revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO NO ENSINO SUPERIOR: EXPLORANDO O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.219-236

Lucas Carato Mazzi[1]
Amanda Queiroz Moura[2]

Resumo: A Matemática no Ensino Superior tende a ser ensinada de maneira tradicional, na qual o professor é o responsável por transmitir o conhecimento e os estudantes são apenas receptores, sem responsabilidade e sem participação em seu processo de aprendizagem. Visando explorar metodologias que contraponham este modelo de ensino, neste artigo, discutimos possibilidades de tarefas investigativas acerca de conceitos matemáticos vistos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática, em particular o Teorema do Valor Intermediário. Assim, apresentamos e analisamos um exemplo de atividade desenvolvida a partir de construções com o software GeoGebra. Para tal, assumimos uma abordagem qualitativa de pesquisa e, como lente teórica, a proposta de Cenários para Investigação, a qual traz como principal característica, a abertura para cooperação investigativa por meio do diálogo. Como resultados, concluímos que, de fato, é possível envolver estudantes do Ensino Superior em ambientes de aprendizagem investigativos, e ressaltamos a importância do software para a manutenção do diálogo, o qual dá suporte para a produção do conhecimento matemático.
Palavras-chave: Atos dialógicos. Ensino Superior. Teorema do Valor Intermediário. GeoGebra.

LANDSCAPES OF INVESTIGATION IN HIGHER EDUCATION: EXPLORING THE INTERMEDIATE VALUE THEOREM

Abstract: Mathematics in higher education tends to be taught in a traditional way, in which the professor is responsible for transmitting knowledge and students are only recipients without responsibility and without participation in their learning process. In order to explore methodologies that contrast this teaching model, in this paper, we discuss the possibilities of investigative tasks about mathematical concepts seen in the disciplines Calculus and Analysis, in particular the Intermediate Value Theorem. Thus, we present and analyze an example of an activity developed with the GeoGebra software. To achieve this goal, we assume a qualitative research approach, and as a theoretical lens, the proposal for Landscapes of Investigation, which brings as its main characteristic, the openness to investigative cooperation through dialogue. As a result, we conclude it is possible to involve higher education students in investigative learning environments and we emphasize the importance of the software for maintaining dialogue, which supports the production of mathematical knowledge.
Keywords: Dialogic acts. Higher Education. Intermediate value theorem. GeoGebra.

Introdução

O ensino de Matemática, não só na Educação Básica, mas também no Ensino Superior, pode, muitas vezes, assumir um caráter tradicional. Em cursos de licenciatura em Matemática é comum que as disciplinas específicas sejam desenvolvidas com base no roteiro

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática – UNICAMP. Pós-doutorando e docente colaborador do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Unesp Rio Claro. E-mail: lucas.mazzi@unesp.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3395-3724
[2] Doutora em Educação Matemática – Unesp Rio Claro. Docente do Centro Universitário das Faculdades Metropolitanas Unidas – FMU, São Paulo. E-mail: amanda_qm@yahoo.com.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9472-3773

pré-definido *definição* → *teorema* → *demonstração* → *exercícios*, sendo o docente o transmissor do conhecimento e os estudantes os receptores, caracterizando a clássica Educação Bancária (FREIRE, 2013).

Essa forma de organização das aulas, incentiva a "celebração da matemática"[3], a qual não é exposta como algo passível de erros ou falhas; não há espaços para justificativas sobre as metodologias e/ou estratégias adotadas e nem para questionamentos. A cultura do silêncio é incentivada e os alunos não possuem um papel ativo em relação a produção de seu conhecimento.

Nesse cenário há um discurso, até certo ponto, velado, de que a Matemática se aprende de modo solitário, mediante a muita dedicação e esforço próprio, e, caso o sucesso não seja alcançado, o estudante é o único responsável por seu "fracasso". Ainda, as reprovações são frequentes, reforçando a ideia de que a Matemática "não é para qualquer um". Valoriza-se, exclusivamente, o raciocínio dedutivo, deixando de lado outros tipos – indutivo, abdutivo e analógico, por exemplo – que também possuem seus papéis na aprendizagem (MAZZI, 2018).

Diante desse contexto, refletimos sobre possíveis mudanças que poderiam ocorrer nas aulas de Matemática, para que essa realidade seja modificada. Será que é possível transformar essas salas silenciadas em espaços dialógicos? Será possível um ensino no qual o aluno seja protagonista de modo a produzir seu próprio conhecimento? Será que a cooperação entre alunos pode contribuir com a produção do conhecimento?

Uma das inspirações para tais reflexões é o livro de Imre Lakatos, publicado em 1978, intitulado "A lógica do descobrimento matemático: Provas e Refutações". Nesta obra, Lakatos traz a Matemática como construções que podem ser falíveis e questionáveis. A partir da exposição de uma aula imaginária, a discussão se dá em torno de tentativas da conjectura de Descartes-Euler sobre poliedros[4], sustentada por críticas e revisões teóricas, passíveis de erros e incertezas. Assim, Lakatos recria tentativas de demonstrações desta conjectura, por meio de um diálogo entre professor e estudantes.

