revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CONCEITOS DE GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO: TRATAMENTOS FIGURAIS MOBILIZADOS POR FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA[1]

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.237-261

Dienifer da Luz Ferner[2]
Maria Arlita da Silveira Soares[3]
Rita de Cássia Pistóia Mariani[4]

Resumo: Este texto tem por objetivo apresentar a análise de como futuros professores de Matemática realizam tratamentos figurais suscitados durante a resolução de atividades envolvendo conceitos de Geometria Espacial de Posição. Para tal, recorreu-se a teoria dos Registros de Representação Semiótica, em particular, a necessidade de mobilizar e coordenar registros figural e da língua natural na atividade cognitiva exigida pela Geometria. Foram consideradas transformações cognitivas (tratamento e conversão) e apreensões de uma figura (sequencial, perceptiva, discursiva e operatória). Optou-se por uma abordagem qualitativa, seguindo pressupostos da Análise de Conteúdo. Percebeu-se que as equipes mobilizaram as apreensões perceptiva, discursiva, sequencial, operatória mereológica e de posição. Sublinha-se que umas receberam maior destaque em relação a outras. Além de, frequentemente, não haver articulação entre elas. A apreensão perceptiva sobressaiu-se em relação as demais por ser mobilizada de forma imediata e automática e, por limitações na mobilização das apreensões operatória e discursiva. As modificações figurais (apreensão operatória) foram pouco evidenciadas nas resoluções das atividades. A desconstrução dimensional foi realizada durante todas as atividades propostas, visto a necessidade de reconhecer as unidades figurais para realizar as ações de argumentar, descrever ou até mesmo a de construir o objeto matemático solicitado. É possível afirmar que o desenvolvimento das atividades contribuiu para uma mudança do modo de ver em Geometria.
Palavras-chave: Visualização. Apreensões de uma figura. Desconstrução Dimensional.

POSITIONAL SPATIAL GEOMETRY CONCEPTS: FIGURE TREATMENTS MOBILIZED BY FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

Abstract: This text aims to present the analysis of how future Mathematics teachers perform figurative treatments raised during the resolution of activities involving concepts of Positional Spatial Geometry. For this, the theory of Registers of Semiotic Representation was used, in particular, the need to mobilize and coordinate figural and natural language registers in the cognitive activity required by Geometry. Cognitive transformations (treatment and conversion) and apprehensions of a figure (sequential, perceptive, discursive and operative) were considered. We opted for a qualitative approach, following the premises of Content Analysis. It was noticed that the teams mobilized the perceptual, discursive, sequential, operative mereological and position apprehensions. It should be noted that some received greater prominence in relation to others. In addition, there is often no

---

[1] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado de uma das autoras (FERNER, 2019).
[2] Mestra em Educação Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Integrante do EMgep - Educação Matemática: grupo de estudos e pesquisas na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: dieniferlferner@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4551-0763
[3] Doutora em Educação nas Ciências pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (Unijuí). Professora na Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Caçapava do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: arlitasoares@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5159-8653
[4] Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP). Professora na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: rcpmariani@yahoo.com.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8202-8351

articulation between them. Perceptual apprehension stood out in relation to the others because it was mobilized immediately and automatically and, due to limitations in the mobilization of operative and discursive apprehensions. The figurative changes (operative apprehension) were little evident in the resolutions of the activities. The dimensional deconstruction was performed during all the proposed activities, given the need to recognize the figurative units to perform the actions of arguing, describing or even building the requested mathematical object. It is possible to affirm that the development of the activities contributed to a change in the way of seeing in Geometry.
Keywords: Visualization. Apprehensions of a figure. Dimensional Deconstruction.

Introdução

A aprendizagem de conceitos geométricos é apontada como importante por pesquisadores (LORENZATO, 1995; ALMOULOUD, 2003; DUVAL, 2004, 2011; TORREGROSA; QUESADA, 2007; CLEMENTE; LLINARES, 2014; SANTOS; OLIVEIRA, 2017) e propostas curriculares (BRASIL, 2002, 2018; SBEM, 2013), pois possibilita aos estudantes o desenvolvimento de um tipo de raciocínio que permite representar, descrever, analisar e compreender o mundo em que vivemos.

Segundo Vale e Pimentel (2017, p. 44), o estudo de conceitos geométricos contribui para o desenvolvimento de "capacidades de visualização, pensamento crítico, intuição, perspectiva, resolução de problemas, conjecturas, raciocínio dedutivo, argumentação e prova". Para tanto, o processo de ensino e aprendizagem deve considerar a construção de ferramentas que permitam compreender problemas do cotidiano, de outras áreas do conhecimento ou da própria matemática. Além disso, destaca-se o importante papel que "o uso das diversas representações matemáticas e das suas inter-relações podem constituir no desenvolvimento do raciocínio geométrico" (SANTOS; OLIVEIRA, 2017, p. 7).

A investigação apresentada, neste texto, é um recorte da dissertação de mestrado da primeira autora e emerge de discussões realizadas no grupo de pesquisa EMgep[5] sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, em particular, de Geometria, bem como de estudos correlatos sistematizados por Pavanello (1993), Muraca (2011), Ritter (2011), Lovis e Franco (2015), Moran (2015) e Novak (2018) que a mais de duas décadas apontam dificuldades na aquisição de conceitos geométricos por professores e estudantes da Educação Básica. Além dos mapeamentos acerca do processo de ensino e aprendizagem de Geometria realizados por Sena e Dorneles (2013) e Sanchez (2018).

Dentre as investigações mencionadas anteriormente, os resultados da pesquisa de Muraca (2011), realizada com professores da Educação Básica, permitem apontar que as definições em Geometria, apresentadas por eles, são restritas. Ao serem questionados sobre a

[5] Educação Matemática: grupo de estudos e pesquisas/UFSM.

determinação de retas paralelas, eles consideraram aspectos da Geometria Plana (GP), isto é, referiam-se apenas a necessidade de não possuir ponto em comum entre as retas. Mas, tratando-se de Geometria Espacial (GE) não ter pontos em comum é uma condição necessária para que retas distintas sejam paralelas. Contudo, não é condição suficiente para que isso ocorra. Dado isso, o pesquisador menciona que essa situação pode estar relacionada a forma como a Geometria vem sendo abordada na formação de professores, geralmente, com ênfase na axiomatização.

Ritter (2011) sinaliza que estudantes do Ensino Médio possuem dificuldades em solucionar atividades que solicitam o cálculo de área e volume, bem como as relações entre os elementos de um sólido (vértices, arestas, faces, apótema, entre outros) quando precisam explorar objetos tridimensionais expostos por meio de representações figurais em perspectiva. Este fato pode estar relacionado com informações tocantes a formação de professores de Matemática, destacadas no mapeamento realizado por Sena e Dorneles (2013). O mapeamento identificou, no período de 1991 a 2011, pesquisas que abordaram conceitos geométricos, tendo como fonte de produção de dados o Banco de Teses e Dissertações da CAPES. As pesquisas acerca da formação de professores de Matemática representaram, aproximadamente, 13% do total mapeado. Além disso, as investigadoras destacaram a carência de conceitos/conteúdos indicados por documentos curriculares (SBEM, 2013) como essenciais na formação docente, o que pode fragilizar o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos futuros professores de Matemática.

Sanchez (2018) investigou pesquisas brasileiras sobre GE, desenvolvidas em programas de pós-graduação *stricto sensu* em Educação Matemática, com um recorte para a região sudeste do Brasil, realizada no período de 2007 a 2017. Os dados confirmam os resultados do mapeamento apresentado por Sena e Dorneles (2013). No entanto, por tratar especificamente a GE, o quantitativo de pesquisas é bem menor que aquelas que tratam da Geometria na formação inicial de professores. Apenas uma, dentre 14 pesquisas mapeadas, teve como campo de investigação estudantes do curso de Licenciatura em Matemática.

