

A TECNOLOGIA DIGITAL EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR PARA OS RECURSOS SEMIÓTICOS

DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.262-284>

Tânia Camila Kochmansky Goulart¹
Lourdes Maria Werle de Almeida²

Resumo: No presente artigo investigamos como a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Com esta finalidade levamos em consideração um quadro teórico que considera as possibilidades de produção, articulação e uso de recursos semióticos bem como a associação da tecnologia ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Consideramos também uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática são desenvolvidas por alunos de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de um curso de Ciência da Computação. Os dados foram coletados por meio de gravações em áudio, vídeo e tela do computador com a utilização do software OBS, além das observações de diário de campo realizadas pela professora no decorrer das aulas. A pesquisa é qualitativa e as análises de cunho interpretativo nos levam a caracterizar categorias relativas ao modo como a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática: a tecnologia como meio de visualização; a tecnologia como auxiliar na construção de modelos matemáticos; a tecnologia como o contexto de origem do problema; a tecnologia como articuladora de recursos semióticos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Recursos Semióticos. Tecnologia Digital.

DIGITAL TECHNOLOGY IN MATHEMATICAL MODELING ACTIVITIES: A LOOK AT SEMIOTIC RESOURCES

Abstract: In this article we investigate how digital technology favors the activation and use of semiotic resources that collaborate for the development of mathematical modeling activities. For this purpose, we take into account a theoretical framework that considers the possibilities of production, articulation and use of semiotic resources as well as the association of technology with the development of mathematical modeling activities. We also consider an empirical research in which mathematical modeling activities are developed by students from a Differential and Integral Calculus discipline of a Computer Science course. The data were collected through audio, video and computer screen recordings using the OBS software, in addition to the field diary observations made by the teacher during the classes. The research is qualitative and the interpretative analysis leads us to characterize categories related to the way digital technology favors the activation and use of semiotic resources in the development of mathematical modeling activities: technology as a means of visualization; technology as an aid in the construction of mathematical models; technology as the context in which the problem originated; technology as an articulator of semiotic resources.

Keywords: Mathematical Education. Mathematical Modeling. Semiotic Resources. Digital Technology.

Introdução

A Modelagem Matemática na Educação Matemática caracteriza-se, em termos gerais,

¹Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina – UEL – E-mail: maya.tcamila@gmail.com – ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2318-4944>

² Doutora em Engenharia de Produção. Universidade Estadual de Londrina – UEL. E-mail: lourdes@uel.br – ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8952-1176>

pela possibilidade de proporcionar a abordagem de situações da realidade por meio da matemática. A esta abordagem vem sendo associadas as ferramentas digitais, ampliando as possibilidades de ação dos alunos e professores modeladores e gerando repercussões nos modos de ensinar e de aprender na sala de aula.

DeJarnette (2019) argumenta que o uso de tecnologias vem permitindo que conceitos e procedimentos matemáticos sejam mobilizados pelos alunos. Neste sentido, a autonomia relativa ao uso de imagens, gráficos, tabelas, *software*, códigos bem como os diferentes modos de relação entre eles tem sido enfatizados no ensino de matemática como uma maneira de os alunos construírem conexões entre conceitos e procedimentos.

Arzarello (2006) argumenta que no contexto da sala de aula conjugam-se recursos linguísticos e extralinguísticos valendo-se da oralidade, da escrita e de ferramentas da tecnologia digital, como é o caso de imagens e gráficos, por exemplo. Segundo Mavers (2004), estes recursos são os chamados recursos semióticos.

No âmbito da modelagem matemática, particularmente, o acesso e a manipulação de diferentes tipos de recursos podem favorecer o entendimento de uma situação da realidade por meio da matemática (BLUM, 2015; SRIRAMAN; KAISER; BLOMHØJ; GEIGER, 2011; ALMEIDA, 2018). Por outro lado, o uso de tecnologias digitais em atividades de modelagem também tem sido tema de interesse em muitas pesquisas da área como é o caso, por exemplo, de Malheiros (2014), Dalla Vecchia (2012), Borssoi e Almeida (2015), Greefrath, Hertleif, Siller (2018) e Greefrath (2011).

No presente artigo estamos interessados em investigar como a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Com esta finalidade, a partir de um quadro teórico que considera elementos relativos aos recursos semióticos bem como ao uso da tecnologia digital em atividades desse tipo analisamos atividades de modelagem desenvolvidas por alunos de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Ciência da Computação.

Modelagem matemática na sala de aula e a tecnologia digital

Segundo Almeida e Brito (2005) a modelagem matemática na sala de aula possibilita associar à matemática escolar questões extramatemáticas. De modo geral, ela se configura como uma atividade, em que, inicialmente, a partir de uma situação da realidade, os modeladores (alunos ou professor), determinam uma situação passível de abordagem ou

interpretação matemática. Stillman *et al.* (2015) referem-se a esta situação como situação idealizada. A partir dessa situação ações como a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a construção de um modelo matemático, a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação do modelo, identificando a sua aceitabilidade ou não, passam a constituir o que se precisa fazer no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática (ALMEIDA, 2018; BLUM, 2015; ALMEIDA; FERRUZZI, 2009).

A estas ações pode se associar o uso de tecnologias digitais. Este uso da tecnologia em atividades de modelagem tem sido temática recorrente, considerando possibilidades e contribuições que esse uso pode proporcionar para a modelagem matemática na sala de aula (GREEFRATH; HERTLEIF; SILLER, 2018; BORSSOI; ALMEIDA, 2015; FREJD; ARLEBÄCK, 2017; BROWN, 2015; GEIGER, 2011; MALHEIROS, 2004, DALLA VECCHIA, 2012; BORSSOI, 2013, entre outros). As representações dinâmicas viabilizadas pela tecnologia ampliam e aprimoram as representações matemáticas que se estendem para além das formas estáticas e impressas dos registros escritos no papel.

Borssoi e Almeida (2015) apontam que

[...] oferecer um ambiente que dispõe de recursos da tecnologia bem como propor atividades que provoquem os alunos a lançar mão da tecnologia, pode promover a motivação ao uso. As atividades de modelagem, em especial, parecem provocar os alunos a buscar tais recursos (BORSSOI; ALMEIDA, 2015, p. 44).

As contribuições da tecnologia ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática também se referem às possibilidades de investigação, simulação e sistematização de resultados. Segundo Geiger (2011) e Frejd e Arlebäck (2017), estas possibilidades representam avanços nos envolvimento dos alunos com a situação que querem estudar, bem como proporcionam o uso de recursos como imagens, tabelas e gráficos, por exemplo, na matematização dessa situação.

Dalla Vecchia (2012), ao associar atividades de modelagem com o uso de alguns *software*, argumenta que modelar uma situação se torna um processo dinâmico e pedagógico em que modelos matemáticos são construídos e avaliados na interpretação de uma situação não matemática.