Diferente do modo como, geralmente, são abordadas as ideias matemáticas em cursos do Ensino Superior – em que demonstrações são apresentadas como um fechamento de tais ideias, Lakatos (1978) apresenta a demonstração como parte inicial da discussão. Desse modo, percebe-se que existem diferentes formas de se explorar as ideias matemáticas e que construções sobre essas ideias também podem surgir ao se discutir uma demonstração, por

[3] Para mais informações acerca da "celebração da matemática", ver Muzinatti (2018).

[4] Em qualquer poliedro convexo, considerando V o número de seus vértices, A o número de suas arestas e F o número de suas faces, tem-se a relação $V - A + F = 2$.

exemplo. Ou seja, a demonstração pode ser um primeiro passo para um processo de investigação, e não apenas um fechamento de ideias já discutidas previamente.

Para Skovsmose (2019), essa obra de Lakatos destaca a natureza dialógica em um movimento de descobertas matemáticas, evidenciando como um processo de investigação pode assumir um formato dialógico nas aulas de Matemática e, mais ainda, de que forma o diálogo pode contribuir para uma crítica epistêmica no que diz respeito ao ensino e aprendizagem de matemática.

Assim, o diálogo se mostra como fundamental para estabelecer perspectivas críticas concernentes a Educação Matemática, bem como para a cooperação durante a construção de novas ideias. A proposta de Cenários para Investigação, elaborada por Skovsmose (2000), apresenta direcionamentos para que tal diálogo seja possível nas aulas de Matemática, de modo a contrapor metodologias de ensino, pautadas na cultura do silêncio.

Nesse sentido, visando explorar possibilidades de inserção da metodologia investigativa e dialógica em aulas de matemática no Ensino Superior, discutimos neste artigo, um exemplo de situação em que licenciandas em Matemática foram convidadas a participar de momentos de investigação acerca de conteúdos relacionados às disciplinas de Análise Matemática[5] e Cálculo Diferencial e Integral.

A escolha por trabalhar com tópicos dessas disciplinas se deu pelo fato de serem consideradas problemáticas e difíceis, causando um impacto negativo nos alunos, além de possuir elevados índices de reprovação (BARONI; OTERO-GARCIA, 2013). Aline Robert (1982, p. 320) argumenta que conceitos desse ramo da Matemática, a Análise, “não são tão simples para os estudantes, não apenas em razão do caráter não algorítmico das ferramentas postas à sua disposição, mas também da *riqueza* do conjunto dos reais".

A fim de alcançar nosso objetivo, apresentamos, a seguir, a ideia de Cenários para Investigação, evidenciando sua principal característica: o diálogo. Na sequência, elucidamos a metodologia assumida para a realização da pesquisa, assim como discutimos sobre a produção dos dados. Ainda, com base na lente teórica assumida, analisamos os dados e, por fim, trazemos algumas considerações finais.

Cenários para Investigação Matemática

As disciplinas de Matemática no Ensino Superior costumam pautar-se em um modelo tradicional de ensino, caracterizado por Skovsmose (2000) como paradigma do exercício.

[5] A nomenclatura pode variar, sendo algumas possíveis, Análise, Análise Real, Cálculo Avançado.

Neste contexto, há uma forte atuação de livros didáticos, os quais contém todo o conteúdo necessário para aprendizagem. Além de explicações teóricas, os professores costumam apresentar alguns exemplos, juntamente com técnicas variadas e/ou procedimento necessários para a resolução de exercícios que, na maioria das vezes, estão presentes nos próprios livros.

Nestas situações figura o absolutismo burocrático, o qual "estabelece em termos absolutos o que é certo e o que é errado sem explicitar os critérios que orientam tais decisões" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 26). Não há espaços para questionamentos ou justificativas sobre a importância dos exercícios, quais as implicações para a aprendizagem ou possíveis aplicações. Estes exercícios geralmente apresentam uma única solução e a atuação do professor se dá por meio do seu poder em determinar o que está certo ou errado.

Nesta perspectiva também não há espaço para que os estudantes justifiquem, defendam ou explicitem os caminhos para chegar aos resultados, fazendo com que eles assumam pouca ou quase nenhuma responsabilidade e participação no processo de construção de seu conhecimento, uma vez que seu único papel é dizer ao professor a resposta correta e já esperada por ele.

A necessidade de espaços de aprendizagem, em aulas de Matemática, que pudessem contribuir com a ruptura do absolutismo burocrático e desafiassem o paradigma do exercício, deu origem a proposta de Cenários para Investigação (SKOVSMOSE, 2000). Para o autor, a investigação contribui para que os estudantes sejam os responsáveis pelo seu próprio processo de aprendizagem, uma vez que permite aos estudantes a realização de experimentações. Estas experimentações abrem espaços para descobertas de fatos matemáticos, teste de hipóteses, refutações, reflexões e a produção de novos significados.

Nas aulas de Matemática, estas investigações podem ser organizadas com referência a matemática pura, a situações imaginadas ou a situações reais. Combinando estas três referências com práticas concernentes aos cenários para investigação e ao paradigma do exercício, Skovsmose (2000) sugere uma matriz que relaciona seis possíveis ambientes de aprendizagem (Quadro 1).

Quadro 1: Ambientes de Aprendizagem

	Paradigma do Exercício	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências a uma semirrealidade	(3)	(4)
Referências à vida real	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000).