É preciso considerar, no processo de ensino e aprendizagem, que a atividade cognitiva solicitada em Geometria, conforme Duval (2004), é mais exigente do que a de outras áreas do conhecimento, porque requer que os tratamentos discursivos e figurais sejam realizados de forma simultânea e interativa. Em outras palavras, exige mobilizar registros figurais para designar figuras geométricas, suas propriedades e relações, e registros da língua natural para enunciar definições, teoremas e conjecturas.

A necessidade de mobilizar e coordenar registros figurais e da língua natural (de uso especializado) demanda a aprendizagem de operações específicas de cada um destes registros, constituindo assim, condições necessárias à aprendizagem de conceitos geométricos (KLUPPEL; BRANDT, 2014). Nesta perspectiva, a capacidade de modificar e reorganizar um registro figural para visualizar a resolução de um problema pode ser desenvolvida e deve ser incentivada na formação do professor de Matemática (JAHN; BONGIOVANNI, 2019).

Conforme Duval (2012), os registros figurais são de extrema importância em problemas de Geometria, pois permitem uma representação mais fácil do problema comparado a representação da língua formal (de uso especializado). No entanto, ao refletir sobre o ensino desse campo, é necessário conseguir fazer outro indivíduo ter a mesma visualização do que se está vendo, ou seja, compreender as mesmas operações figurais (apreensão operatória e desconstrução dimensional) mobilizadas para a solução de dado problema. Por vezes, esta pode ser uma tarefa difícil em Geometria, pois conforme o pesquisador, ao se tratar de figuras, existem três maneiras distintas de ver: a apreensão perceptiva, a apreensão discursiva e a apreensão operatória.

Por esses motivos, entende-se que a discussão acerca da especificidade da atividade cognitiva exigida pela Geometria merece uma atenção especial em cursos de formação de professores de Matemática, principalmente, em relação aos conceitos/conteúdos abordados e às metodologias adotadas, pois os professores, geralmente, incorporam à sua prática abordagens vivenciadas ao aprender matemática durante sua formação inicial. Diante do exposto, este texto tem por objetivo apresentar a análise de como futuros professores de Matemática realizam tratamentos figurais suscitados durante a resolução de atividades envolvendo conceitos de Geometria Espacial de Posição (GEP).

Registros de Representação Semiótica: contribuições para o processo de ensino e aprendizagem de Geometria

Ao se tratar do ensino e aprendizagem de Geometria, Duval (2016, p. 13, tradução nossa) afirma que dentre as áreas do conhecimento que devem ser exploradas pelos estudantes, esta “[...] é a que requer a atividade cognitiva mais completa, pois apela ao gesto, à linguagem e ao olhar”. Nesse sentido, o discurso e o registro figural devem ser abordados de forma harmônica, visto que o primeiro é mobilizado para determinar/descrever propriedades e características de objetos geométricos por meio do registro em língua natural e o segundo está relacionado à visualização das formas destes objetos no espaço.

Na teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS), o termo registro é definido como um "campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios" (DUVAL, 2012, p. 1). As representações semióticas são "[...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento" (DUVAL, 1993, p. 39). Os diferentes sistemas semióticos são utilizados nas ações de comunicação e objetivação, bem como na função de tratamento. Duval (2012) entende que a aquisição dos conhecimentos em Matemática está relacionada à diversidade de registros de representação semiótica.

Nessa perspectiva, o mais significativo, matematicamente, são as possíveis transformações que podem ser realizadas com as diversas representações semióticas que designam os objetos matemáticos. A conversão e o tratamento são as transformações cognitivas realizadas entre representações semióticas. A ação de converter representações possibilita elaborar uma representação pertencente a um tipo de registro diferente do de partida. A transformação de tratamento permite construir uma representação no mesmo registro inicial. (DUVAL, 2011).

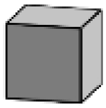
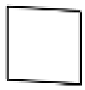
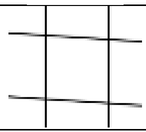
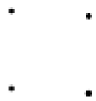
Como já mencionado, os principais registros em Geometria são o da língua natural e o figural. Conforme Duval (2016), a mobilização desses registros é fundamental, tanto quanto os conceitos/conteúdos a serem desenvolvidos, por este motivo, devem ser considerados como um objetivo de ensino em Geometria. Dado que só haverá compreensão dos conceitos/conteúdos se houver a inter-relação entre a visualização e o discurso.

A visualização em Geometria é compreendida, por Duval (2011), como a identificação das unidades figurais, as quais são classificadas como dimensional (3D, 2D, 1D, 0D) e qualitativa (formas retilínea e curva). A identificação dessas unidades constitui o princípio do aprendizado da Geometria. Portanto, "Ver uma figura é reconhecer imediatamente as formas, isto é, os contornos fechados justapostos, superpostos, separados." (DUVAL, 2011, p. 85). Para Duval (2005), aprender a ver em Geometria não é uma ação tão bem sucedida como para objetos concretos, logo, requer um treinamento específico. A maioria dos estudantes possui uma deficiência heurística de interpretação geométrica, isto é, uma incapacidade de ir além do primeiro olhar direcionado a figura. Há duas hipóteses que podem apontar a causa dessa deficiência: a) "Não existe, por exemplo, nenhuma aprendizagem de regras de tratamento próprias do registro das figuras geométricas" (DUVAL, 2009, p. 62); b) "Vai e vem entre visualização e linguagem envolve um salto no número de dimensões para conhecer os objetos matemáticos que são representados dentro de cada registro" (DUVAL, 2005, p. 5, tradução nossa).

Ao optar pelo registro em língua natural é evidente o predomínio das unidades figurais de dimensão 1 e 0 (reta, segmento de reta, ponto) utilizadas para fins de definição e descrição de figuras. Em contrapartida, ao tratar de representações no registro figural, é notório a influência que as unidades figurais com maior dimensão causam. Destaca-se que na visualização de um objeto tridimensional, nem sempre as unidades figurais de três dimensões se sobressaem as demais, pois essa percepção depende da forma que a figura é apresentada, ou seja, geralmente, por meio de uma representação em perspectiva.

O Quadro 1 expõe um esquema, organizado por Duval (2005), para exemplificar as relações dimensionais entre o objeto matemático em sua representação figural e em língua natural, tendo em vista a variação de dimensões[6]. As setas contínuas apresentam a articulação entre as duas representações estabelecidas e as setas pontilhadas representam o que Duval (2005) denominou de "hiato dimensional".

Quadro 1: Contradição cognitiva do conhecimento geométrico

Número de dimensões	Visualização	Discurso
3D / 2D		Um **poliedro**
2D / 2D		Um **polígono** que seja uma face de um poliedro ou figura obtida por um plano de intersecção de outro poliedro.
1D / 2D		**Retas** com relação entre elas (perpendiculares, paralelas, concorrentes, etc.) permitindo distinguir as propriedades do polígono e as retas sendo reduzidas aos **segmentos**.
0D / 2D		**Pontos** que podem ser a interseção de retas ou vértices de um polígono. Os quais não são pontos arbitrários que marcamos em linha reta ou em um plano e que aparecem independentes.

Fonte: Adaptado de Duval (2005, p. 47).