À dinâmica do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática vem sendo associados esquemas, chamados em geral de ciclos de modelagem. Greefrath, Hertleif e Siller (2018) vislumbram incluir o uso de tecnologias digitais neste ciclo. Particularmente, os

autores se referem a diferentes funções da tecnologia no desenvolvimento de atividades de modelagem e caracterizam especificamente seis funções da tecnologia. Investigação: pode favorecer a análise de dados e busca de informações sobre o problema real; experimentação: ação que pode transformar, com a ajuda de *software* ou planilhas eletrônicas, a situação real em um modelo geométrico, por exemplo, ou associar aos dados da situação em estudo aplicativos conhecidos pelos modeladores; visualização: viabiliza, ora evidenciar aspectos que ainda não tinham sido notados, ora analisar e averiguar os resultados obtidos; simulação: auxilia na exploração dos modelos matemáticos, proporcionando analisar a relevância de diferentes parâmetros dos modelos; realização de cálculos: a realização de cálculos apoiada pelo uso da tecnologia permite agilizar e dar maior eficiência à determinação de valores usando modelos matemáticos; controle: viabiliza exercer algum controle sobre o modelo matemático construído, como, por exemplo, na determinação de parâmetros e sua influência sobre aspectos numéricos e geométricos do modelo. A Figura 1 ilustra a identificação das funções da tecnologia no ciclo de modelagem matemática.

Figura 1: Ciclo de Modelagem Matemática incluindo o uso de tecnologias digitais



Fonte: Adaptado de Greefrath, Hertleif e Siller (2018, p. 234).

As funções da tecnologia apontadas por Greefrath, Hertleif e Siller (2018) em atividades de modelagem matemática sugerem que a tecnologia pode ativar diferentes procedimentos no desenvolvimento dessas atividades. No presente artigo dirigimos nosso olhar à tecnologia em atividades de modelagem à luz da compreensão de recursos semióticos.

Tecnologia digital e recursos semióticos

A semiótica é a ciência dos signos e para Santaella (2012) o ponto central de uma abordagem semiótica remete às possibilidades dos diferentes modos e processos sógnicos e sua

função comunicativa.

Para Steinbring (2006), no âmbito das aulas de matemática,

[...] os signos não têm significado próprio, mas esse deve ser produzido pelo aluno por meio de mediações e para contextos de referência específicos. Essa mediação não é subjetiva e arbitrária e a relação com os objetos de referência é também determinada por condições epistemológicas (STEINBRING, 2006, p. 157).

A identificação de relações entre objetos e contextos em matemática está fortemente relacionada ao uso de recursos que proporcionam o pensamento visual e analítico (HACIOMEROGLU; ASPINWALL; PRESMEG, 2010). O aprender matemática, neste contexto, envolve uma rede de representações e o entendimento é mediado por conexões entre procedimentos e conceitos matemáticos.

Neste sentido, é preciso considerar também signos menos convencionais, mas que fazem parte do processo de comunicação que acontece na sala de aula. No contexto da produção e manipulação destes signos emerge a ideia de recursos semióticos (ARZARELLO, 2006; MAVERS, 2004; O'HALLORAN; BEEZER; FARMER, 2018).

A noção de recursos semióticos remete à identificação de diferentes recursos escolhidos pelos sujeitos, voluntaria ou involuntariamente, na construção e uso de signos de naturezas diversas. Mavers (2004) entende que os recursos semióticos envolvem ações e artefatos³ que os sujeitos usam para fins comunicativos. Segundo o autor, os sujeitos combinam o uso de recursos linguísticos e extralinguísticos de modo que gestos, olhares, registros escritos, *software*, expressões matemáticas e imagens gráficas, entre outros, constituem recursos semióticos.

A tecnologia digital pode ser considerada como uma possibilidade de ativar e de produzir recursos semióticos diversos. Neste sentido, para Nöth (2001), não há dúvidas de que máquinas processam signos e assim, o computador é certamente uma máquina que opera com signos. A experiência do usuário com a máquina e a sua capacidade de utilizá-la para executar operações lógicas, ler e articular signos está alocada na relação do usuário, que no caso da sala de aula é o aluno, com a interface da máquina ou do *software*. A possibilidade de investigar os dados em uma tabela, por exemplo, pode estar associada à ação de experimentar com diferentes expressões algébricas, gráficas ou geométricas para além daquelas que registros convencionais podem produzir.

³ Segundo o dicionário de filosofia Abbagnano (2007) trata-se de um objeto produzido por qualquer atividade humana. Para ser considerado artefato, o objeto deve manifestar a intenção, preexistente à sua construção, de utilizá-lo com finalidade determinada.

Neste sentido, as interações com a tecnologia digital fazem dela um mediador semiótico na busca da compreensão do objeto matemático e na organização da construção do conhecimento. Yoon, Thomas e Dreyfus (2009) apontam que as múltiplas representações são entidades passivas e é o engajamento ativo do aluno que as transforma em recursos semióticos. Nesse mesmo sentido Brown (2015) pondera que o uso de imagens geradas por tecnologia constitui uma tática de visualização relevante e atribui ao uso da tecnologia na sala de aula um papel transformador.

No âmbito da modelagem matemática, Frejd e Arlebäck (2017, p. 526) argumentam que os recentes avanços da tecnologia e o aumento do acesso dos alunos às ferramentas digitais “mudaram as possibilidades de realizar simulações uma vez que uma diversidade de informações podem ser consideradas reais”.

No presente artigo, particularmente, interessa-nos investigar como a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Aspectos metodológicos e dados da pesquisa

A nossa investigação associa ao quadro teórico uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas por 34 alunos de um curso de Ciência da Computação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral ministrada por uma das autoras desse artigo no decorrer do primeiro semestre do ano de 2019.

Para o escopo deste artigo consideramos duas dessas atividades. Os alunos desenvolviam as atividades em grupos. A exploração do material obtido com a coleta de dados conduziu à delimitação de dois grupos de alunos, sendo um em cada atividade, considerando as especificidades das atividades que desenvolveram e a qualidade dos dados coletados. Foram selecionados o grupo 1 (G1) com seis alunos (G1A1 a G1A6), e o grupo 4 (G4) com quatro alunos (G4A1 a G4A4). A escolha desta nomeação se deu de maneira aleatória, garantindo o sigilo na identificação dos alunos.

Os dados foram coletados por meio de gravações em áudio, vídeo e tela do computador com a utilização do *software* OBS⁴ que permitiu registrar simultaneamente as falas e as capturas de telas dos alunos, além das observações de diário de campo realizadas pela professora no decorrer das aulas. Todos os materiais e relatórios foram postados pelos

⁴ *Open Broadcaster Software*: permite a gravação de tela e áudio simultaneamente.

grupos na plataforma *Google Classroom*⁵, adotado pela professora como ferramenta de ensino e pesquisa.