O ambiente (1) é caracterizado por uma abordagem tradicional da matemática pura, sendo representado por exercícios do tipo “resolva; determine; calcule”, como por exemplo, “determine o valor de x na equação $6x - 20 = 100$". O ambiente (2), apesar de também ter como contexto a matemática pura, é caracterizado por uma abordagem investigativa da Matemática, de modo que sejam propostas reflexões acerca dos conceitos explorados, não sendo uma reprodução mecanizada de procedimentos.

No ambiente (3) tem-se exercícios com referências a uma semirrealidade, como pode ser visto no seguinte problema: “Luan recebeu R$ 10,00 para ir até a feira para comprar melão. Ao chegar na feira percebeu que cada fruta solta custava R$ 3,00 e que se levasse um pacote fechado com cinco unidades, pagaria um total de R$ 10,00. Quanto Luan economizaria se ele levasse o pacote fechado ao invés de comprar as frutas soltas?”. Observe que, mesmo tendo utilizado objetos e ambientes reais – feira, frutas e valores – não há espaço para questionamentos outros. Não importa, por exemplo, se comprar cinco melões de uma só vez faz sentido; ou refletir como ele carregará as frutas até sua casa sozinho. Essa situação funciona como “um mundo platônico, em que toda informação dada é exata e verdadeira” (SKOVSMOSE, 2014, p. 55) e que nada além do que foi dado é relevante.

Já o ambiente (4), mesmo se referindo a uma situação semirreal, propõe espaços para investigações e reflexões. Um exemplo foi apresentado por Moura (2015), no qual a autora utilizou um software de simulação de supermercado para que alunos explorassem preços, pesos e datas de validade de produtos para que, após o levantamento desses dados, tomassem algumas decisões.

Por fim, os ambientes (5) e (6) fazem referência à vida real, ou seja, assumem dados e situações que fazem parte do cotidiano. Para exemplificar e distinguir esses ambientes, podemos considerar as informações presentes em uma fatura de cartão de crédito. O ambiente (5) pode apresentar problemas do tipo “Sabendo que o valor da fatura é de R$ 828,54 e que ela foi paga com um mês de atraso, determine o valor pago, considerando a taxa de juros de 3% ao mês". Já o ambiente (6), além de simplesmente exigir o cálculo desejado, poderia elencar discussões do tipo "Por que temos uma taxa de juros tão alta em cobranças de cartão de crédito? Por que os bancos, ao emprestar dinheiro, cobram taxas altíssimas e ao pegar dinheiro emprestado pagam taxas tão baixas? Quais interesses estão por trás dessas informações". Perguntas como estas podem gerar ricos espaços de discussões entre os estudantes.

Skovsmose (2000, 2014) defende que uma aprendizagem de Matemática que se constitua em crítica e reflexiva é possível ao se transitar por esses 6 ambientes. Neste texto, em particular, exploramos possibilidades de ensino e aprendizagem de conceitos relacionados as disciplinas de Análise Matemática e/ou de Cálculo Diferencial e Integral, por meio de Cenários para Investigação. Nossas discussões estão direcionadas ao ambiente de aprendizagem 2, em que os estudantes são convidados a explorar os conceitos matemáticos, defender hipóteses e criar diferentes formas de aprendizagem, diferenciando-se da prática do paradigma do exercício, em que seu dever é resolver exercícios e encontrar respostas que coincidem com a perspectiva previamente estabelecida pelo professor.

Para que tais explorações aconteçam é importante que os estudantes estejam engajados ativamente nas atividades propostas, as quais devem ser realizadas como forma de um convite aos estudantes. A intenção dos estudantes ou a própria natureza da atividade influenciam o aceite ao convite por parte dos alunos e os move por meio da curiosidade na busca por novos significados.

Em um Cenário para Investigação, o principal padrão de comunicação estabelecido entre os participantes é o diálogo, aqui entendido como uma conversação que visa a aprendizagem (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010). A interação dialógica permite que cada estudante exponha suas perspectivas e as defenda, de modo a contribuir com o pensamento coletivo que está sendo construído.

O diálogo é também um dos responsáveis pelas imprevisibilidades presentes em um Cenário para Investigação. O professor pode formular algumas perguntas para serem apresentadas aos estudantes ao longo de uma investigação, porém, abrir espaços para que os estudantes compartilhem suas perspectivas significa não conhecer, antecipadamente, quais são essas ideias, ou seja, não se sabe ao certo quais serão as respostas dos estudantes.

Assim, trabalhar em um Cenário para Investigação, é trabalhar em um campo de imprevisibilidades, as quais muitas vezes, geram diferentes possibilidades para aprendizagem dos estudantes que fazem suas próprias descobertas sobre determinada ideia ou conceito matemático.

Ao analisarem as interações dialógicas em um Cenário para Investigação, Alrø e Skovsmose (2010) construíram um modelo, denominado de Modelo de Cooperação Investigativa (Modelo – CI) o qual é constituído pelos atos dialógicos: *estabelecer contato*, *perceber*, *reconhecer*, *posicionar-se*, *pensar alto*, *reformular*, *desafiar* e *avaliar*. Tais atos são entendidos como diferentes ações dos participantes que contribuem para o desenvolvimento da manutenção de um diálogo. Uma interação que apresente estes atos é entendida como uma interação dialógica.