O hiato dimensional é "[...] a ruptura entre o número de dimensões consideradas para identificar uma unidade figural no que é percebido e o número de dimensões consideradas para nomear os objetos e as relações que se identifica" (DUVAL, 2005, p. 45, tradução nossa). Em outras palavras, na conversão da representação figural para a representação em língua natural (RF→RLN) há uma redução no número de dimensões, mas se a conversão for realizada no sentido inverso (RLN→RF) há um aumento no número de dimensões. Para o autor, a articulação entre o discurso e a visualização é um obstáculo particular que qualquer professor enfrenta ao trabalhar com a Geometria, pois esta ação não é tão simples quanto possa parecer em virtude do hiato dimensional. Destaca-se que nas conversões realizadas

[6] O numerador é a dimensão real do objeto e o denominador corresponde a dimensão em que esta representação é produzida.

entre as representações figurais e em língua natural (setas contínuas) é necessária a capacidade de mobilizar a desconstrução dimensional das formas.

A visualização está diretamente relacionada à desconstrução dimensional de uma figura, por este motivo Duval (2005, p. 20, tradução nossa) afirma que, é a ação de "reconhecer as unidades figurativas de menor dimensão que se manifesta a 'maneira matemática de ver' uma figura geométrica". Assim, para que os estudantes sejam capazes de "[...] resolver, sozinho, problemas em geometria e de maneira prática, para reconhecer quando e como aplicar fórmulas para calcular grandezas (distância, área, etc.), é necessário se apropriar desta maneira de ver as figuras." (DUVAL, 2014, p. 34).

Ao tratar das maneiras de ver uma figura geométrica é importante distinguir os significados vinculados às características da ação realizada pelo sujeito diante do registro figural. "Não pode haver ensino de geometria que não leve em consideração as diferentes apreensões às quais uma figura dá lugar" (DUVAL, 2004, p. 164, tradução nossa). Essas apreensões figurais podem ser classificadas em quatro tipos: perceptiva, discursiva, sequencial e operatória.

A apreensão perceptiva é o primeiro reconhecimento e/ou identificação das formas de uma representação geométrica. Ou seja, este tipo de apreensão está associado a maneira comum de ver. A "organização perceptiva de uma figura privilegia o reconhecimento de certas unidades figurais e tende a esconder outras" (DUVAL, 2004, p. 169, tradução nossa), desta forma, pode fornecer "[...] um papel facilitador ou inibidor sobre a compreensão do problema colocado" (DUVAL, 2012, p. 136).

Para relacionar uma figura a uma representação de um dado objeto é fundamental uma indicação verbal. Assim, a apreensão perceptiva está subordinada a apreensão discursiva, pois a representação figural não é identificada, primeiramente, por meio das suas formas, mas a partir de como é enunciada. Sendo assim, a apreensão discursiva trata da interpretação dos elementos úteis (unidades figurais, teoremas, definições) para a resolução da atividade proposta a partir da compreensão do enunciado, hipóteses e representação figural do objeto (DUVAL, 2004). A apreensão sequencial, geralmente, é reconhecida em atividades que propõem a construção e/ou descrição de um objeto matemático. Ela, também, pode ser identificada em outros tipos de problema que não solicitem essas ações de forma direta, mas em que os "[...] passos de uma construção geométrica podem ser evocados em uma situação, servindo de base para outras apreensões da figura, em particular a discursiva" (JAHN; BONGIOVANNI, 2019, p. 248).

Os tratamentos figurais realizados por meio de modificações e/ou reorganizações em uma figura são denominados de apreensão operatória. Esta apreensão tem três tipos de modificações, são elas: ótica, posicional e mereológica (DUVAL, 2012). Quando a modificação realizada se refere apenas ao tamanho da figura geométrica, sem alterar sua orientação ou forma, ela é classificada como ótica. Já a modificação posicional é definida como o deslocamento de uma figura, considerando um referencial, isto é, atividades associadas a ações de translação ou rotação de um objeto. Ao se dividir ou reorganizar uma figura geométrica em outras de mesma dimensão, seja "fisicamente (cortando e remontando as peças obtidas como para um quebra-cabeça), graficamente (adicionando o que chamamos de linhas reorganizadoras acima da figura) ou mesmo simplesmente olhando" (DUVAL, 2005, p. 22, tradução nossa), compreende-se que a apreensão operatória mereológica está sendo mobilizada.

Sublinha-se que não existe uma hierarquia entre as apreensões. Além disso, na resolução de uma atividade envolvendo conceitos geométricos é possível que o estudante mobilize mais de uma apreensão figural, pois elas não ocorrem de forma isolada uma das outras. Assim, compreende-se que o desenvolvimento do pensamento geométrico está associado a conexão entre as apreensões, bem como ao uso da desconstrução dimensional para reconhecer os elementos essenciais de uma figura. Em outras palavras, este pensamento relaciona-se ao ato de construir, descrever, reconhecer e analisar as propriedades de um objeto matemático, assim como operar modificações figurais sobre sua representação a partir de manipulações, transformações e decomposições (DUVAL, 2005, 2011, 2012).

Opções metodológicas

A pesquisa que deu origem a esta produção, de abordagem qualitativa, foi desenvolvida no componente curricular MTM1062 – Educação Matemática II[7], no segundo semestre de 2018, ofertado no curso de Matemática Licenciatura Noturno[8] da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). A escolha desse componente deu-se pela oportunidade de problematizar conceitos/conteúdos, geralmente, abordados no Ensino Médio, dentre eles os de GEP. Além disso, conforme Novak (2018), há poucas pesquisas sobre esses conceitos/conteúdos desenvolvidas na formação inicial de professores de Matemática.

Foram desenvolvidas quatro tarefas compostas por dez atividades, envolvendo

[7] Ofertada para o 7° semestre do curso.

[8] Na instituição que foi desenvolvida a pesquisa, o Curso de Matemática Licenciatura é ofertado em turnos distintos, diurno (totalizado em 8 semestres) e noturno (organizado em 10 semestres). Esse componente curricular é ofertado no 4° semestre 5° semestre, respectivamente.

conceitos de GEP, com a participação de sete acadêmicos[9], durante sete horas-aulas, em um total de três encontros. A pesquisadora propôs aos participantes, os quais, de modo a não expô-los, foram denominados como A1, A2, B1, B2, C1, C2 e C3, que se organizassem em duas duplas e um trio, cuja formação ocorreu por meio da relação interpessoal e de forma espontânea, tendo em vista que estes no decorrer das aulas do componente curricular de Educação Matemática II tinham o hábito de realizar as atividades em conjunto. Assim, estabeleceram-se três equipes que foram denominadas como A (A1 e A2), B (B1 e B2) e C (C1, C2 e C3).

Este texto apresenta quatro das dez atividades desenvolvidas, as quais foram exploradas durante dois encontros. No primeiro encontro foram realizadas três atividades e no segundo (C1 não estava presente) a atividade quatro foi explorada. As atividades foram disponibilizadas aos participantes no início de cada encontro de forma impressa e, também, expostas com o auxílio de um projetor multimídia para que, após a realização das atividades, discussões sobre as resoluções estabelecidas pelos acadêmicos fossem feitas.

Considerando que esta pesquisa trata de assuntos de GEP, é necessário ressaltar que todos os discentes envolvidos já haviam cursado o componente curricular de GP[10] e apenas dois (B2 e C3), até o momento da intervenção, não haviam cursado o componente curricular de GE[11]. Quanto a organização e análise dos dados, a investigação segue pressupostos da Análise de Conteúdo. Para Bardin (2011, p. 48), esta é um conjunto de procedimentos de "análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores [...] que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção [...] destas mensagens".

O desenvolvimento dessa técnica consiste em três etapas: *pré-análise*, *exploração do material* e *tratamento dos resultados e interpretações*. A *pré-análise* é basicamente a organização da pesquisa. Nesta etapa foi definido o objetivo, os colaboradores, a organização das atividades com base na fundamentação teórica produzida, não necessariamente nesta ordem, bem como as categorias de análise, a saber: transformações cognitivas (tratamento e conversão) e apreensões de uma figura (sequencial, perceptiva, discursiva e operatória).