A pesquisa tem características de pesquisa qualitativa, conforme caracterizado por Bogdan e Biklen (1994). O processo analítico considera uma análise interpretativa dos dados à luz do quadro teórico. Dessa análise decorre a estruturação de categorias relativas ao uso da tecnologia digital nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos. Nessas categorias configuram-se os indícios de como a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

As atividades de modelagem matemática

Para as atividades de modelagem os temas de interesse foram escolhidos pelos próprios alunos. Um dos grupos, referido aqui como G1, escolheu a temática Lei de Moore, referindo-se ao título de sua atividade como *Validando a Lei de Moore*. O outro grupo, G4, se interessou pelo tema A Bomba do Jogo *Bombberman*, referindo-se a um jogo eletrônico de estratégias. As atividades foram desenvolvidas no decorrer de seis aulas e a professora atuou nestas aulas como colaboradora, assessorando e orientando os alunos sempre que solicitada, bem como para validar as produções dos alunos.

Atividade 1: Validando a Lei de Moore

No final da década de 50 a indústria de eletrônicos sofreu uma revolução: a substituição de válvulas a vácuo, em geral grandes, por transistores, que começaram a ficar cada vez menores (MOORE, 1998).

Publicada pela primeira vez na *Electronics Magazine* 1965 pelo físico Gordon Moore, a chamada Lei de Moore ditou o ritmo na evolução da indústria de *chips* para computadores. A lei dita que o número de transistores de um processador dobra a cada ano e meio, mantendo o espaço ocupado. Ou seja, significa que a capacidade de um processador tem um aumento de 100% a cada 18 meses. Essa afirmação ficou conhecida como *Lei de Moore* e sua testagem foi iniciada em 1971 considerando 2300 transistores (MOORE, 1975).

O tema desta atividade foi proposto pelos alunos do grupo G1 que justificaram a sua

⁵ Aplicativo da *Google Apps*[®] que se configura como um recurso voltado para as práticas de Educação. A instituição possui parceria com a *Google for Education*[®] onde os alunos possuem livre acesso às ferramentas disponíveis na plataforma.

escolha pelo fato de não haver um consenso no ramo tecnológico em relação à validade da Lei de Moore uma vez que, segundo Theis e Wong (2017), a validade da lei tem sido discutida por especialistas da área nos últimos anos. Além disso, a motivação dos alunos também atende aos seus interesses pessoais, considerando que as especificidades do curso de Ciência da Computação incluem o desenvolvimento de microprocessadores.

Os alunos iniciaram o desenvolvimento da atividade motivados pelo questionamento: *A Lei de Moore ainda é válida?* – de modo que o problema era responder a essa pergunta. Deveriam, portanto, coletar dados relativos ao número de transistores existentes até hoje e observar os dados em comparação com a previsão estabelecida pela Lei de Moore.

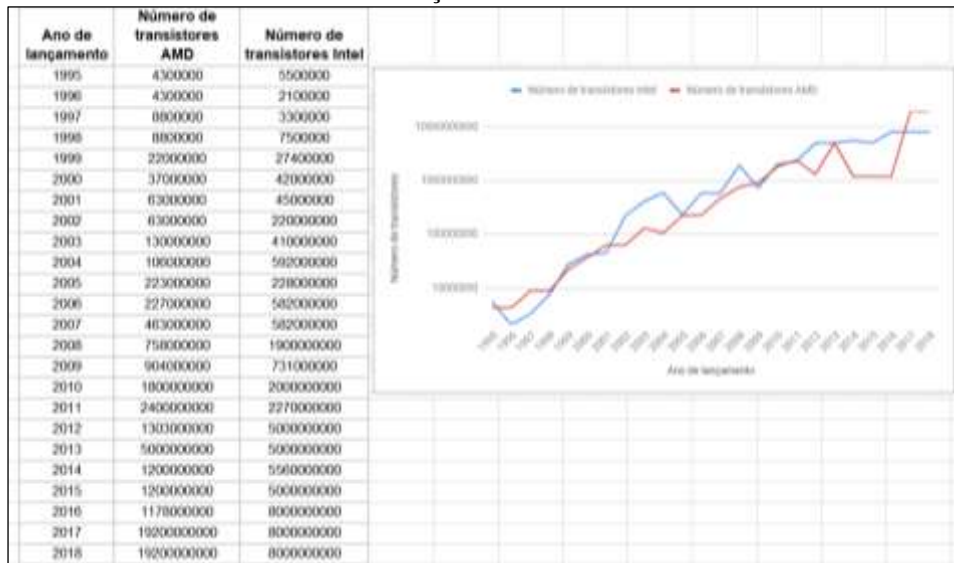
Durante a busca por informações da situação, feita em *sites* e artigos encontrados na internet, o grupo optou por analisar apenas os chips de *desktop* (computadores de mesa) das empresas AMD (*Advanced Micro Devices*) e Intel (*Integrated Electronics*), justificando serem estas as principais do setor e que lideram o mercado de CPU (Unidade Central de Processamento).

Os alunos, já familiarizados com a linguagem específica da área de computação, usaram dois contadores de transistores, *Tech power up* e *Cpu-collection*, que estão disponíveis em *sites* na internet e apresentam em sua plataforma informações sobre os processadores, permitindo obter o ano e o lançamento de cada transistor. O uso de dois contadores para a coleta dos dados foi justificado pelo grupo: “*o Tech power up só apresenta os dados a partir do ano 2000 e nós queremos de antes também*” – relatório escrito do grupo G1.

O uso e a manipulação destes contadores permitiu ao grupo fazer algumas escolhas, como por exemplo, definir o período como sendo a partir do ano de 1995, pois somente após esse ano havia uma frequência anual de lançamentos, provocando uma primeira simplificação da situação-problema.

Com os dados coletados e organizados em uma tabela com o ano de lançamento e o número de transistores de cada fabricante (AMD e Intel), os alunos do grupo encontraram duas curvas usando um *software* de planilhas (Figura 2).

