revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE INFINITO IDENTIFICADOS EM ALUNOS INGRESSANTES E CONCLUINTES DO CURSO DE MATEMÁTICA

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.555-577

Fernanda Kelly da Silva Siqueira[1]
João Henrique Lorin[2]

Resumo: Este artigo apresenta resultados de uma investigação de iniciação científica acerca de obstáculos epistemológicos identificados em respostas de acadêmicos ingressantes e concluintes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade do estado do Paraná em atividades que envolveram o conceito de infinito. Para que se pudéssemos identificar e estabelecer relações entre as respostas dos alunos e os obstáculos referentes ao conceito de infinito tomamos como suporte seis atividades retiradas da Tese: *Relações entre Teoremas-em-ação e Obstáculos Epistemológicos do conceito de Infinito*. De acordo com a literatura evidenciamos os momentos históricos relacionados a cinco obstáculos epistemológicos e conseguimos identificar nas respostas dos alunos manifestações desses obstáculos.
Palavras-chave: Obstáculos Epistemológicos. Epistemologia. Infinito atual. Infinito Potencial.

EPISTEMOLOGICAL OBSTACLES OF THE INFINITE CONCEPT IDENTIFIED IN FRESHMEN AND GRADUATING STUDENTS OF THE MATHEMATICS COURSE

Abstract: This article presents results of a scientific initiation investigation about epistemological obstacles identified in responses from new and graduating students of a Mathematics Degree course at a university in the state of Paraná in activities that involved the concept of infinity. So that we could identify and establish relationships between the students' responses and the obstacles related to the concept of infinity, we supported six activities taken from the Thesis: *Relations between Theorems-in-action and Epistemological Obstacles of the concept of Infinity*. According to the literature, we highlight the historical moments related to five epistemological obstacles and we were able to identify in the students' responses manifestations of these obstacles.
Keywords: Epistemological Obstacles. Epistemology. Actual Infinite. Potential Infinite.

Introdução

Noções do conceito de infinito se manifestam de maneira direta ou indireta em diferentes níveis escolares e nos mais diversos temas e/ou conteúdos, tais como, conceitos de retas e planos, conjuntos numéricos, progressão geométrica, limites, séries, axioma do supremo, conjuntos infinitos e limitados, entre outros. Para Morris (2003) a história do conceito de Infinito, não se trata apenas de uma história de um conceito matemático; é, sobretudo, uma história da evolução do pensamento científico.

[1] Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) – Campus de Campo Mourão. E-mail: ferkelllysilva@hotmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1656-6087.
[2] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor Adjunto da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) – Campus de Campo Mourão. E-mail: joaohenrique.lorin@unespar.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4370-5858.

Nas primeiras discussões que se tem registro, acerca deste conceito no mundo ocidental, mais especificamente na Grécia antiga com Aristóteles, prevalecia a concepção de infinito potencial, ou seja, uma ideia de infinito que não tem fim, e que servia exclusivamente como um qualificador de uma ação. De outro modo, a concepção de infinito atual[3], trata o infinito como um objeto matemático, segundo Waldegg (1996), o primeiro (infinito potencial) está associado à ausência de limites ou fronteiras de um processo sem fim, o devir; já o segundo (infinito atual), associa-se à ideia de totalidade, de completude.

O conceito de infinito atual, não é uma mera extensão ou generalização do conceito de infinito potencial, e sua aceitação na matemática levou séculos desde que Aristóteles admitiu a ideia de um infinito em ato, mas que não poderia ser adotado. Foram necessárias rupturas em algumas noções bem estabelecidas para que hoje o infinito atual pudesse ser incorporado na matemática. Segundo D'Amore (2007, p. 214) "quando na história da evolução de um conceito se percebe uma ruptura, mudanças radicais de concepções, então se supõe que tal conceito possua no seu interior *obstáculos de caráter epistemológico*".

Nesse sentido, considerando a necessidade em reconhecer esses obstáculos, temos como objetivo investigar as respostas de acadêmicos ingressantes e concluintes de um curso de Matemática, que responderam atividades retiradas da Tese: *Relações entre Teoremas-em-ação e Obstáculos Epistemológicos do conceito de Infinito* (LORIN, 2018), envolvendo os conceitos de Infinito, afim de que se possa estabelecer relação das respostas desses alunos com obstáculos referentes ao conceito de infinito identificados na literatura.