A *exploração do material* baseia-se na produção de dados para então analisá-los. A produção dos dados foi realizada a partir dos protocolos de registros dos estudantes para que, posteriormente, fossem analisados, segundo pressupostos teóricos dos RRS. A última etapa,

[9] A intervenção foi realizada com o consentimento dos discentes (CAAE: 89496118.1.0000.5346).
[10] Ofertado no 4° semestre.
[11] Ofertado no 5° semestre.

tratamento dos resultados e interpretações, consiste em tratar os dados obtidos de modo a tornarem-se significativos e válidos, assim os dados produzidos foram analisados, evidenciando interpretações a respeito do objetivo desta pesquisa. Importante ressaltar que estas etapas serão detalhadas nas próximas seções.

As atividades desenvolvidas

Conforme Duval (2011, p. 92), “para aprender a ver, os alunos devem aprender a trabalhar sem recorrer primeiro aos aspectos métricos”. Assim, as atividades propostas (Quadro 2) buscam contribuir com o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico com base na teoria dos RRS.

Quadro 2: Atividades desenvolvidas

1) *Configurações de figuras com canudos*: Utilize uma linha e 12 canudos de mesmo tamanho para construir a quantidade de quadrados indicada abaixo. A seguir, esboce as construções no espaço indicado:

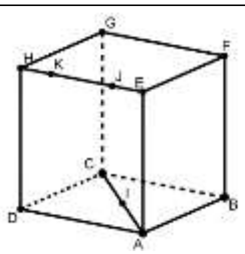
TRÊS	QUATRO	CINCO

1-a) Pode-se afirmar que é possível construir mais de cinco quadrados com o mesmo material. Quantos quadrados você consegue construir? Justifique sua resposta.

2) Complete as descrições a partir da análise de um cubo e enumere em ordem decrescente de prioridade (1 mais importante e 4 menos importante) os itens que você considera relevante.
(   ) Um cubo tem ____ vértices, ____ arestas e ____ faces.
(   ) Nesse cubo, ____ arestas incidem em cada vértice e ____ faces incidem em cada vértice.
(   ) Cada aresta é paralela a ____ arestas, intercepta ____ arestas e é reversa com outras ____ arestas.
(   ) Cada face é paralela a ____ de suas faces e intercepta o plano de outras ____ faces.

3) Desenhe um cubo, utilizando uma malha quadriculada, nomeie os vértices e descreva-o em relação aos planos que o compõem.

4) Observe na figura abaixo os pontos de A a K nos vértices, arestas e faces do cubo. Verifique se os pontos indicados em cada item são colineares e/ou coplanares. Esboce uma representação figural e uma justificativa de acordo com o(s) item(s) que você marcou, identificando intersecções, caso necessário.



1- a) A e G
( ) colineares   ( ) coplanares
1- b) G, F e I
( ) colineares   ( ) coplanares
1- c) H, D, I e C
( ) colineares   ( ) coplanares

Fonte: Adaptado de Pohl (2011, p. 186-188).

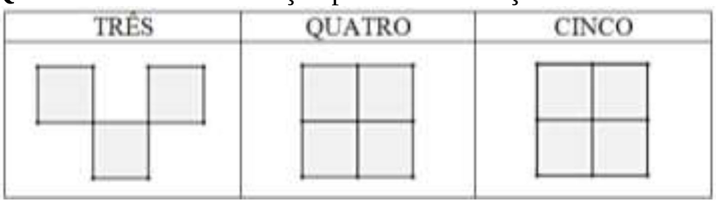
Essas atividades têm por objetivo explorar a visualização em Geometria investigando os conhecimentos dos licenciandos quanto a troca de dimensões, as características de um sólido específico, posições relativas entre elementos (retas e planos) e a compreensão de colinearidade e coplanaridade de pontos a partir do objeto matemático cubo.

Análise e discussão dos resultados

Nesta seção, são analisados e discutidos os dados (produções matemáticas anotadas nos protocolos de registro dos acadêmicos) produzidos a partir do desenvolvimento das atividades expostas no Quadro 2. Destaca-se que, essas produções são semióticas (DUVAL, 2011), por isso as análises não estão exclusivamente associadas aos conceitos/conteúdos abordados, mas enfatizam a pluralidade de representações semióticas mobilizadas e articuladas para um mesmo objeto, o que permite apontar facilidades e dificuldades na atividade cognitiva exigida pelas situações propostas.

Para iniciar a atividade 1 foram distribuídos materiais manipuláveis (12 canudos e fios) necessários à resolução. Sublinha-se que não foi mencionado o conceito/conteúdo a ser explorado, bem como não houve comentários de que as construções deveriam se manter em um mesmo plano. O Quadro 3 apresenta as construções esperadas para a realização da primeira parte da atividade. Na primeira e segunda construções os lados dos quadrados estão sendo formados pela mesma unidade de medida, mas para visualizar cinco quadrados construídos com os canudos é indispensável mudar o modo de ver. Nesta nova composição, manteve-se a construção anterior e considerou-se o quadrado que possui como unidade de medida dois canudos. Logo, a organização de cinco quadrados por meio de 12 canudos é formada por um quadrado de unidade dois que está subdividido em quatro quadrados que possuem como unidade de medida apenas um canudo.

Quadro 3: Possível solução para as construções da atividade 1

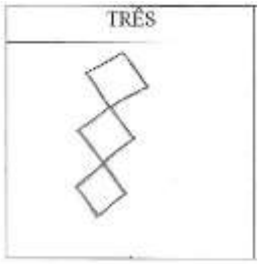
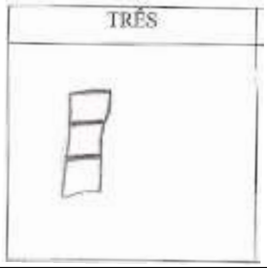
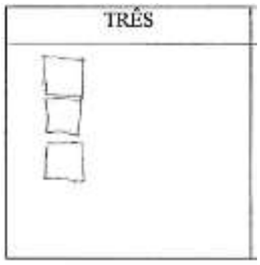


Fonte: Organizado pelas autoras.

Destaca-se que as construções realizadas pelos participantes (Quadro 4), para a organização de três quadrados, não foram iguais a idealizada para a resolução da questão. Ao observar a figura apresentada pela Equipe B e tentar reproduzi-la, utilizando o material, seriam necessários, apenas, dez canudos, já a representação da Equipe C demarca o uso de todos canudos disponibilizados para a construção, mas não há pontos comuns.

Analisando a resolução dos acadêmicos (Quadro 4) percebe-se dificuldades, de alguns deles, em realizar uma representação figural a partir de materiais manipuláveis (registro material). A coordenação simultânea do discurso (enunciado) com o registro material e deste com o figural, sugerida por Duval (2012), não ocorreu da forma esperada.

Quadro 4: Resolução das equipes para atividade 1

Equipe A	Equipe B	Equipe C
		

Fonte: Dados da pesquisa.

Para organização de quatro e cinco quadrados, salienta-se que todos os participantes chegaram a mesma representação material e figural, esperada pela pesquisadora. No entanto, a Equipe A não conseguiu perceber que poderiam ser considerados cinco quadrados na construção realizada para quatro, desde que a medida do lado fosse alterada. Desta forma, pode-se destacar a forte influência da apreensão perceptiva nas resoluções. Duval (2003, p. 45, tradução nossa) menciona o quão difícil "[...] se não quase impossível, ver algo diferente do que identificamos à primeira vista em um desenho", confirmando o quanto a primeira percepção de algo nos limita ao reconhecimento de outras possibilidades.