Para Milani (2015, p. 203), “dialogar é estar com o outro, é mover-se em direção ao outro, ao interessar-se pelo o que outro diz”. Nesse movimento de ir até o outro a autora apresenta três elementos que considera como essenciais num diálogo: *escuta ativa*, *estranhamento* e *descentramento*.

Assim como os atos dialógicos, os elementos apresentados por Milani (2015), contribuem significativamente para a manutenção do diálogo em uma tarefa investigativa. A autora enfatiza a potencialidade das interações dialógicas para a cooperação e a construção de novas perspectivas e, consequentemente, para aprendizagem dos estudantes.

Embora saibamos das dificuldades da proposta de Cenários para Investigação no Ensino Superior, que nem sempre se mostra como ambiente propício para tais práticas – por questões curriculares; questões de tempo; questões formativas, etc. – evidenciamos tal proposta como uma possibilidade para que práticas sejam ressignificadas, de modo a contribuir com processos de investigação e diálogo, em disciplinas de matemática no Ensino Superior, em particular as de Cálculo Diferencial e Integral e Análise, responsáveis por um elevado número de reprovações nos cursos de Matemática.

Metodologia

Assumimos a metodologia de pesquisa qualitativa como abordagem para o desenvolvimento desse trabalho por entendermos que ela está preocupada com uma compreensão aprofundada de um determinado grupo social (GOLDENBERG, 2004), tendo interesse em refletir e analisar os modos pelos quais as pessoas constroem e descrevem certos significados (BOGDAN; BIKLEN, 1998).

Vale pontuar que os dados aqui analisados foram produzidos em 2013, como parte do mestrado do primeiro autor (MAZZI, 2014), cujo objetivo era investigar o papel do GeoGebra na discussão e significação de conceitos da disciplina de Análise. Para o desenvolvimento de tal pesquisa, foram convidados estudantes do curso de licenciatura em Matemática da Unesp – *Campus* Rio Claro, que já tivessem sido aprovados na disciplina de Análise Matemática I[6]. Quatro alunas aceitaram participar e desenvolver as atividades propostas.

Para a produção dos dados, Mazzi (2014) separou as alunas em duas duplas e realizou uma variação do que Steffe e Thompson (2000) denominam de experimento de ensino. Esses experimentos são encontros entre o pesquisador e o(s) estudante(s), a partir dos quais o pesquisador tem o intuito de elaborar uma compreensão sobre a Matemática do(s) estudante(s) (MAZZI, 2014; STEFFE; THOMPSON, 2000). Esses experimentos têm como elementos: uma sequência de episódios constituídos por um agente de ensino; um ou mais estudantes e métodos de gravação que, nesse caso, eram câmeras fixas, para a filmagem das alunas, além do uso do software *Blueberry*[7], para a gravação da tela do computador.

Para os experimentos, foram elaboradas três atividades. A primeira delas, intitulada *Convergência de Sequências*, tinha como intuito contribuir para a compreensão da relação entre ϵ e n_0 na definição de convergência de sequências numéricas[8], a partir da criação de uma faixa poligonal em torno dos pontos das sequências plotadas. A segunda atividade, intitulada, *Resultados de Convergência*, tinha como objetivo desenvolver conceitos como, por exemplo, sequências monótonas, limitadas e convergentes, assim como investigar algumas propriedades desses tipos de sequências. Por fim, a terceira atividade, intitulada *Teorema do Valor Intermediário (TVI)*, tinha como objetivo possibilitar a investigação do referido teorema, de modo que fossem discutidas suas hipóteses, assim como reconhecida a importância que elas possuem para a validade do resultado.

Para a pesquisa desenvolvida neste artigo, assumimos como dados as discussões envolvendo as estudantes Karen e Adriele, que surgiram a partir do desenvolvimento da terceira atividade, *Teorema do Valor Intermediário*. Apesar de as demais poderem contribuir para as reflexões que queremos propor, optamos por escolher a terceira pelo fato de apresentar de modo mais evidente, as principais características ao se trabalhar em um Cenário para Investigação já identificadas em outras pesquisas (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010; FAUSTINO, 2018; MOURA, 2020) ao se trabalhar em um cenário para investigação.

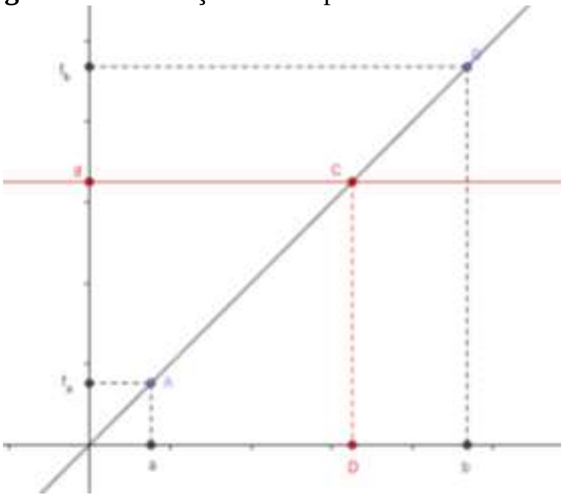
---

[6] Tendo em vista que as disciplinas podem possuir diferentes nomenclaturas nos variados cursos, vale pontuar que a ementa desse curso, em particular, é constituída dos tópicos: Números reais; Sequências de Números reais; Séries Numéricas; Limites de Funções; Continuidade e Continuidade Uniforme; Diferenciabilidade e Fórmula de Taylor.
[7] Com uma *webcam* e um microfone conectados ao computador, esse programa captura a imagem da tela do computador e da webcam simultaneamente, bem como o áudio do ambiente, podendo comparar o que está sendo falado pelos alunos e o que está sendo feito no computador, ao mesmo tempo.
[8] Uma sequência x_n converge para L se, e somente se, $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0$ tal que $|x_n - L| < \epsilon$.