Figura 2: Tabela e curva com o ano de lançamento e o número de transistores de cada empresa



Fonte: Dados da pesquisa -arquivos digitais do grupo G1

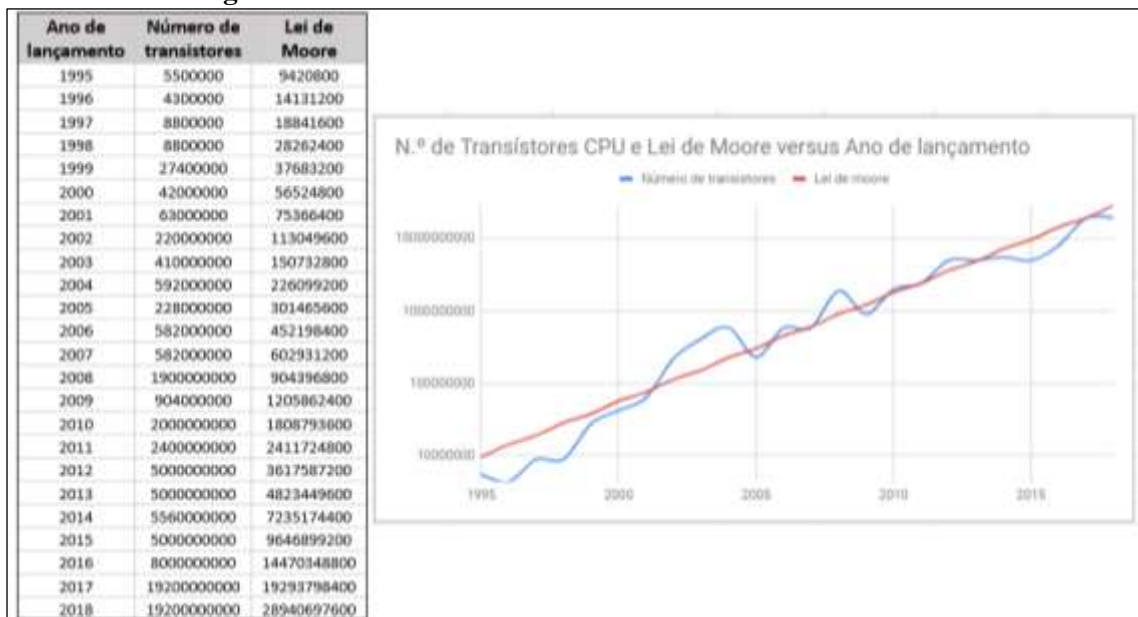
A partir da observação dos valores da tabela e do gráfico apresentado, um dos alunos do grupo fez observações e compartilhou como os colegas: *“as duas empresas crescem na mesma taxa! Dá pra gente ver que elas evoluem juntas”* (fala do aluno G1A2 captada da gravação de áudio).

Diante dessa ação, o aluno G1A2 propôs para o grupo que escolhessem uma empresa por ano – a que tivesse o maior número de transistores, conforme sugere a transcrição de áudio:

G1A2: *Escolhemos apenas um lançamento por ano, não importando a empresa. Isso facilitou a visualização da curva gerada e, na verdade, é isso que faz a lei, considera apenas maior quantidade de transistores daquele ano.*

O grupo construiu então uma nova tabela considerando o ano e o número de transistores naquele ano. Além disso, os alunos inseriram uma coluna na tabela que apresentasse o comportamento da Lei de Moore naquele ano. Para isso, usaram a informação: o número de transistores dobra a cada ano e meio, iniciando em 1971 com 2300 transistores. E, com o auxílio de um *software* de planilhas, os alunos plotaram um novo gráfico com os dados dessa tabela (Figura 3).

Figura 3: Número de transistores em cada ano e a Lei de Moore



Fonte: Dados da pesquisa - Captura de tela do grupo – G1

A partir da observação do gráfico o aluno G1A2 deu a seguinte sugestão: “*E se a gente comparar a taxa de crescimento das curvas usando a derivada da função?*” (transcrição de gravação de áudio)– este era um conteúdo que os alunos haviam estudado anteriormente na disciplina⁶.

Motivados por essa fala, os alunos estavam em busca de uma representação algébrica destas curvas. Os alunos optaram por colocar os dados da tabela (Figura 3) no *software CurveExpert*⁷, encontrando por meio da ferramenta *Data Tool* uma expressão algébrica para cada curva: y_1 , número de transistores em relação ao ano x ; y_2 , número de transistores previstos pela Lei de Moore em relação ao ano x , conforme sugere a Figura 4.

Figura 4: Modelo matemático de cada curva

Número de transistores (CPU)	$y_1 = \frac{6\ 234\ 038\ 749\ 290}{1 + \left(\frac{x}{2\ 033}\right)^{-713}}$
Lei de Moore (CPU)	$y_2 = \frac{6\ 788\ 424\ 102\ 463}{1 + \left(\frac{x}{2\ 037}\right)^{-636}}$

Fonte: Dados da pesquisa – Relatório dos alunos

De posse dos modelos matemáticos de cada curva, os alunos buscaram outros dois

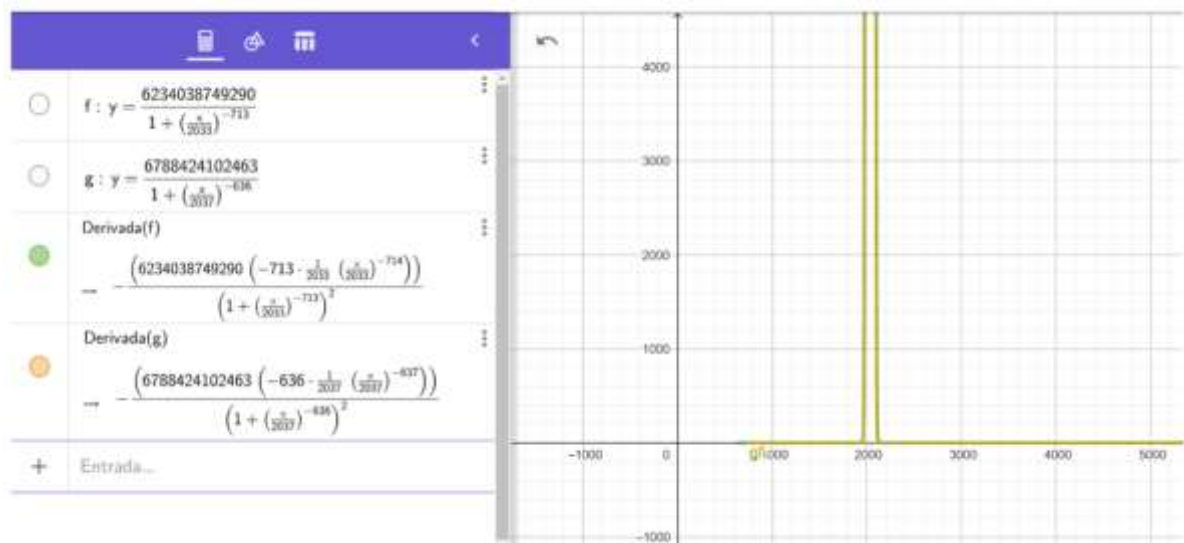
⁶ Definição usada pela professora: análise do comportamento de funções exponenciais que crescem muito rápido: estudo da notação *ozinho* e *ozão*, para análise no comportamento de *softwares*. Ver Thomas, Weir e Hass (2012)

⁷ *Software* utilizado no ajuste de curvas e análise de dados. Disponível em: www.curveexpert.net.

software - *Symbolab* e *Wolfram Alpha* – classificados na literatura como CAS⁸. Os alunos estavam em busca da taxa de variação das funções (modelos matemáticos). Porém, a escolha destes *software*, segundo o relato do grupo, não foi adequada para investigar o que pretendiam.