Cabe apontar que, nessa atividade, ocorreu a transformação cognitiva de conversão, a qual parte da representação em língua natural para a figural, contando com o auxílio do material manipulável (registro material), visto que exigia uma organização com os canudos para então efetuar as construções estabelecidas. Além disso, mesmo se tratando da construção de uma representação figural (apreensão sequencial), houve a mobilização da desconstrução dimensional, dada a necessidade de reconhecimento e organização de unidades figurais 1D e 2D.

O item *1-a* afirmava a possibilidade da construção de mais de cinco quadrados, utilizando todo o material fornecido e questionava sobre a quantidade de quadrados que o participante conseguiria construir com os 12 canudos. Um dos integrantes da Equipe A identificou de imediato o que poderia ser construído e comentou com seu colega: "Só fazer um cubo!". As Equipes B e C buscaram diferentes maneiras de reorganizar os canudos. Depois de diferentes tentativas de construção em um mesmo plano, a pesquisadora realizou uma intervenção, informando que não era necessário ficar restrito ao plano, o que possibilitou a construção de um cubo. O reconhecimento imediato de partes que compõem o objeto fez com que a Equipe A por meio da apreensão perceptiva identificasse a possibilidade de construir o cubo. "Essa apreensão relativa à percepção é geralmente feita por tratamentos cognitivos automáticos da imagem pelo cérebro e, por isso, os reconhecimentos imediatos dos formatos das figuras, ou de partes que as compõem, são relativamente estáveis" (JAHN; BONGIOVANNI, 2019, p. 246). Esse reconhecimento imediato a partir de partes que compõem o objeto não ocorreu com as Equipes B e C.

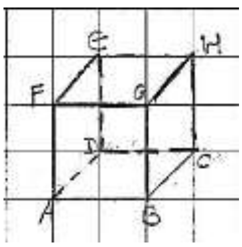
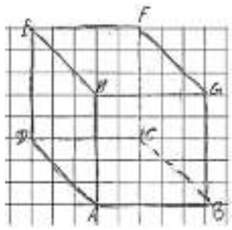
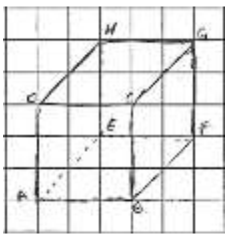
As justificativas apresentadas para essa atividade foram: "Fazendo um cubo podemos ter 6 quadrados" (Excerto Equipe B) e "06, com a construção de um cubo" (Excerto Equipe C). Ambas respostas, assim como a exposta pela Equipe A ("Conseguimos construir com 6. Um cubo possui 6 faces e todas as faces são quadrados"), mostram limites no tratamento discursivo, pois nenhuma equipe mencionou propriedades do objeto tridimensional. Esse resultado indica que a mobilização, somente, da apreensão perceptiva não contribui para a elaboração de justificativas (argumentações) em Geometria, é preciso articulá-la as apreensões discursiva e operatória. Conforme Torregrosa e Quesada (2007, p. 286, tradução nossa), "à medida que a apreensão operatória e a discursiva se desenvolvem, a ação subjacente à apreensão perceptiva se torna mais atenuada, como um mero elo entre elas". Desse ponto de vista, a apreensão perceptiva e a desconstrução dimensional são consideradas iniciais para o aprendizado da geometria.

A atividade 2 demandava entendimentos sobre número de vértices, arestas, faces, posições relativas de arestas e faces, isto é, elementos que compõem um sólido. Destacando-se, a compreensão de retas reversas, uma das questões centrais na transição da GP para a GE. Para sua resolução os acadêmicos realizaram tratamentos discursivos (registro da língua natural) tendo o auxílio do registro material (cubo, construído na atividade *1-a*). Durante essa resolução surgiram alguns questionamentos, principalmente, acerca de retas reversas. A Equipe A revelou a pesquisadora que não lembrava a definição de retas/arestas reversas, o que confirma os resultados de Muraca (2011) sobre dificuldades de estudantes e professores na classificação das posições de retas no espaço. Já, a Equipe B, em uma discussão interna, comentou que retas/arestas ortogonais são diferentes de retas/arestas reversas e no cubo haveriam apenas arestas ortogonais. Talvez a expressão "arestas ortogonais", mencionada pela Equipe B, esteja associada a retas perpendiculares. Após discussões e manipulação do registro material a definição de arestas ortogonais foi (re)significada, ou seja, compreendida que no cubo todas as retas que contém as arestas são ortogonais, sendo que algumas dessas arestas ortogonais são reversas e outras não, pois pertencem ao mesmo plano, caso das retas perpendiculares.

Assim, para resolução dessa atividade foi necessário mobilizar e articular as apreensões perceptiva e discursiva, em especial, para compreender quais arestas do cubo contêm retas reversas. Ressalta-se que, mesmo a atividade solicitando sua resolução como um complemento numérico de uma representação em língua natural, os acadêmicos apoiaram-se no registro material para solucioná-la, principalmente, pela possibilidade de rotacionar o registro material. Em outras palavras, apoiaram-se no registro material pela possibilidade de mobilizar a apreensão operatória de posição e articulá-la com outras apreensões, em particular, na determinação de retas reversas.

Os registros figurais e descrições realizadas pelos acadêmicos, solicitados na atividade 3, são apresentados no Quadro 5.

Quadro 5: Resolução das equipes para a atividade 3

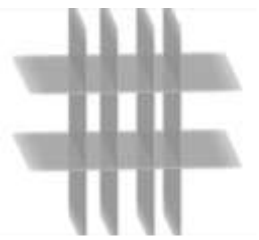
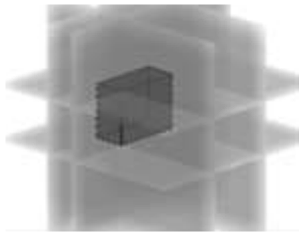
Participantes	Representação figural	Descrição
Equipe A		Nomenclatura: α: plano a partir do ponto H e da reta $\overleftrightarrow{FG}$ β: plano a partir do ponto H e da reta $\overleftrightarrow{BC}$ γ: plano a partir do ponto H e da reta $\overleftrightarrow{DC}$ ϕ: plano a partir do ponto F e da reta $\overleftrightarrow{AD}$ δ: plano a partir do ponto F e da reta $\overleftrightarrow{AB}$ θ: plano a partir do ponto A e da reta $\overleftrightarrow{DC}$ O plano α é perpendicular aos planos β, γ, ϕ e δ. Esses, por sua vez são perpendiculares ao plano θ.
Equipe B		O plano ABCD é paralelo ao plano EFGH, assim como, o plano EHAD é paralelo ao FGCB e o AMGB // EFCD.
Equipe C		O cubo é formado por 6 planos onde (ABCD // EFGH) $\perp$ (BFGC; CDHG; ADHE; ABFC).

Fonte: Dados da pesquisa.

Na tarefa de elaborar o registro figural do cubo, constata-se que os acadêmicos foram guiados pela apreensão perceptiva, pois basearam-se em constatações gerais, provavelmente, elaboradas a partir da interiorização da figura exposta em livros didáticos. Contudo, para descrever um objeto matemático (expor informações que permitam compreender de que objeto se trata ou até mesmo reproduzi-lo) não se pode ficar limitado à apreensão perceptiva. Para realizar essa ação é preciso mobilizar a apreensão sequencial e articulá-la, em especial, com a discursiva, bem como realizar a desconstrução dimensional, que conforme Duval (2011, p. 93) “[...] se faz contra a percepção, isto é, contra o reconhecimento imediato de unidades figurais 2D ou 3D que se impõem à primeira vista e que bloqueiam o reconhecimento de outras unidades figurais”. Isso porque, de forma geral, “não se pode dizer que uma propriedade matemática “é vista” em uma figura” (JAHN; BOMGIOVANNI, 2019, p. 246).