Discussão dos dados

Todas as atividades desenvolvidas pelas alunas propunham, inicialmente, algumas construções no GeoGebra, a partir de um roteiro, as quais deram suporte para reflexões e discussões de algumas questões. Para a atividade aqui abordada, foi pedido para as alunas plotarem a função $f(x) = x$, e marcarem nela pontos $A(a, f_a), B(b, f_b)$ e $C(D, d)$, respeitando as seguintes relações, $f_a \leq d \leq f_b$ e $a < b$ (Figura 1).

Figura 1: Construção inicial para discussão do TVI



Fonte: Adaptado de Mazzi (2014).

Após a construção, foi pedido que as estudantes elaborassem conjecturas matemáticas com base na construção realizada. Visando atender a esse pedido, as alunas Karen e Adriele, juntas ao pesquisador, que era também o mediador da investigação, desencadearam a seguinte conversa.

Quadro 2: Compreendendo a construção no GeoGebra

Pesquisador: O que podemos dizer sobre essa construção?
Adriele: Que o ponto A da função tem o *"a"* como correspondente no eixo x e o *f(a)* como correspondente no eixo y. O B tem o *"b"* como correspondente no eixo x e o *f(b)* como correspondente no eixo y. E o ponto C tem a coordenada D como correspondente no eixo x e o *"d"* como correspondente no eixo y.
Karen: E que o *"d"* é menor que *f(b)* e maior que *f(a)* e que, então, o *D* está entre *"a"* e *"b"*.
Pesquisador: Certo. O que mais?
Adriele: Temos uma função contínua... Então existe um ponto C [na função] entre A e B, tal que o "d" está entre f(a) e f(b)... E o D está entre "a" e "b".
Karen: Ficou confuso...precisamos melhorar essa frase... Eu nem sei escrever o que a gente falou. Entre *"a"* e *"b"* existe *D*, tal que *f(D)* está entre *f(a)* e *f(b)*. É isso?
Adriele: Óh, dado dois pontos, *"a"* e *"b"*, como isso é uma função contínua, vai existir *f(a)* e *f(b)*. Entre eles sempre vai existir um *"d"* tal que no intervalo *(a,b)* vai existir um *D*, de forma que *f(D) = d*.
Pesquisador: Ok. Calma... Adriele, tente explicar pra Karen o que você disse.
Adriele: Ta... Eu tenho um ponto A e um ponto B da função. Certo?
Karen: Certo.
Adriele: Eu sei que esse ponto A vai estar relacionado com um "a" no domínio e um $f(a)$ na imagem. E o ponto B vai estar relacionado com um "b" no domínio e um $f(b)$ na imagem. Aí, no intervalo $(f(a), f(b))$ vai sempre existir um "d" tal que...
[A aluna para de falar, pensa por alguns momentos e continua]
Adriele: Não! Está errado!
Karen: Ta certo!
Adriele: Não. É no intervalo (a, b). Vai sempre existir um D, tal que $f(D)$ está entre $(f(a), f(b))$.
Pesquisador: E aí, Karen. O que você acha?
Karen: Nossa... Me perdi. Eu estou visualizando assim: Dados dois pontos A e B. Existe o ponto D que está entre A e B, tal que a $f(D)$ tá entre $(f(a), f(b))$. Não é isso?
Pesquisador: E aí, Adriele. Ela falou algo diferente que você?
Adriele: Não. Eu acho que ela falou a mesma coisa...

Fonte: Adaptado de Mazzi (2014).

No trecho acima, percebe-se que as estudantes começaram a matematizar as construções que haviam realizado no GeoGebra, a partir da oralidade. Além da construção em si, a pergunta realizada inicialmente pelo pesquisador contribuiu para que as estudantes estabelecessem contato entre si e que percebessem o objeto matemático, duas ações primordiais em uma tarefa investigativa.

Estabelecimento de contato é uma ação que antecede a investigação. Ela envolve respeito mútuo, responsabilidade e confiança, uma vez que, diferentes perspectivas serão compartilhadas e analisadas durante o processo de investigação (MOURA, 2020). Já a ação de *perceber*, diz respeito ao processo de aproximação de um determinado assunto.

Imediatamente após a pergunta do pesquisador, Karen e Adriele, compartilharam suas primeiras percepções sobre a construção que fizeram no GeoGebra. As estudantes demonstraram confiança em expor suas perspectivas, tornando-as pública por meio de outra ação, caracterizada por Alrø e Skovsmose (2010), como *pensar alto*. Os autores ressaltam a importância desta ação durante uma interação dialógica, a qual possibilita aos participantes do processo investigativo uma compreensão do que está sendo investigado, por meio da reformulação e reconhecimento de ideias.

Reformular é dizer o que já foi dito com outras palavras, dando suporte para que a investigação se mantenha. Já *reconhecer* é examinar as perspectivas já percebidas, buscando por argumentos e justificativas para que as ideias matemáticas sejam compreendidas (MOURA, 2020).