Para isso, apresentaremos os obstáculos epistemológicos em relação ao conceito de infinito por meio de uma síntese histórica, de modo a compreender o que ocorreu na história para chegar a esses obstáculos. Feito isso, investigaremos como esses obstáculos se manifestaram nas respostas dos alunos ingressantes e concluintes do curso de Licenciatura em Matemática.

Portanto, estamos comprometidos em trazer contribuições para o campo da Educação Matemática, por meio de uma exploração epistemológica, histórica e filosófica do conceito de infinito e apresentando alguns de seus obstáculos epistemológicos. Almejamos colaborar para uma discussão e, por ventura, superação de dificuldades encontradas por professores e alunos no ensino e/ou aprendizagem desse conceito.

[3] É possível encontrar na literatura outras denominações para "infinito atual", tais como, "infinito em ato" ou "infinito real".

O conceito de infinito como um obstáculo na matemática

As primeiras discussões em torno do infinito aparecem na antiguidade grega. Da escola de Parmênides (aproximadamente 530 - 460 a.C.), focamos em seu discípulo Zenão de Eleia (aproximadamente 490 - 425 a.C.). Nas primeiras tentativas de entender o infinito, a matemática e a filosofia foram levadas a paradoxos, segundo Lorin e Nogueira (2015, p.124), "Zenão, objetivando mostrar aos matemáticos da época as incoerências decorrentes da tentativa de se completar grandezas contínuas com um número infinito de pequenas partículas, apresentou alguns paradoxos". Esses paradoxos permitiam antagonismos lógicos da consideração do infinito, com isso, "contribuiu para que emergisse uma tendência no cenário filosófico grego a fugir de uma abordagem quantitativa do infinito, eliminando-o sistematicamente dos raciocínios matemáticos" (CARAÇA, 1975, p.197).

Após Zenão, Aristóteles (aproximadamente 384 - 322 a.C.) apresenta o infinito como categoria filosófica em sua obra, Segundo Lorin (2018, p 42) "Para Aristóteles, o infinito não tinha uma 'existência física', mas era uma necessidade matemática, fosse por redução (divisão), por adição, o infinito existe apenas potencialmente (*infinito potencial*)".

> Assim, seja por redução (divisão), seja por adição, o infinito existe apenas potencialmente. Contudo, findo em algum momento arbitrário o processo de adição ou de divisão, o que se obtém, de fato, como objeto atualizado por esse processo, é sempre uma magnitude finita, nunca infinita. Isto é, seja in concreto, seja in abstrato, o infinito atual não existe para Aristóteles (SANTOS, 2008, p. 62).

Aristóteles, portanto, adota apenas a ideia de infinito para qualificar uma ação, "não considerando totalidades infinitas acabadas, atualmente dadas (*infinito atual*)" (LORIN, 2018, p. 44).

> De fato, Aristóteles admitiu a possibilidade de se descrever o infinito de dois modos, em ato e em processo, para isso, ele utilizou três formas gramaticais que representavam os papéis que o infinito poderia assumir. Porém o único papel por que o infinito poderia ser adotado, por razões filosóficas, era a forma gramatical que qualifica uma ação, isto é, o infinito potencial (LORIN, 2018, p. 60).

A "repulsa" ao conceito de infinito atual, não só afetou a matemática grega, mas influenciou as produções matemáticas por muitos anos, até o século XVII, a matemática ocidental só admitia a concepção de infinito potencial. Segundo Lorin (2018), Euclides (aproximadamente 360 - 295 a. C.), adotou as mesmas noções de infinito de Zenão e Aristóteles, isto é, admitia o infinito apenas como uma potencialidade. Euclides enunciou como noção comum, no Livro I dos Elementos, a ideia de que o todo é sempre maior que uma de suas partes. Essa concepção influenciou a geometria durante séculos de matemática e, até hoje, para muitas pessoas, é intuitivamente irrevogável.

Já no século XVII, Galilei Galileo, em *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências*[4] abordou essa ideia de que o todo sempre é maior que a parte em um de seus diálogos escritos. Galilei propõe, por meio de seus personagens de sua obra, uma possível relação entre os números naturais e seus quadrados perfeitos, porém, naquele momento, não foi possível compreender, pelo menos como um objeto matemático, o conceito de infinito atual.