Optaram então pelo *software* de DGS⁹ – GeoGebra – pois segundo o aluno G1A1 eles poderiam *ver o gráfico da derivada dos dois modelos e comparar a sua taxa de variação* – (transcrição da gravação de áudio). O gráfico das funções está na Figura 5.

Figura 5: Gráfico da derivada dos modelos matemáticos



Fonte: Dados da pesquisa – arquivo digital do grupo G1

Ao observarem os gráficos das derivadas das duas funções, os alunos confirmaram o que pretendiam investigar: “o gráfico confirma que as curvas crescem de modo similar e reafirma a proximidade dos valores, considerando tanto os dados obtidos como os dados calculados usando a lei de Moore” (relatório escrito do grupo G1). O grupo concluiu então que a “a Lei de Moore ainda é válida no intervalo de tempo analisado” (relatório escrito do grupo G1).

Atividade 2: A Bomba do Jogo Bomberman

Este tema foi escolhido pelos alunos do grupo G4 que, a partir do uso do jogo Bomberman se interessaram em trazer para a aula de cálculo o estudo relativo à potência da bomba do jogo Bomberman bem como em relação ao efeito de explosão, caso essa bomba

⁸ Sigla para *Computer Algebraic System*: *software* que apoia o cálculo matemático na matemática simbólica.

⁹ Sigla para *Dynamic Geometry System* ou *Software* de Geometria Dinâmica.

existisse na realidade. A escolha do tema foi justificada pelos alunos considerando a participação de um deles em um projeto que envolve a construção de jogos educativos na instituição. A Figura 6 apresenta informações do jogo apresentadas no relatório do grupo relativo à atividade.

Figura 6: Informações relativas ao tema do grupo G4

O *Bomberman* é o nome de um jogo virtual publicado pela Hudson Soft Company – empresa japonesa de entretenimento eletrônico. O cenário é uma fábrica de bombas, onde o personagem – um robô que recebe o nome do jogo – carrega uma bomba. Esta bomba explode depois de um tempo, criando uma cruz de fogo, que se torna mais potente conforme o jogador coleta *Power ups* (SOFT, 1983)

Fonte: Dados da pesquisa - Relatório escrito do grupo G4.

Durante interação com os dados em relação à situação-problema, os alunos fizeram considerações sobre a bomba do jogo e uma bomba realística, conforme sugere o diálogo:

G4A1: *a gente não sabe o que tem dentro (da bomba), não sabe como funciona [...] mas primeiro a gente tem que descobrir o tamanho da bomba, porque o tamanho da bomba determina o quão forte ela é.*

G4A2: *No artigo que eu li sobre modelos de munição, dizia que é uma bola preta com um pavio branco saindo de sua extremidade superior...que é exatamente a bomba do jogo! (apontando para a imagem da bomba no jogo)*

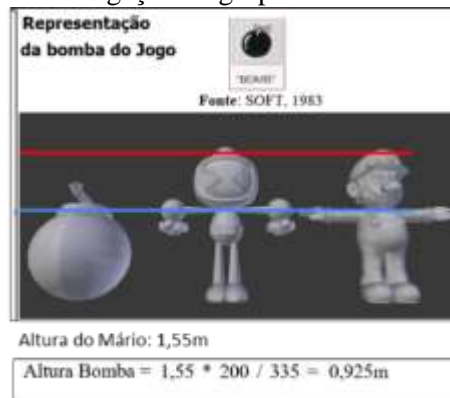
A partir das considerações desses alunos, o grupo definiu que era necessário, inicialmente, investir na determinação do tamanho da bomba. O tamanho nesse caso, para além de dimensões físicas da bomba, também se refere ao seu raio de ação.

Seria necessário, portanto, definir estratégias para determinar o tamanho da bomba. Neste caso, a hipótese definida pelo grupo se apoia na argumentação de um aluno do grupo, o G4A1, que sugeriu: “*o Bomberman e o Mário já apareceram juntos e podemos fazer esta proporção*” (fala de aluno captado do áudio).

O grupo decidiu utilizar o personagem *Mário Bros* com 1,55 m de altura para determinar o diâmetro da bomba. Foi utilizado o *software Blender*¹⁰ na intenção de encontrar uma proporção entre as medidas do personagem *Mário* – criado pela mesma empresa do jogo da bomba– usando como unidade de medida o número de *pixels*. Com isso o grupo encontrou que a bomba teria 200 *pixels*, o que representa 0,925 m de diâmetro. (Figura 7).

¹⁰ A ferramenta *Blender* é usada para modelar, animar e editar vídeo. <<https://www.blender.org>>.

Figura 7: Investigação do grupo G4 sobre a bomba do jogo



Fonte: Dados da pesquisa - captura de tela do grupo G4

Outras informações em relação ao problema também foram relatadas pelo grupo: “a quantidade de pólvora que tem na bomba é relevante para sabermos da sua capacidade de explosão” (relatório escrito do G4).

Com o objetivo de encontrar o volume e o peso da bomba os alunos utilizaram planilhas eletrônicas para auxiliar na matematização da situação (Figura 8).

Figura 8: Matematização da situação do Grupo G4

Usando o software para medir a quantidade de pixels, constatamos que o diâmetro da câmara interna da bomba é proporcional a 24/32 do diâmetro total da bomba. Desconsiderando o pavio, temos uma esfera oca de ferro fundido e um volume máximo de pólvora contido na bomba. A densidade do ferro fundido é de 7,2 g/cm³ e, de acordo com o manual de instruções, 16 onças líquidas de pólvora equivalem a 1 libra americana. Logo, considerando uma onça líquida igual a 30 cm³ e 1 libra igual a 0,45 kg, obtemos:

Diametro Bomba (cm)	Diametro Interno (cm)	Volume interno (cm ³)	Volume Interno (Onça)	Peso Polvora (kg)
92,5	69,375	174738,0103	5824,600342	163,8168846

Fonte: Dados da pesquisa -Relatório do grupo G4.

Seguindo na fase de resolução, os alunos do grupo utilizaram uma ferramenta fornecida no *site* da ONU (Organização das Nações Unidas)¹¹ que calcula o potencial de destruição de uma bomba. Além disso, o grupo encontrou a informação de que o raio de ação da bomba que causa a morte instantânea em uma possível explosão da bomba (chamada por eles de bomba realística) é de 12,31m. Usando aplicativo do *site*, os alunos compararam o raio de alcance da bomba realística e raio de alcance da bomba do jogo, retomando o contexto inicial problema. Para os dados relativos à bomba do jogo determinaram que o raio máximo de alcance quando da explosão da bomba é 12 m (Figura.9).

¹¹ Ferramenta disponível em: <https://www.un.org/disarmament/un-safeguard/explosion-consequence-analysis/>.