Na interação das estudantes, nota-se que há reformulações de ideias na tentativa de reconhecer o objeto matemático, por exemplo, quando Karen afirma que elas precisam melhorar a frase. Nesse sentido, melhorar a frase seria dizer o que já foi dito em outras palavras, de modo que ela e a colega Adriele, pudessem reconhecer as ideias matemáticas advindas da construção no *software*.

Depois desse reconhecimento de Karen sobre a necessidade de expressar suas ideias com outras palavras, há mais algumas reformulações tanto dela, quanto da colega Adriele, na busca de argumentos que justifiquem a construção realizada.

Essas ações, conhecidas por *atos dialógicos*, sustentaram a investigação e garantiram a cooperação entre os participantes em direção a formulação do enunciado do TVI. O mediador, por meio de questionamentos, direcionou as estudantes durante o processo investigativo, incentivando que outros atos dialógicos fossem colocados em ação. Após pedir as estudantes que organizassem suas ideias e registrassem de forma escrita, ele deu continuidade a investigação, como nos mostra o trecho a seguir.

Quadro 3: Elaborando e testando conjecturas

Pesquisador: A partir do que vocês escreveram... Me expliquem o que está acontecendo.

Adriele: Dados dois pontos na imagem, existe um no meio deles que será a imagem de alguém no domínio.

Karen: Eu coloquei que dados dois elementos do domínio "a" e "b", existe um no meio deles "D" ... Aí a imagem dele estará entre $f(a)$ e $f(b)$.

Adriele: Eu peguei o contrário da Karen!

Pesquisador: Vocês concordam que são coisas diferentes? Elas nos levam ao mesmo lugar? Tanto faz qual você usar?

Adriele: Eu to pensando aqui... Às vezes dá certo porque estamos trabalhando com a função identidade, $f(x) = x$. E se fosse outra função? Será que daria na mesma também? Vou mudar a função aqui!

Pesquisador: Que função não daria certo?

Karen: $f(x) = x^2$.

[Elas fazem a construção para $f(x) = x^2$.]

Pesquisador: E aí, o que vocês podem dizer?

Karen: A construção deu certo também. Acho que dá na mesma nesse caso também...

Adriele: Nesse caso dá certo. Vamos colocar uma x^3.

[Elas fazem a construção para $f(x) = x^3$.]

Karen: Olhando assim, faz sentido o que a Adriele falou.

Adriele: Como a função é contínua, eu posso pegar no domínio que sempre vai existir uma imagem. E vice-versa também.

Pesquisador: A continuidade então justifica isso, então?

Adriele e Karen: Eu acho que sim.

Fonte: Adaptado de Mazzi (2014)

Ao pedir que as estudantes descrevessem as ideias matemáticas reconhecidas, o pesquisador incentivou que elas se posicionassem. *Posicionar-se*, "significa dizer o que se pensa e, ao mesmo tempo, estar receptivo à crítica de suas posições e pressupostos" (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p. 112). Este ato está relacionado com o esclarecimento de dúvidas e/ou argumentos que possam convencer os outros ou não a seguir por tal perspectiva, e tem relação inerente ao ato de pensar alto.

Karen e Adriele se posicionaram usando diferentes perspectivas, uma olhou a partir da imagem e outra a partir do domínio. Com isso, elas foram desafiadas pelo mediador, que questionou a validade dos argumentos apresentados por elas. *Desafiar* é o ato de questionar ideias já estabelecidas. O desafio geralmente acontece por meio de perguntas, que podem abrir espaços para novas possibilidades e até mesmo a revisão de perspectivas já estabelecidas.

Neste caso, as perguntas do pesquisador direcionaram as estudantes a buscarem por outras características que pudessem garantir, ou não, a generalização das suas ideias. E o *software* por sua vez, contribuiu para que novas hipóteses fossem testadas e para que as estudantes avaliassem se ambas perspectivas podiam ser admitidas.

Avaliar é uma ação que acontece de diferentes maneiras em uma investigação. Além da constatação de erros ou validação de hipóteses, ela também está relacionada com a reflexão sobre o processo investigativo, ou com outras coisas relacionadas ao assunto investigado. Neste experimento, a avaliação das estudantes, incluíram uma reflexão relacionada com a forma com que os conceitos teóricos são geralmente ensinados.

Quadro 4: Falta de questionamentos

Adriele: Mas pelo que eu lembro, todo mundo passa a definição pra gente pegando os "carinhas" da imagem.
Pesquisador: Ta. Todo mundo passa. Mas você sabe o porquê disso?
Adriele: Não sei. Eu nunca perguntei.
Pesquisador: Você sempre aceitou?
Adriele: É... A gente pega e aceita... Acata isso.
Karen: Eu me lembro de um teorema de Análise 2 que ele faz isso. O Teorema de *Darboux*.
Pesquisador: Mas por que será que eles [os professores] sempre pegam na imagem? Eles poderiam pegar no domínio também?
Adriele: Não sei. Tem alguma coisa aí... Porque eles nunca falaram porque eles só pegam na imagem e simplesmente pegam.
Pesquisador: Por que vocês acham que isso nunca incomodou vocês?
Adriele: Porque nunca questionaram a gente...
Karen: Ah não, Adriele. Não vem defender só a gente... A gente nunca foi questionada, e a pessoa que ensinou pra gente, a gente também nunca questionou. A gente chegou numa atividade como essa e está sendo questionada pelo Pesquisador e nem ta sabendo responder... Por quê? Por falta de questionamento anterior.
Adriele: É a gente também não perguntou!
Karen: É o que eu estou falando... A gente nunca perguntou pra quem tava ensinando... E a gente estudou pras provas, já passou por Cálculo e Análise I e não ta sabendo... Não nos questionamos pra resolver os exercícios... É uma falha nossa também!