> These difficulties are real; and they are not the only ones. But let us remember that we are dealing with infinities and indivisibles, both of which transcend our finite understanding, the former on account of their magnitude, the latter because of their smallness. In spite of this, men cannot refrain from discussing them, even though it must be done in a roundabout way[5] (GALILEI, 1914, p. 26).

Segundo Moreno e Waldegg (1991), foi necessário admitir o infinito enquanto adjetivo para que o *infinito atual* pudesse ser constituído. A tradição filosófica de tratar o infinito pela concepção aristotélica do ser em potencial começa a ser rompida, entretanto, fez-se necessário que novos objetos (conceituais) fossem concebidos e estes são os conjuntos.

O infinito ganha uma "nova história" com Bernhard Bolzano (1781-1848), segundo Lorin (2018), ao introduzir o infinito em matemática como objeto de estudo, traz à tona a discussão do infinito atual em sua obra *Os Paradoxos do infinito (1851)*. Bolzano cria o conceito de conjunto na matemática e adota um conceito sintético de conjunto; isto é, um conjunto é concebido como um todo, sem qualquer necessidade de se pensar em separado cada elemento (MORENO; WALDEGG, 1991). A partir dessa concepção, ele tenta estabelecer conexões com conjuntos infinitos. Colocando assim por fim a dificuldade apresentada por Galilei diante de relacionar quantidades infinitas e admitindo a existência do infinito atual.

Georg Cantor (1845-1918), baseando-se nos trabalhos de Bolzano, consolidou a concepção de infinito atual. Cantor desenvolveu um modo de "contar" conjuntos infinitos, isto é, Bolzano introduz a ideia de infinito enquanto objeto matemático, Cantor construiu critérios para diferenciar conjuntos infinitos pelo seu "tamanho", isto é, mostrou que existem

---

[4] Título original: *Dialogues Concerning Two New Sciences.*

[5] Essas dificuldades são reais; e elas não são as únicas. Mas lembremos que estamos lidando com infinitos e indivisíveis, que transcendem nosso entendimento finito, o primeiro por sua magnitude, o último por causa de sua pequenez. Apesar disso, os homens não podem abster-se de discuti-los, mesmo que seja feito de forma indireta (tradução nossa).

conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades, e ainda, que é possível estabelecer relação biunívoca entre objetos de dimensões distintas.

Porém essa consolidação da mudança conceitual do infinito também gerou obstáculos. Um deles foi o espanto de Cantor pelo fato de "igualarmos", em termos de "quantidades" de pontos, um objeto bidimensional a um objeto unidimensional. A seguir, apresentamos baseados na pesquisa de Lorin (2018), os episódios históricos que geraram obstáculos ou rupturas na concepção do infinito e que também serviu de base para pesquisa.

Quadro 1: Resumo de episódios históricos.

Personagens Históricos	Episódios Históricos que geraram obstáculos ou rupturas	Concepção adotada de infinito
Zenão	**Criação de paradoxos, como o de Aquiles e a Tartaruga:** Medo e repúdio a processos infinitos.	Infinito potencial
Aristóteles	**O infinito apenas como uma categoria filosófica:** O infinito como qualificador de uma ação; Nega a possibilidade de conceber o infinito em ato; O infinito é sempre ilimitado.	Infinito potencial
Euclides	**Noção comum enunciada nos Elementos:** E o todo (é) maior do que a parte.	Infinito potencial
Galilei	**Escreve a obra *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências*:** Apresenta um paradoxo causado pela tentativa de relacionar números naturais com seus respectivos quadrados perfeitos.	Infinito potencial
Bolzano	**Apresenta a definição de conjuntos e assume o infinito atual como objeto na matemática**: Estabelece relação intraobjetos, ou seja, estabelece relações biunívocas entre conjuntos infinitos e subconjuntos próprios.	Infinito atual e potencial
Cantor	**Cria classes de infinito, os transfinitos:** Define enumerabilidade e cardinalidade; Elabora a *Hipótese do Contínuo*; Estabelece bijeção entre objetos de dimensões distintas, causando a famosa frase "eu vejo, mas não acredito".	Infinito atual e potencial

Fonte: Lorin (2018).