O Quadro 6 apresenta a representação figural construída a partir das descrições elaboradas pelos acadêmicos (Quadro 5).

Quadro 6: Representação figural das descrições do cubo organizadas pelas equipes

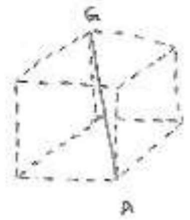
Equipe A	**Equipe B**	**Equipe C**
		

Fonte: Dados da pesquisa.

As construções expostas no Quadro 6 indicam que a Equipe A informou que haviam dois planos distintos, perpendiculares a outros quatro planos, mas não mencionou as posições relativas entre os planos β, γ, ϕ e δ (Quadro 5), possibilitando, por exemplo, que estes fossem paralelos entre si, não determinando um cubo. A Equipe B, ao contrário da Equipe A, mencionou apenas os planos paralelos e não as situações de perpendicularidade, assim essa descrição pode ser interpretada como uma sequência de planos paralelos. Já, a Equipe C utilizou uma forma de escrita não usual em Matemática, mas citou as situações de perpendicularidade e paralelismo existentes entre os planos. No entanto, não mencionou a distância entre os elementos, possibilitando que este seja um paralelepípedo qualquer e não, especificamente, um cubo. Dessa forma, verifica-se que a articulação entre as apreensões sequencial e discursiva, necessária para descrever o cubo em relação aos planos, bem como a desconstrução dimensional não foram realizadas pelos acadêmicos de forma satisfatória.

No segundo encontro, durante a realização da atividade 4, foi possível perceber uma maior troca de informações entre os membros das equipes e o envolvimento em busca da resolução. No decorrer da atividade, além dos registros solicitados, figural e língua natural (de uso especializado), os acadêmicos realizaram gestos com as mãos para representar posições de retas e planos (indícios da mobilização da apreensão operatória de posição) e “rabiscaram” sobre a representação figural fornecida (indícios da mobilização da apreensão operatória mereológica). Destaca-se que, neste momento, não foram disponibilizados o registro material e a malha quadriculada. O Quadro 7 expõe os esboços e justificativas para o item *4-a*.

Quadro 7: Resolução das equipes para o item 4-a

Participantes	Representação figural	Justificativa
Equipe A		*(**X**) colineares ( ) coplanares* A e G são colineares, pois por A e G passa um segmento.
Equipe B		*(**X**) colineares (**X**) coplanares* Por dois pontos distintos sempre passa uma reta, reta essa que está contida no plano que passa por ACG.
Equipe C		*(**X**) colineares (**X**) coplanares* A e G estão no mesmo plano

Fonte: Dados da pesquisa.

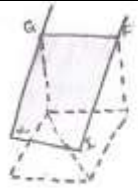
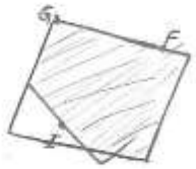
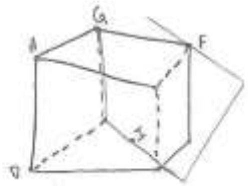
A Equipe A, a respeito da colinearidade dos pontos indicados, justificou apenas que estes são colineares pelo motivo de pertencerem a um mesmo segmento. A afirmação feita está correta, mas não mencionou nenhum postulado. A coplanaridade de dois pontos não foi reconhecida, nem justificada pelos participantes. Quanto à representação figural, a representação em perspectiva do cubo prioriza segmentos pontilhados, somente segmento $\overline{AG}$ é expresso de forma continua. A representação em perspectiva do cubo segue a exposta no enunciado, indicando que a apreensão perceptiva se sobrepôs as demais. Talvez essa não alteração de perspectiva (o que exigiria a mobilização da apreensão sequencial) tenha prejudicado a visualização do plano mais evidente que contém, no caso da representação realizada, o segmento $\overline{AG}$, ou seja, o plano ACG, que divide o cubo em dois prismas congruentes.

A Equipe B foi a que mais se aproximou da linguagem formal e generalizada ao justificar a colinearidade dos pontos, o que revela que a apreensão discursiva foi mobilizada. Ao explicar a coplanaridade, os estudantes afirmaram haver um único plano que contém os dois pontos, apresentando apenas o plano ACG. Assim, pode-se cogitar que a dupla não reconhece a infinidade de planos em que uma única reta está contida e a apreensão discursiva é mobilizada de forma restrita, ou seja, a explicitação das propriedades da figura fica limitada a casos particulares. A representação figural buscou evidenciar o plano ACG, no entanto, este foi limitado pelos segmentos $\overline{GC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AG}$, indicando que a apreensão sequencial foi mobilizada, contudo, não há articulação com a discursiva.

A Equipe C não realizou uma justificativa para o fato de os pontos A e G serem colineares e apenas afirmou que estes pertencem a um mesmo plano sem esclarecer o porquê deste fato. Esse resultado revela que a articulação entre a apreensão discursiva e a operatória precisa ser aprimorada, pois essa articulação permite elaborar melhores argumentações, conforme Duval (2004), aproximando-se do que é exigido numa demonstração. Quanto à representação figural, esta evidencia o plano ACG, porém, apenas os pontos A e G foram nomeados. O fato de ter dois segmentos pontilhados e dois com traços contínuos chamou atenção, podendo, talvez, ser explicado pelo registro figural exposto no enunciado, no qual $\overline{GC}$ e $\overline{CA}$ estão pontilhados e $\overline{AE}$ de forma contínua, como $\overline{EG}$ faz parte da face superior do cubo, este também foi esboçado de forma contínua na representação da equipe. Assim como nas representações elaboradas pelas outras equipes, percebe-se que a apreensão sequencial foi mobilizada, mas falta articulação com a discursiva.

No item *1-b*, os participantes afirmaram que os três pontos estabelecidos são coplanares (Quadro 8), no entanto, para o fato da não colinearidade, nenhum dos grupos apresentou argumento. A Equipe A, como no item anterior, elaborou sua justificativa de forma singular, isto é, apenas para os pontos determinados, afirmando que é possível traçar um plano que contenha a reta GF e o ponto I, sem buscar respaldo no teorema que comprova a constatação. Quanto à representação figural (Quadro 8), esta apresenta o segmento de reta $\overline{GF}$ e o ponto I no plano denominado α (alfa). Repara-se que, assim como a representação figural no item *4-a* desses acadêmicos, os segmentos contínuos, plano α, são os que fazem referência com o que se quer evidenciar, e os segmentos pontilhados são utilizados para os elementos que complementam a figura, revelando que a apreensão perceptiva se sobressai a sequencial.

Quadro 8: Resolução das equipes para o item 4-b

Participantes	Representação figural	Justificativa
Equipe A		*( ) colineares (**X**) coplanares* São coplanares pois conseguimos traçar um plano passando pela reta que contém G e F e o ponto I.
Equipe B		*( ) colineares (**X**) coplanares* Pois passa um plano por GFI.
Equipe C		*( ) colineares (**X**) coplanares* Por definição três pontos quaisquer determinam um plano.