Fonte: Adaptado de Mazzi (2014)

A partir da identificação dos oito atos dialógicos propostos por Alrø e Skovsmose

(2010), compreendemos que as investigações propostas por esse experimento de ensino, foram pautadas na cooperação, em outras palavras, as interações entre os participantes se deram de maneira dialógica. O *software*, bem como os atos dialógicos sustentaram o engajamento das estudantes, que demonstraram outras importantes características presentes em um diálogo: a escuta ativa, o estranhamento e o descentramento.

Por meio da *escuta ativa*, é possível reconhecer a existência do outro a partir de pequenas ações, como o direcionamento do olhar ou uma orientação corporal em direção a pessoa que está se manifestando e assim, perceber as ideias que são compartilhadas.

Faustino (2018), salienta que é responsabilidade de todos os envolvidos na investigação, escutar ativamente o outro, de modo a contribuir para que perspectivas sejam percebidas e conceitos e ideias sejam reconhecidos. No caso desta investigação, por mais que as estudantes tenham se posicionado de maneiras diferentes em relação as ideias matemáticas compreendidas por meio da construção, elas se abriram para ouvir uma a outra.

O fato de as estudantes reconhecerem o objeto matemático sob pontos de vistas diferentes, trouxe o que Milani (2015) chama de *estranhamento*, ação que ocorre quando há uma diferença entre os modos de pensar. O trecho destacado no Quadro 3, mostra este estranhamento causado nas participantes, e o modo como o mediador as conduziram para o *descentramento*, aqui entendido como uma ação relacionada ao interesse de tornar-se sensível ao que o outro diz, procurando entender o que ele fala sob outro ponto de vista (MILANI, 2015).

Após serem desafiadas pelo mediador, Adriele começa a pensar em outros exemplos de funções para testar suas hipóteses. Karen faz esse movimento de descentramento, ao tentar compreender a situação sob a perspectiva levantada pela colega, chegando à mesma conclusão de que a de Adriele, de que a continuidade da função poderia ser uma justificava para ambas visões.

A escuta ativa, o estranhamento e o descentramento na interação entre os participantes, mostram uma relação de respeito mútuo entre os participantes e uma possibilidade para a superação da relação vertical, geralmente existente entre professores e estudantes. O mediador, ao compreender as perspectivas das estudantes, incentivou que elas buscassem pelas respostas e que aprendessem umas com as outras.

Assim como a proposta de Lakatos (1978), em Provas e Refutações, essa atividade partiu da construção e possibilitou as estudantes experienciarem um movimento contrário do realizado nas aulas de matemática. Realizada, nos moldes de Cenário para Investigação com referência a Matemática Pura (ambiente de aprendizagem 2), a atividade envolveu as alunas em uma investigação cooperativa, na qual todos os atos dialógicos foram colocados em ação.

Para Alrø e Skovsmose (2010), a interação dialógica é uma boa forma de comunicação, e boas formas de comunicação são essenciais para garantirem uma boa aprendizagem. Embora as estudantes já tivessem cursado as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática, em que o Teorema do Valor Intermediário foi demonstrado, elas ainda tinham muitas incertezas no que diz respeito as ideias matemáticas exploradas.

O uso do software, bem como a abertura para o diálogo, permitiu as estudantes reorganizarem seus pensamentos e produzirem seus próprios entendimentos sobre as noções investigadas. Nesse tipo de situação, o software possui um papel de atriz[9], junto às estudantes e ao mediador, formando o coletivo estudantes-com-mediador-com-GeoGebra (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Uma característica dos Cenários para Investigação, destacada por Skovsmose (2000) é a possibilidade de crítica e reflexão, que podem surgir tendo em vista o caráter dialógico presente em uma investigação. Ao avaliarem as perspectivas apresentadas e elucidarem, mesmo que indiretamente, o enunciado do TVI, as estudantes também fizeram uma reflexão sobre as aulas de matemática que elas tiveram, a forma como o este conteúdo foi ensinado e uma autocrítica sobre a postura delas de não questionar tais métodos de ensino.

A reflexão trazida pelas estudantes, está relacionada ao que temos chamado neste texto de cultura do silêncio, a qual é frequente nas aulas de matemática, de modo a não permitir que os estudantes vislumbrem a possibilidade de questionamento sobre as metodologias adotadas ou sobre o que dizem os resultados estudados, reforçando um ensino tecnicista da matemática, sem que conexões sobre os termos sejam elaboradas e compreendidas.