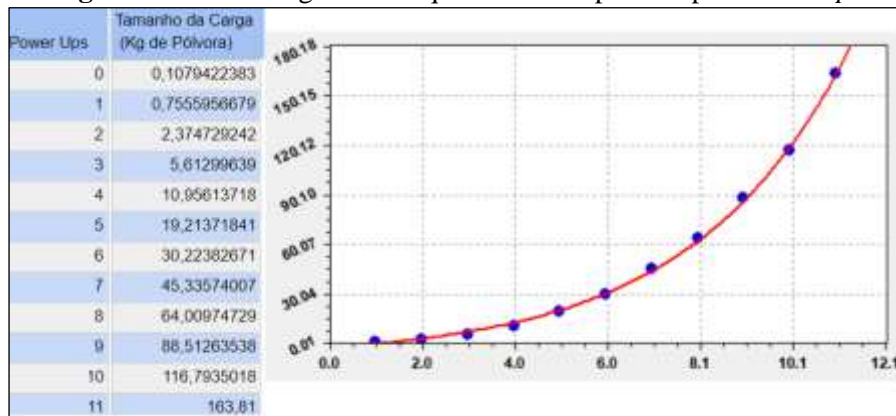
Figura 9: Comparação entre os dados obtidos no site e o contexto da bomba do jogo



Fonte: Dados da pesquisa - Relatório e arquivo digital do grupo G4

Para finalmente buscar uma relação entre a quantidade de pólvora na bomba e o número de *Power ups* do *Bomberman* os alunos usaram *software* e obtiveram $f(x) = -6,85(1,35 - e^{0,293x})$ que relaciona a quantidade de pólvora na bomba (y) ao número de *Power ups* (x) (Figura 10).

Figura 10: Tabela e gráfico da quantidade de pólvora por *Power ups*



Fonte: Dados da pesquisa - Relatório do grupo G4

Os alunos verificaram então que a quantidade máxima de pólvora, que corresponde à quantidade máxima de *Power ups* no jogo, é de 163, 81 Kg de pólvora e, caso existisse na realidade, o raio de alcance da bomba causando morte seria de 12,31 m.

Em relação à interpretação e validação desse modelo, o grupo relata: *foi muito legal, pois os cálculos que encontramos da bomba encaixou-se com uma exatidão surpreendente em relação ao alcance da bomba no mapa do jogo* (gravação de áudio do grupo G4).

Uso da tecnologia nas atividades de modelagem matemática

Considerando nosso objetivo de investigar como a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, dirigimos nossa atenção ao uso da tecnologia digital pelos alunos no desenvolvimento das atividades.

Nesse sentido, considerando as funções da tecnologia no ciclo de modelagem sugerido por Greefrath, Hertleif e Siller (2018), dirigimos nossa análise aos caminhos percorridos por cada um dos grupos com o intuito de buscar indícios de como o uso da tecnologia favoreceu a ativação de recursos semióticos e a sua relevância para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Na atividade *A Lei de Moore* inicialmente a tecnologia colaborou para a investigação da situação. *Sites da internet* ofereceram aos alunos informações relevantes para que pudessem responder a questão: A Lei de Moore ainda é válida? De fato, os contadores de transistores foram um recurso semiótico que lhes possibilitou definir estratégias para obter a resposta. A apropriação do uso deste recurso fez com que o grupo percebesse algumas regularidades, levando a uma simplificação da situação: a escolha das empresas AMD e Intel. Entretanto, a oralidade das discussões dos grupos composta por recursos linguísticos e gestuais também foi importante para que os encaminhamentos da atividade fossem definidos. Um exemplo disso é o resultado do diálogo em que, indicando para as imagens e as tabelas da internet, o grupo decidiu que deveriam usar dois contadores: “*o Tech power up só apresenta os dados a partir do ano 2000 e nós queremos de antes também*” (transcrição de gravação de vídeo do grupo G1).

Porém, a situação a ser investigada mudou depois que os alunos observaram os dados no gráfico. A ação de visualizar no gráfico a relação entre os dados das duas empresas por meio de um *software* de planilhas gerou uma nova interpretação da situação, conforme indica o excerto de um diálogo dos alunos a seguir.

G1A1: *Para a AMD, a curva apresenta uma queda entre 2013 e 2016, porém a partir deste ano, há um crescimento acelerado e a empresa toma a liderança.* (acompanhando com o dedo o comportamento da curva)

G1A2: *E também, entre os anos de 2001 e 2005 e de 2013 a 2015 a gente vê que tem distanciamento entre os números de transistores nos lançamentos das empresas.*

G1A1: *Com isso dá pra gente concluir uma coisa legal: a Intel tem mais números de transistores que a AMD, ela tá na liderança neste caso.*

A partir desse diálogo e ao observar o comportamento das duas curvas no mesmo gráfico, apoiados pelo uso de gestos indicando a aproximação e o distanciamento entre as curvas, produziu-se uma reorganização no entendimento da situação, levando os alunos a optar por uma empresa. Podemos inferir que a visualização dos dados associada ao uso de diferentes recursos alinha-se com os diferentes modos representativos da informação. Neste sentido, os recursos semióticos ativados pela tecnologia como, por exemplo, a construção e análise de gráficos, neste momento possibilitaram completar a coleta de dados e fazer inferências sobre a sua pertinência.

Uma vez estruturada a coleta de dados por meio do uso da tecnologia, a sua função passaria a ser de realização de cálculos, uma vez que a obtenção do número de transistores usando a Lei de Moore se daria por meio do uso de *software* para calcular este número no período de tempo escolhido pelos alunos. Entretanto, o uso da tecnologia ativa o recurso semiótico da articulação de representações, de modo que tabela e curva no plano poderiam ser observados e analisados conjuntamente.

Nesse sentido, a manipulação do *software* promoveu a construção de novas representações matemáticas, levando os alunos do grupo a recorrerem a conceitos matemáticos já conhecidos em situações anteriores: o conceito de derivada. Podemos inferir que o uso dos diferentes recursos semióticos ativados pela tecnologia para esse grupo favoreceu a compreensão do problema.

A obtenção dos modelos matemáticos também se deu por meio de uso da tecnologia. Inicialmente o *software CurveExpert* foi usado para obter os modelos. Em seguida, como o uso dos *software* de CAS (*Symolab* e *Wolfram Alpha*) tinham como finalidade determinar a derivada da função. Neste instante, articular de forma consciente e intencional diferentes recursos semióticos (gráficos, tabelas, expressões algébricas, gestos e interações entre os alunos dos grupos) levou os alunos a perceber que deveriam usar outro *software* para a obtenção e análise da derivada, conforme indica o diálogo a seguir.

G1A2: Quando usamos os dois softwares (referindo-se ao Symolab e ao Wolfram Alpha, ambos software de CAS) para achar a derivada, dava sempre uma indeterminação e por mais que a gente derivasse de novo, as derivações retornavam a zero... a gente imagina que essas taxas possuem valores muito próximos. Daí a gente fez no GeoGebra.