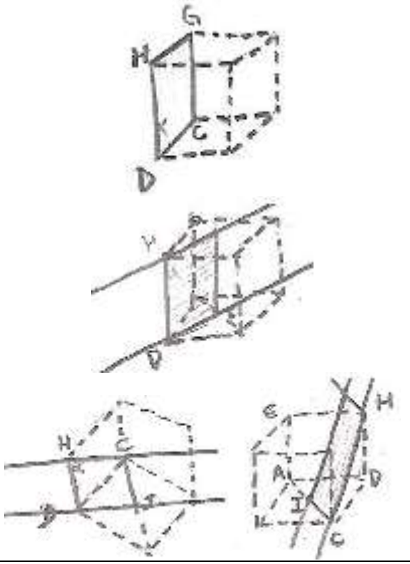
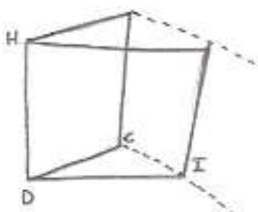
Fonte: Dados da pesquisa.

A Equipe a B apenas afirmou que existe um plano formado pelos pontos G, F e I. Esta certeza pode ter sido provocada pelo conhecimento do postulado que justifica o fato. Porém, o discurso leva a entender que passa um único plano por GFI, logo, há um equívoco na nomenclatura utilizada para citar os pontos, pois estes deveriam ser separados por vírgulas. A representação figural utilizada para expor o plano GFI está confusa, no que tange a posição dos pontos e segmentos demarcados. Pois, buscando compreender a representação como uma seção do cubo que passa pelos pontos G, F e I, o ponto G está como um vértice e o ponto F não, assim como também não se compreende qual é o segmento que o ponto I pertence. Percebeu-se que essa equipe procurou manter o segmento $\overline{GF}$ com a mesma angulação da representação do cubo em relação à borda da folha de registros, mas mesmo recorrendo a este artifício, verificou-se a dificuldade em representar o plano que contém uma das arestas do cubo e um ponto pertencente ao centro de uma das faces não formada pela aresta em questão. Nessa representação figural a apreensão sequencial é mobilizada, mas falta, novamente, para melhor caracterizar o objeto, relacioná-lo às propriedades utilizadas na construção (apreensão discursiva).

A Equipe C realizou sua justificativa por meio de um postulado, também utilizado pela Equipe B. No entanto, na escrita apresentada pelos acadêmicos, faltou apenas mencionar a não colinearidade desses pontos. Neste caso, a representação figural elaborada expõe um cubo na mesma perspectiva utilizada na figura apresentada no enunciado. Os acadêmicos organizaram o cubo com arestas contínuas e pontilhadas, mas o fato inesperado é que as arestas pontilhadas não indicam que estas pertencem a parte detrás do cubo. Desta forma, causando incompreensão sobre o porquê de diferenciá-las em termos de traçado. Também, salienta-se que o plano exposto não é o que contém os pontos G, F e I, mas o plano formado pelos pontos F, I, C e A. Pode-se afirmar que os equívocos apresentados na representação figural podem ter sido influenciados pela mobilização apenas da apreensão perceptiva.

Em relação ao item *4-c*, as justificativas e representações figurais elaboradas pelos acadêmicos são apontadas no Quadro 9.

Quadro 9: Resolução das equipes para o item 4-c

Participantes	Representação figural	Justificativa
Equipe A		*( ) colineares ( ) coplanares* É possível ter os seguintes planos: plano formado pela face $DHGC$; plano formado pela reta que contém HD e o ponto I; plano formado pela reta que contém CI e o ponto D; plano formado pela reta CI e o ponto H.
Equipe B		*( ) colineares ( ) coplanares* Não existe um plano que contém os pontos $HDIC$. No caso, a intersecção da reta que passa por DH com a reta que passa por IC é vazia. Não dá pra fazer um plano pois $\overline{HD} \cap \overline{CA} = \emptyset$
Equipe C		*(**X**) colineares ( ) coplanares* H, D, C estão no mesmo plano ou H, D, I estão no mesmo plano.

Fonte: Dados da pesquisa.

A Equipe A na busca por justificar a não coplanaridade dos pontos citados, mencionou as diferentes combinações de três elementos, dentre os pontos H, D, I e C, que formam um plano. Foram quatro representações figurais apresentadas por eles, uma para cada plano citado. Três delas foram expostas na mesma perspectiva do cubo evidenciado no enunciado da atividade demarcando os pontos e planos requeridos, o que revela que as respostas dessa equipe, na atividade 4, foram elaboradas com ênfase na apreensão perceptiva. Porém, o que chamou mais atenção foi a representação figural elaborada para exemplificar o plano que contém os pontos C, I e H. A equipe mencionou que "virou o cubo" para facilitar a visualização do plano, isto é, rotacionou o cubo por um ângulo de 180º tendo como eixo de rotação a aresta $\overline{AE}$, por exemplo. Essa ação evidencia a mobilização da apreensão operatória de posição. Sublinha-se que mesmo a dupla A expressando e representando de forma figural os possíveis planos a serem gerados com a combinação de três dos quatro diferentes pontos não explica o fato dos pontos H, D, I e C não gerarem um plano. Esses resultados comprovam que a resolução de problemas de Geometria exige mais que a mobilização de apreensões, ou seja, requer a articulação entre elas e a desconstrução dimensional.

Para justificar a não existência de um plano que contenha os pontos H, D, I e C, a Equipe B baseou-se no seguinte teorema: por duas retas concorrentes passa um único plano. Os participantes afirmaram: "Não dá pra fazer um plano pois $\overline{HD} \cap \overline{CA} = \emptyset$" (Excerto Equipe B). No entanto, o teorema não garante este resultado, apenas assegura que se há interseção entre as retas, então estas são coplanares. Pois, há a possibilidade de duas retas serem paralelas e formar um plano, ou seja, não há interseções entre as retas, mas estas são coplanares[12]. Este equívoco na interpretação do teorema, na tentativa de justificar o questionamento, aponta fragilidades na mobilização da apreensão discursiva. Quanto à representação figural, os participantes da Equipe B traçaram os segmentos $\overline{HB}$ e $\overline{CA}$, mas não esboçaram uma representação para o cubo, não mobilizaram a apreensão sequencial. A partir da representação apresentada não há como verificar se estes segmentos não se interceptam, pois se prolongarmos cada um deles encontraremos um ponto de interseção. Não há informações de que esses elementos pertencem a planos distintos. Logo, é necessária a realização da representação do cubo para que se possa identificar que as retas que contêm os segmentos mencionados são reversas, isto é, estão localizadas em planos distintos e não possuem ponto em comum.

A Equipe C afirmou que os pontos H, D, I e C são colineares, mas não justificou sua conclusão. Os participantes, também, não manifestaram que os pontos são coplanares, fato que deveria ser confirmado quando reconheceram que os pontos estariam em uma mesma reta. Quanto à justificativa da não coplanaridade, assim como a Equipe A, a Equipe C apenas mencionou a existência de planos formados por três dos quatro pontos citados no item *4-c*. Na representação figural, os planos HDC e HDI estão destacados, mas observa-se que os pontos

[12] "Duas retas do espaço chamam-se paralelas quando não possuem ponto em comum, mas estão contidas em um mesmo plano. Quando duas retas do espaço não estão contidas no mesmo plano (o que necessariamente implica em que elas não possuam ponto comum) elas são chamadas de retas reversas."

citados não fazem parte de uma mesma reta como constataram os licenciandos. Assim, a justificativa apresentada e a representação figural construída não explicam o fato de os pontos H, D, I e C não pertencerem a um mesmo plano ou a uma mesma reta. Novamente, observa-se problemas na articulação das apreensões.