Compreendemos que, ao propor um Cenário para a Investigação, o professor sai de sua zona de conforto e caminha em direção a uma zona de risco. Não é possível prever, ao certo, o que será questionado e quais reflexões serão feitas. Nessa situação, o professor está vulnerável, não em um sentido pejorativo, mas sim por talvez não ter suporte para responder todas as perguntas que estudantes possam vir a fazer. No entanto, Penteado e Skovsmose (2008) reconhecem uma zona de risco como espaço de possibilidades para novas aprendizagens. Mesmo que o professor não tenha controle sobre os rumos que a atividade possa tomar, o fato de possibilitar aos estudantes que se engajem ativamente no que foi proposto, contribui para o surgimento de novas descobertas.

Assim, compreendemos que o exemplo apresentado mostra possibilidades para o

[9] Para uma discussão mais ampla sobre o papel do software no desenvolvimento das atividades, ver Mazzi (2014, 2015).

ensino de matemática a nível superior, ressaltando a contribuição da cooperação investigativa para uma aprendizagem matemática efetiva, crítica e reflexiva.

Considerações Finais

Neste artigo, exploramos uma atividade em que duas licenciandas em Matemática investigaram o Teorema do Valor Intermediário com o GeoGebra. O ponto inicial para a investigação foi um roteiro de construção com o software que permitiu que conjeturas acerca das hipóteses do teorema fossem elaboradas e testadas, por meio de uma interação dialógica entre os participantes.

A partir dos excertos apresentados, pudemos identificar os oito atos dialógicos que constituem o Modelo de Cooperação Investigativa, proposto por Alrø e Skovsmose (2010), indicando que as estudantes interagiram dialogicamente e construíram seus próprios modos de aprendizagem. O GeoGebra foi importante na manutenção do diálogo entre as alunas e o pesquisador, assim como ocupou um papel de atriz, junto às estudantes, na produção do conhecimento[10].

Acreditamos que a aula de Matemática, independentemente do nível escolar, deva ser desenvolvida de modo que os estudantes possam produzir seus próprios significados. Assim, como Skovsmose (2000), não desconsideramos a necessidade de ambientes de aprendizagem baseados no paradigma do exercício, no entanto, enfatizamos a necessidade de aulas de matemática que dê espaços para os questionamentos dos estudantes, incentivando-os a serem críticos e reflexivos, as quais são possíveis quando adotada a proposta de Cenários para Investigação.

Possibilitar aos estudantes do Ensino Superior, em especial da licenciatura em Matemática, experienciarem novas formas de aprendizagem, por meio da investigação, é uma forma de romper com o absolutismo burocrático instituído nas disciplinas, e de contribuir para que tal modelo de educação seja transposto para a educação básica.

Por fim, defendemos uma educação em que o aluno seja protagonista de sua aprendizagem. Isso não quer dizer que o professor não é necessário, mas sim que na relação professor-estudante e estudante-professor, ambos aprendem em comunhão (FREIRE, 2013), a partir de uma relação dialógica.

[10] Para uma discussão nessa direção, ver Mazzi (2014).

Agradecimentos:

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

ALRØ, H; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. **Análise matemática no século XIX**. Campinas: Sbhmat, 2013.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Qualitative research for education:** an introduction for theory and methods. Boston: Allyn and Bacon, 1998.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

FAUSTINO, A. C. **Como você chegou a esse resultado?:** o diálogo nas aulas de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/180358. Acesso em: 20 de ago. de 2020.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 54 ed., 2013.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 2004.

LAKATOS, I. **A Lógica do descobrimento matemático:** provas e refutações. Rio de Janeiro, Zahar, 1978.

MAZZI, L. C. **Experimentação-com-geogebra:** revisitando alguns conceitos da análise real. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/123706. Acesso em: 20 de ago. de 2020.

MAZZI, L. C. Convergência de sequências: uma abordagem com o software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 5-17, 2015.

MAZZI, L. C. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio:** um foco nos capítulos de geometria. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/333348. Acesso em: 20 de ago. de 2020.

MILANI, R**. O processo de aprender a dialogar por futuros professores de matemática com seus alunos no estágio supervisionado**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/124074. Acesso em: 20 de ago. de 2020.

MOURA, A. Q. **Educação matemática e crianças surdas:** explorando possibilidades em um cenário para investigação. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/127725. Acesso em: 20 de ago. de 2020.

MOURA, A. Q. **O encontro entre surdos e ouvintes em cenários para investigação:** das incertezas às possibilidades nas aulas de matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2020. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/192015. Acesso em: 20 de ago. de 2020.

MUZINATTI, J. L. **A "verdade" apaziguadora na educação matemática:** como a argumentação de estudantes de classe média pode revelar sua visão acerca da injustiça social. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2020. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/180406. Acesso em: 20 de ago. de 2020.

PENTEADO, M. G.; SKOVSMOSE, O. Riscos trazem possibilidades. *In*: SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo e Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008. (Coleção perspectivas em educação matemática).

ROBERT, A. L'acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'enseignement superieur. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 3, p. 307–341, 1982.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica.** Campinas: Papirus, 2014.

SKOVSMOSE, O. Dialogic teaching and learning in mathematics education. *In*: LERMAN, S. (ed). **Encyclopedia of mathematics education**. Springer, Cham, p.152-153, 2019.

STEFFE, L.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essentials elements. *In*: LESH, R.; KELLY, A. E. (Org.). **Research design in mathematics and science education.** Hillsdale: Erlbaum, p. 267–307, 2000.

Recebido em: 30 de junho de 2020
Aprovado em: 27 de julho de 2020