Segundo Rock (2003), há evidências de que muitos obstáculos epistemológicos presentes no desenvolvimento do conceito de infinito têm relação com obstáculos manifestados em estudantes quando estes estudam matemática. Assim como para Amadei:

> [...] o conflito entre a intuição e o conceito científico traz desafios para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, assim como trouxe aos pensadores de todas as épocas. Os obstáculos epistemológicos consagrados no desenvolvimento histórico da noção de infinito, e muito particular da noção de *infinito atual*, são motivos de sobra para que as dificuldades na aprendizagem, advindas deles, sejam persistentes e de difícil trato no ensino (AMADEI, 2005, p.12).

É possível fazer a relação de episódios históricos com os obstáculos na aprendizagem em relação ao infinito, essa relação é apresentada no Quadro 2.

Quadro 2: Relação Episódios Históricos/Obstáculos epistemológicos.

Personagem / Episódio Histórico relacionado	Obstáculo Epistemológico	Descrição do Obstáculo
Aristóteles / O infinito apenas Como uma categoria filosófica	**Infinito ≡ ilimitado**	Considera-se que todo e qualquer objeto infinito é ilimitado.
Euclides / Noção comum enunciada Elementos	**Parte-todo**	Considera-se que o todo é sempre maior que uma de suas partes.
Zenão / Paradoxos	**O limite é algo que se aproxima, mas não chega!**	A ideia de limite baseada em aproximações. Não se finaliza o processo.
Cantor / "Eu vejo, mas eu não creio"	**Estabelecimento de bijeção entre objetos de dimensões distintas**	Dificuldade em aceitar a bijeção entre conjuntos infinitos com alguma parte própria infinita.
Cantor / Cria-se classes de infinito, os transfinitos	**Constrição ou achatamento da cardinalidade**	Considera-se que todo os conjuntos infinitos têm a mesma cardinalidade: infinita.

Fonte: Adaptado Lorin (2018).

Passamos agora a descrever nossa coleta de dados e analisar como esses obstáculos foram identificados nas repostas dos alunos que investigamos.

Procedimentos metodológicos

Estudamos e utilizamos seis atividades da Tese de Lorin (2018): *Relações entre Teoremas-em-ação e Obstáculos Epistemológicos do conceito de Infinito* e aplicamos para 36 (trinta e seis) acadêmicos ingressantes e 11 (onze) concluintes, com o objetivo de identificar obstáculos epistemológicos em respostas de acadêmicos ingressantes e concluintes de um curso de Licenciatura em Matemática no estado do Paraná. Vale ressaltar que a coleta dos dados dos alunos ingressantes foi realizada em 2020 e a coleta dos dados dos alunos concluintes foi no ano de 2018.

Nas aplicações das atividades, para os dois grupos de acadêmicos, buscamos tranquilizá-los quanto às respostas em cada atividade, sem a preocupação "da resposta correta", pois nosso objetivo não era esse, mas sim investigar a existência ou não de indícios de obstáculos epistemológicos presentes nas respostas.

Foi entregue de modo aleatório, uma atividade para os acadêmicos, e assim que terminavam, era entregue outra, mas sem a pretensão de que todos deveriam responder todas as atividades por conta do tempo, por isso a distribuição aleatória. Isso resultou que nem todos responderam todas as questões, mas garantiu que toda atividade fosse resolvida por pelo menos um acadêmico, o que nos possibilitou analisar respostas de todas as questões. A Tabela

1 a seguir apresenta a relação de quantos alunos responderam cada atividade.

Tabela 1: Relação da quantidade de respostas

	Alunos Ingressantes	Alunos Concluintes	Total
Atividade 1	31	7	38
Atividade 2	32	7	39
Atividade 3	32	6	38
Atividade 4	32	7	39
Atividade 5	31	2	33
Atividade 6	28	3	31

Fonte: os autores

Realizada a aplicação, analisamos as respostas dos alunos tomando como referência para a parametrização das respostas, os obstáculos apresentados no Quadro 2. Diferentemente de Lorin (2018) que estabeleceu relação entre os obstáculos epistemológicos do conceito de infinito com os teoremas em ação[6] mobilizados pelos sujeitos investigados em sua tese, neste artigo, que é resultado de uma pesquisa de iniciação científica, estamos interessados em apresentar indícios de obstáculos epistemológicos nas respostas dos alunos investigados.

