Hariki. São Paulo: Pearson Makron Books, 1988. v. 2.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **Legitimidades possíveis para a formação matemática de professores de matemática:** (ou: Assim falaram Zaratustras: uma tese para todos e para ninguém). 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012. Disponível em http://hdl.handle.net/11449/102099. Acesso em: 26 jun. 2020.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. Para uma outra formação matemática na Licenciatura em Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, p. 337-357, 2014.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. Movimentos de Teorizações em Educação Matemática. Boletim de Educação Matemática. **BOLEMA**, v. 30, p. 325-367, 2016.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. Uma Discussão a Respeito da(s) Matemática(s) na Formação Inicial de Professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa (Online)**, v. 18, p. 351-372, 2016.

WATSON, A. School Mathematics as a special kind of mathematics. **For the Learning of Mathematics**. v. 28, n. 3, p. 3-7, 2008.

Recebido em: 30 de junho de 2020
Aprovado em: 11 de Agosto de 2020