De fato, as derivadas das funções (modelos matemáticos) só foram obtidas usando o *software* GeoGebra (Figura 5). Neste sentido, a tecnologia teve a função de controle, proporcionando aos alunos ativar recursos semióticos como a comparação de representações

e, a partir dela tomar decisões em relação à viabilidade da resposta obtida para o problema que estavam interessados em resolver na atividade de modelagem matemática: a validade da Lei de Moore.

Neste caso, os recursos semióticos associados às funções da tecnologia, proporcionaram a articulação de representações de sistemas semióticos distintos (algébricos, geométricos, linguísticos, etc.) e isto possibilitou também a ativação de conceitos matemáticos distintos em consonância com o que Haciomeroglu, Aspinwall, Presmeg (2010), por exemplo, recomendam para aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

De modo geral, as representações vinculadas ao uso da tecnologia digital (gráficas, numéricas e simbólicas) para o grupo G1 associadas a outros recursos como gestos e falas se articularam de modo que pudessem encontrar e aceitar a solução para o problema. O que se pode inferir é que a tecnologia foi usada pelos alunos do G1 em conformidade com o que sugere Geiger (2011, p. 311), como um “agente provocativo para estimular a exploração de conceitos matemáticos”. Particularmente, esta exploração foi mediada por uma variedade de recursos semióticos ativados pela tecnologia digital.

A atividade *A bomba do jogo Bomberman* desenvolvida pelo grupo G4 é um exemplo de como a tecnologia pode ser o próprio meio em que o problema a ser resolvido tem sua origem. De fato, um elemento do jogo *Bomberman* – a bomba - é o objeto de investigação dos alunos. Neste caso, a simulação proporcionada pela tecnologia foi crucial para que os procedimentos relativos à definição do problema e sua resolução pudessem ser realizados, em sintonia com o que se discute sobre o uso da tecnologia em atividades de modelagem matemática em Greefreh e Siller (2018) e em Frejd e Arlebäck (2017).

Para além desse aspecto, o que também favoreceu toda a ação semiótica do grupo de alunos nessa atividade de modelagem matemática foi o contexto do desenvolvimento da atividade: um curso de Ciência da Computação e um dos alunos do grupo como desenvolvedor de *software* educacional.

Assim, para os alunos de G4 entendemos que a tecnologia ativou recursos semióticos com finalidades específicas: ora para investigar e matematizar os dados da bomba ora para investigar a sua capacidade de explosão.

Durante a investigação das características da bomba, o uso de *sites* e artigos na *internet* foi fundamental. Amparados pelo uso destes recursos para investigar e idealizar o aspecto da bomba, os alunos do grupo G4 tomaram a decisão de usar um personagem virtual –Mário - que tem a sua medida real declarada – para que pudessem calcular, usando proporção, o tamanho da bomba.

Ainda no intuito de trazer os dados do jogo para a realidade, um dos alunos do grupo sugeriu a escolha do *software Blender* para que pudessem fazer uma comparação com a bomba e o personagem, optando pela unidade de medida *pixel*. O uso da tecnologia possibilitou nesse momento a elaboração de novas conjecturas e somente por meio da ativação de recursos semióticos smartphones, falas, gestos, jogos simuladores, por exemplo, os encaminhamentos para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática foram sendo definidos pelo grupo de alunos.

No caso dessa atividade de modelagem matemática os alunos se valeram da tecnologia digital para, o todo momento, articular realidade e jogo. De fato, funções da tecnologia como experimentação, simulação e controle, lhes possibilitou ativar recursos semióticos como imagens, *sites* da *internet*, *software*, bem como recursos da oralidade e gestos em que as decisões dos alunos eram discutidas no grupo, para associar a bomba do jogo com o que denominaram bomba realística.

Nesse sentido, ao comparar o tamanho, o raio de ação de uma bomba realística cujos dados constam no site da ONU, o grupo conseguiu estabelecer ações que são válidas para a bomba no jogo Bomberman. Os recursos da tecnologia digital ofereceram a oportunidade de os alunos vivenciarem simultaneamente as duas situações (real e virtual). Os recursos semióticos que a tecnologia digital lhes possibilitou ativar e articular aumentaram a capacidade dos alunos de resolver o problema matemático contextualizado. De fato, os alunos puderam validar o modelo matemático obtido de duas maneiras: testando os dados no site da ONU e com o alcance da bomba no contexto do jogo, o que os estimulou a associar realidade, jogo e conceitos matemáticos, conforme sugere excerto a seguir relativo a transcrição de áudio da aula.

G4A1: *Apesar de estar fora da realidade, para nós (referindo-se ao grupo) o jogo não é tão irreal assim...foi uma surpresa na verdade!*

G4A2: *Vimos que quanto mais pólvora você coloca, você não vai ter uma bomba necessariamente maior... não é proporcional...é exponencial.*

Em termos gerais a manipulação dos recursos semióticos utilizados por ambos os grupos indica o potencial semiótico da tecnologia. A diversidade de recursos semióticos ativados nas duas atividades definiram os encaminhamentos para o desenvolvimento das atividades.

Resultados

Levando em consideração a nossa investigação de como a tecnologia digital favorece a

ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, o esforço analítico empreendido relativamente às duas atividades de modelagem nos leva a caracterizar cinco categorias relativas ao modo como a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. No Quadro 1 apresentamos a caracterização dessas categorias.

Quadro 1: Categorias relativas ao uso da tecnologia na ativação de recursos semióticos

	Categoria	Uso da tecnologia digital na ativação de recursos semióticos
A tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos de diferentes maneiras	A tecnologia como fonte de informação sobre a situação em estudo	A investigação e a busca pelas informações em relação à situação investigada foram apoiadas pelo uso da tecnologia digital. Neste caso recursos semióticos como imagens, gráficos e tabelas foram ativados como fontes de informação, seja na etapa de obtenção de dados, seja na interpretação e validação dos modelos matemáticos construídos.
	A tecnologia como meio de visualização	A tecnologia foi usada para ativar recursos semióticos como imagens, gráficos, tabelas que quando adequadamente associadas viabilizaram visualizações tanto de aspectos matemáticos quanto de aspectos da situação em estudo.
	A tecnologia como auxiliar na construção de modelos matemáticos	A tecnologia ativou recursos semióticos linguísticos e extralinguísticos que serviram de suporte para a construção e avaliação dos modelos matemáticos bem como para a análise das respostas para os problemas por eles produzidas.
	A tecnologia como o contexto de origem do problema	As duas situações investigadas têm natureza tecnológica. Fora de um contexto de tecnologia digital as situações não encontram respaldo. Toda a atividade semiótica dos alunos modeladores está emaranhada na tecnologia digital. Os recursos semióticos ou têm natureza digital (<i>software</i> , <i>sites</i> , simuladores, <i>smartphones</i> , imagens, gráficos, etc) ou os recursos semióticos são influenciados pela tecnologia como é o caso de diálogos, gestos, diagramas, por exemplo, produzidos a partir de informações acessíveis pela tecnologia digital.
	A tecnologia como articuladora de recursos semióticos	A tecnologia digital ativa a geração de imagens, gráficos, <i>software</i> bem como as diferentes associações entre estes recursos. Neste sentido, uma abordagem holística das situações investigadas foi favorecida pela articulação entre recursos semióticos de naturezas distintas.