As dificuldades apresentadas para elaborar a representação figural podem ser interpretadas por limitações na articulação da apreensão sequencial com as demais, em especial, com a discursiva. Em outros termos, a dedução dos passos para a construção da representação figural (apreensão sequencial) deveria ter sido regida pela teoria axiomática (apreensão discursiva). Em relação as dificuldades na elaboração de justificativas, estas podem estar relacionadas a falta de articulação entre as apreensões discursiva e operatória mereológica (por exemplo, as modificações na figura não contribuíram para identificar mais de um plano). Diante desses resultados, concorda-se com Jahn e Bongiovanni (2019, p. 246) que “existe, assim, um hiato entre ver uma figura no sentido de sua percepção espontânea e a maneira matemática de olhar para ela”, pois a maneira matemática de olhar requer articulação simultânea entre registro figural e discurso por meio da mobilização e articulação de apreensões e desconstrução dimensional.

Ponderações finais

Dada a importância do campo da Geometria nos diferentes níveis de ensino, tendo em vista que este proporciona o desenvolvimento do pensamento geométrico que está diretamente relacionado as capacidades de visualizar, abstrair, generalizar, entre outros, é incontestável a necessidade de voltar a atenção para a formação dos docentes de Matemática. É essencial que estes sujeitos tenham em sua formação a oportunidade de discutir, não somente questões relacionadas ao conhecimento matemático, mas, também, análises voltadas à atividade cognitiva exigida em Geometria.

Percebeu-se que as equipes mobilizaram as apreensões perceptiva, discursiva, sequencial, operatória mereológica e de posição. Sublinha-se que umas receberam maior destaque em relação a outras. Além de, frequentemente, não haver articulação entre elas. A apreensão perceptiva sobressaiu-se em relação as demais por ser mobilizada de forma imediata e automática e, por limitações na mobilização das apreensões operatória e discursiva.

Devido ao fato de os questionamentos serem voltados, em sua maioria, a justificativas na representação em língua natural (de uso especializado) e para isto havia a necessidade de mobilizar propriedades dos objetos matemáticos e resultados da Geometria, a apreensão discursiva foi, também, significativamente mobilizada. No entanto, é importante apontar que os participantes, ao recorrerem a resultados da GEP para argumentar os questionamentos realizados, em alguns momentos, apresentaram equívocos ao utilizá-los.

Em conformidade com Duval (2005, p. 30, tradução nossa) de que “A geometria requer o uso de um vocabulário técnico relativamente pesado”, constatou-se que os participantes encontraram dificuldades, em alguns momentos, ao explorar a representação em língua natural de uso especializado. Ao descrever um objeto solicitado (apreensão sequencial) ou elaborar uma justificativa, por exemplo, os acadêmicos, na maior parte das vezes, realizaram de forma sucinta, carecendo de argumentação. O que gera apenas parte das resoluções, não suprindo todas as condições necessárias e suficientes para argumentar sobre a situação.

Duval (2004, p. 11) menciona que, são as modificações figurais que “[...] promovem operações específicas e constituem a produtividade heurística das figuras”. No entanto, essas modificações (apreensão operatória) foram pouco evidenciadas nas resoluções das atividades. Destacando-se a apreensão operatória de posição. Quanto a desconstrução dimensional, esta foi realizada durante todas as atividades propostas, visto a necessidade de reconhecer as unidades figurais para realizar ações de argumentar, descrever ou até mesmo de construir o objeto matemático solicitado.

A partir dos resultados apresentados é possível afirmar que o desenvolvimento das atividades mobilizou os acadêmicos para a importância da articulação entre o registro figural e o discurso na resolução de problemas de Geometria. Para isso, as atividades devem incentivar a mobilização da apreensão operatória, em seus diferentes casos, pois a apreensão discursiva, associada à dedução, e a apreensão sequencial, associada à construção, são insuficientes para que os estudantes tenham bom desempenho na resolução de problemas geométricos (JAHN; BONGIOVANNI, 2019).

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

ALMOULOUD, S. A. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. *In*: MACHADO, S. D, A. **Aprendizagem em matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas, Papirus, p. 125-148, 2003.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Ed. 70, 2011.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília: MEC/ 2018.

______. **PCN+ Ensino Médio -** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciência da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

CLEMENTE, F.; LLINARES, S. Relación entre el conocimiento de geometría y el "truncamiento" del razonamiento configural. *In*: GONZÁLEZ, M. T. et al. (Org.). **Investigación en Educación Matemática XVIII**, Salamanca: Editora SEIEM, p. 247-256, 2014.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**. Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118/22382. Acesso em: 15 de mar. 2020.

_______. Décrire, visualiser ou raisonner : quels "apprentissages premiers" de l'activité mathématique ? **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strabourg: IREM-ULP, v. 08, p. 13-62, 2003.

_______. Las Condiciones Cognitivas del Aprendizaje de la Geometría: desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. *In*: DUVAL, R.; SAÉNZ-LUDLOW, A. **Comprensión y aprendizaje en matemáticas:** perspectivas semióticas seleccionadas. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, p. 13-60, 2016.

_______. Les conditions cognitives de l‟apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strabourg: IREM-ULP, v. 10, p. 5 - 53, 2005.

______. Rupturas e Omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em Geometria. *In*: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Org.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática**. Ijuí: Editora Unijuí, p. 15-38, 2014.

_______. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_______. **Semiosis y Pensamiento Humano**. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels: Santiago de Calai, Colômbia: 2004.

_______. **Ver e ensinar matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. Org.: Tânia M. M. Campos. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

_______. Registres de représentation sémiotique et fonctionnements cognitif dela pensée.

Annales de didactique et Sciences Cognitives, Strasbourg: IREM-ULP, v.5, p. 37-65, 1993.

JAHN, A. P.; BONGIOVANNI, V. Apreensão Operatória de Figuras em Situações Geométricas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 12, n. 3, p. 245-257, 2019. Disponível em: https://revista.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/7584. Acesso em 16 de mar. 2020.

KLUPPEL, G. T.; BRANDT, C. F. Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval. *In*: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Org.). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Editora Unijuí, p. 113-134, 2014.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, ano III, n. 4, p. 3–13, 1995.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. As concepções de geometrias não euclidianas de um grupo de professores de matemática da educação básica. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 369-388, 2015. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/bolema/v29n51/1980-4415-bolema-29-51-0369.pdf > Acesso em 22 de abr. 2019.

MORAN, M. **As Apreensões em Geometria**: um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

MURACA, F. S. **Educação Continuada do professor de Matemática**: um contexto de problematização desenvolvido por meio de atividades exploratório–investigativas envolvendo Geometria Espacial de Posição. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

NOVAK, F. I. L. **O ambiente Dinâmico GeoGebra para o desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em Geometria segundo Raymond Duval:** olhares, apreensões e desconstrução dimensional. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2018.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

POHL, V. Visualizando o espaço tridimensional pela construção de poliedros. *In*: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2011.

RITTER, A. M. **A visualização no Ensino Médio de Geometria Espacial**: Possibilidade com o Software Calques 3D. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegrete, 2011.

SANCHEZ, J. B. dos. **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre Geometria Espacial:** período 2007 a 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

SANTOS, L.; OLIVEIRA, H. O ensino e a aprendizagem da geometria: perspectivas curriculares. *In*: Encontro de Investigação em Educação Matemática, Lisboa, 2017. **Livro de Atas do EIEM**, Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, p. 3-8, 2017.

SENA, R. M; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da pesquisa (1991-2011). **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**, Florianópolis, v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA-SBEM. **A formação do professor de matemática no curso de licenciatura**: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Boletim SBEM, n. 21, fevereiro, p. 1-42, 2013.

TORREGROSA, G.; QUESADA, H. Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 10, n. 2, p. 275-300, 2007.

VALE, I.; PIMENTEL, T. O ensino e aprendizagem da geometria. *In*: Encontro de Investigação em Educação Matemática, Lisboa, 2017. **Livro de Atas do EIEM**, Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, p. 43-48, 2017.

Recebido em: 30 de junho de 2020
Aprovado em: 05 de agosto de 2020