Para facilitar a identificação dos acadêmicos na descrição e análise, nomeamos os acadêmicos com siglas *A1, A2, ..., A38* para as respostas da primeira atividade; *B1, B2, ..., B39* para a segunda atividade; *C1, C2, ..., C38* para a terceira atividade; *D1, D2, ..., D39* para a quarta atividade; *E1, E2, ..., E33* para a quinta atividade e *F1, F2, ..., F31* para a última atividade. Para a diferenciação dos acadêmicos ingressantes dos acadêmicos concluintes, inserimos as letras “i” e “c” em cada sigla, para indicar quando o acadêmico é ingressante e para indicar quando o acadêmico é concluinte.

Descrição das atividades e análise das respostas

As atividades aplicadas foram retiradas de Lorin (2018) e tiveram como suporte teórico pesquisas realizadas a respeito do desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de infinito, mais especificamente, os obstáculos epistemológicos desse conceito da história da matemática, bem como pesquisas que apresentaram esses obstáculos na aprendizagem dos alunos.

Na atividade 1[7] foi simulado um diálogo entre dois personagens que se autointitulam infinito. Com esse diálogo, é possível investigar que relações os acadêmicos estabelecem a respeito do conceito de infinito e as propriedades de limitado e ilimitado. Sendo assim, com

[6] Um teorema-em-ação, de modo sucinto, é uma proposição tida como verdadeira, em que um sujeito utiliza na ação de resolver uma atividade.

[7] Ver Figura-01 em anexo.

essa atividade, é possível observar se os discentes manifestam indícios do obstáculo epistemológico *Infinito ≡ Ilimitado,* descrito *por todo e qualquer objeto infinito é ilimitado*.

Obtemos 38 (trinta e oito) respostas para essa atividade, sendo 7 (sete) respostas de alunos concluintes e 31 (trinta e um) de alunos ingressantes. Analisando essas respostas, identificamos que o obstáculo que considera que todo e qualquer objeto infinito é ilimitado esteve presente na resposta de 15 (quinze) alunos, são eles, *Ac6, Ai8, Ai11, Ai15, Ai16, Ai18, Ai20, Ai24, Ai27, Ai28, Ai29, Ai30, Ai32, Ai34, Ai38*.

Vejamos 3 (três) fragmentos de respostas que apresentam indícios deste obstáculo.

Quadro 3: Fragmentos de respostas da atividade 1 com obstáculo epistemológico.

"Os olhos representam a infinidade, enquanto o menino, um segmento finito, o segmento finito, tem um início e um fim, e uma curta quantidade de pontos, os olhos não tem um fim, tem pontos além do que a capacidade humana é capaz de enxergar" (Resposta do aluno *Ai11* para a atividade 1). "O infinito é ilimitado imaginável, portanto não visível, o boneco recebe infinito como nome, já os olhos ao sentido literal da palavra" (Resposta do aluno *Ai16* para a atividade 1). "O infinito não se limita" (Resposta do aluno *Ai34* para a atividade 1).

Fonte: os autores.

Para Lorin (2018, p.147), "as concepções gregas da antiguidade trazem essa característica do ilimitado para o infinito" produzindo obstáculos que até os dias atuais se traduz na "[...] característica de pensar o infinito como algo sem fim" (ibid., 147).

Os acadêmicos *Ac1, Ac3, Ac4, Ac5, Ac7, Ai10, Ai12, Ai13, Ai21, Ai17, Ai22, Ai23, Ai31, Ai35, Ai36* responderam a atividade de acordo com o consenso científico atual, em que admitem que o conceito de infinito possa assumir propriedades tanto de limitado, quanto de ilimitado. Esses em maioria admitiram e exemplificaram a existência de objetos/conjuntos infinitos limitados e objetos/conjuntos infinitos ilimitados.

O Quadro 4 apresenta algumas das respostas dos acadêmicos que estabeleceram uma relação a respeito do conceito de infinito e as propriedades de limitado e ilimitado.

Quadro 4: Fragmentos de respostas da atividade 1 com o consenso científico atual.