Fonte: Produzido pelos autores

Levando em consideração o ciclo de modelagem matemática, a interface entre tecnologia e semiótica no desenvolvimento de atividades de modelagem considerando as categorias que caracterizamos em relação ao uso da tecnologia na ativação de recursos semióticos se configura conforme indica o esquema da Figura 11.

Figura 11: Tecnologia como ativadora de recursos semióticos



Fonte: Produzido pelos autores

A caracterização dessas categorias indica a relevância da tecnologia para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Se na perspectiva de Greefrath, Hertleif e Siller (2018) bem como de Fredj e Arlebäck (2017) se identificam diferentes funções da tecnologia em atividades de modelagem, a nossa pesquisa amplia estas possibilidades e traz à tona o seu papel como ativadora de recursos semióticos que permeiam as ações dos alunos no desenvolvimento das atividades. Neste sentido, podemos concluir que o uso da tecnologia ativou recursos semióticos: para caracterizar o contexto de origem do problema, para gerar informações, para visualizar e manipular informações, para dar suporte à construção dos modelos matemáticos, à sua validação bem como para a avaliação dos resultados obtidos por intermédio desse modelos.

A pesquisa empírica realizada com alunos de um curso de Ciência da Computação evidencia que em atividades de modelagem matemática a situação real em que se origina o problema pode ela própria ser um ambiente virtual ou tecnológico e cuja investigação é necessariamente ancorada na ativação de uma diversidade de recursos semióticos seja para definir o problema, seja para matematizar a situação, seja para construir e validar modelos matemáticos. Neste sentido, amplia-se a argumentação de Nöth (2001) de que a tecnologia ativa recursos semióticos, evidenciando-se na presente pesquisa que ela tem potencial para articular recursos semióticos de naturezas diversas, viabilizando uma abordagem holística das situações investigadas em atividades de modelagem matemática.

A investigação empreendida neste artigo, evidenciando a interface entre tecnologias digitais e recursos semióticos, lança luz para a relevância de, em atividades de modelagem matemática, fomentar as ações dos alunos mediante o uso da tecnologia digital.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1 – 2, p. 19 – 30, apr. 2018.
- ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência e Educação** (UNESP), 11, 1-16, 2005.
- ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. Alexandria - **Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 117-134, jul. 2009.
- ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. **Relime – Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**, Cidade do México, Número Especial, v. 9, p. 267 – 299, 2006.
- BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Eds). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, 2015. p. 73 – 96.
- BOGDAN, R. C., BIKLEN, S. K. **Pesquisa qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.
- BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. **REIEC**, v. 10, n. 2, p. 36 – 45, 2015.
- BROWN, J. P. Visualisation tactics for solving real world tasks. In G. A. Stillman, W. Blum; M. S. Biembengut (Eds.) **Mathematical modelling in education research and practice (ICTMA 16): Cultural, social and cognitive influences**: Springer, 2015, p. 431 – 442.
- DALLA VECCHIA, R. **A Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012.
- DEJARNETTE, A. F. Students’ Challenges with Symbols and Diagrams when Using a Programming Environment in Mathematics. **Digital Experiences in Mathematics Education**, v. 5, n. 1, p. 36 – 58, 2019.
- FREJD, P.; ARLEBÄCK, J. B. Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak In: **Mathematical Modelling and Applications (ICTMA 17): Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education**. STILLMAN, A. G; BLUM, W.; KAISER, S. (Ed.), 2017. p. 517 – 527.
- GEIGER, V. Factors Affecting Teachers’ Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modeling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman (Eds). Overview. In: **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA**

14). New York: Springer, 2011, p. 305 – 314. New York: Springer.

GREEFRATH, G. Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling – Overview. In: **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)**. Hamburgo: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. (Ed.), 2011, p. 301 – 304.

GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H-S. Mathematical modelling with digital tools – a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM**, p. 1 – 12, 2018.

HACIOMEROGLU, E. S.; ASPINWALL, L.; PRESMEG, N. C. Contrasting Cases of Calculus Students' Understanding of Derivative Graphs. **Mathematical Thinking and Learning**, 12(2), v. 12 n. 2p. 152–176, 2010.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem**. Dissertação de Mestrado — Rio Claro: Unesp, 2004.

MAVERS, D. E. **Multimodal design: the semiotic resources of children's graphic representation**. 2004. 243 f. Tese (PhD em Educação) – Universidade de Londres, Londres, 2004.

MOORE, G. E. Cramming more components onto integrated circuits. **Proceedings of the IEEE, IEEE**, v. 86, n. 1, p. 82–85, 1998.

MOORE, G. E. Progress in digital integrated electronics. In: **Electron Devices Meeting**. s.n., 1975. v. 21, p. 11–13.

NÖTH, W. Máquinas Semióticas. **Galáxia**. n. 1, 2001.

O'HALLORAN, K.; BEEZER, R.; FARMER, D. W. A new generation of mathematics textbooks research and development. **ZDM**, v. 50, n. 5, p. 863 – 879, set. 2018.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. 1. ed., 34ª reimp.– São Paulo: Brasiliense, 2012.

SRIRAMAN, B.; KAISER, G.; BLOMHOJ, M. A Brief Survey of the State of Mathematical Modeling Around The World. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 212 – 213, 2006.

STILLMAN, G.A., Brown, J.P., & Geiger, V. Facilitating mathematisation in modelling by beginning modellers in secondary school. In G. A. Stillman; W. Blum; & M. S. Biembengut (Eds), **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences**. New York: Springer, 2015, pp. 93–104.

STEINBRING, H. What Makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interacion. In: **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 61, n. 1 – 2, p. 133 – 162, 2006.

THEIS, T. N.; WONG, H.-S. P. The end of moore's law: A new beginning for information technology. **Computing in Science & Engineering, IEEE**, v. 19, n. 2, p. 41–50, 2017.

THOMAS, G. B; WEIR, M. D; HASS, J. **Cálculo, volume 1**. Tradução Kleber Pedroso e Regina Simile de Macedo- 12 ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

YOON, C.; THOMAS, M. O. J.; DREYFUS, T. Gestures and virtual space. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), **Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Thessaloniki, Greece: PME, v. 5, 2009, 409–416.

Recebido em: 27 de junho de 2020
Aprovado em: 17 de Agosto de 2020