"Acredito que esse diálogo refere-se as características do infinito de ser ilimitado ou limitado. Um infinito ilimitado, por exemplo, é o conjunto dos números reais. Um limitado é, por exemplo, o intervalo $[1,2] \in \mathbb{R}$, em que "dentro" desse intervalo limitado, existem infinitos números. Acredito que os olhos representam o infinito potencial, aquele que é mais facilmente aceito. Esse conceito de infinito é associado a uma ideia de universo, (infindável, infinito). O corpo, por sua vez, faz referência ao infinito atual, o qual é mais dificilmente aceito por remeter a situações que possuem um "início" a um "fim". Esse conceito entra em oposição com o conceito de infinito que é idealizado: algo sem início, sem fim, e até mesmo associado a ideias de divindade" (Resposta do aluno *Ac1* para a atividade 1). "Os dois são infinitos, porem o boneco é um infinito limitado que está contido entre dois termos" (Resposta do aluno *Ai10* para a atividade 1).

Fonte: os autores.

Os demais acadêmicos *Ac2, Ai9, Ai14, Ai19, Ai25, Ai26, Ai33, Ai37* não contemplaram a discussão proposta.

Com a segunda atividade[8] pesquisamos se os alunos identificam que os conjuntos de pontos que formam os segmentos AB e CD possuem uma mesma cardinalidade, além disso, nesta atividade é possível identificar como os alunos interpretam a relação *parte-todo*. Entretanto, no primeiro item da atividade em que se pergunta se a quantidade de pontos do segmento AB era finita ou infinita, identificamos que 18 (dezoito) acadêmicos (*Bi10, Bi11, Bi12, Bi13, Bi17, Bi18, Bi19, Bi20, Bi23, Bi24, Bi25, Bi26, Bi27, Bi28, Bi30, Bi32, Bi37, Bi39*), manifestaram o obstáculo epistemológico que considera que o infinito é sempre ilimitado. No quadro abaixo apresentamos alguns fragmentos de resposta que é possível verificar esse obstáculo presente.

Quadro 5: Fragmentos de respostas da atividade 2 com obstáculo epistemológico infinito ≡ ilimitado.

"Finita, pois é um segmento, está limitado a uma parte da reta" (Resposta do aluno *Bi12* para a atividade 2). "Finita, porém muito grande" (Resposta do aluno *Bi17* para a atividade 2).

Fonte: os autores.

Vejamos que no fragmento de resposta do aluno *Bi12* fica evidente que a finitude geométrica não pode ser uma característica de um objeto e ao mesmo tempo possuir uma infinidade de pontos, neste caso, inferimos que ele considera-se que *todo e qualquer objeto infinito é ilimitado*. De modo semelhante, o aluno *Bi17* julga que a quantidade de pontos do segmento é finita, inferimos que ele também levou em conta a imagem limitada do segmento para esta conclusão.

Em relação ao segundo item de atividade, que pretendia investigar se os acadêmicos

[8] Ver Figura-02 em anexo.

iriam concluir que os segmentos AB e CD possuíam a mesma quantidade de pontos, isto é, a mesma cardinalidade, foi possível identificar que 24 (vinte e quatro) acadêmicos (*Bc2, Bc3, Bc4, Bc5, Bc6, Bi10, Bi11, Bi12, Bi13, Bi17, Bi18, Bi19, Bi20, Bi22, Bi23, Bi24, Bi25, Bi27, Bi29, Bi34, Bi36, Bi37, Bi38, Bi39*) consideraram que o todo (segmento CD) é maior que uma de suas partes (segmento AB). O Quadro 6 apresenta dois fragmentos que representam as respostas dos acadêmicos em que houve indício de obstáculo.

Quadro 6: Fragmentos de respostas da atividade 2 com obstáculo epistemológico "*parte-todo*".

"acredito poder afirmar que a cardinalidade do segmento AB é menor que a do segmento CD, o que para mim, significa que sim, a quantidade de pontos de CD é maior que a de AB" (Resposta do aluno *Bc2* para a atividade 2).
"CD tem mais pontos que AB pois o segmento são maiores e caberia mais pontos" (Resposta do aluno *Bi13* para a atividade 2).

Fonte: os autores

Para Waldegg (1996) e Sampaio (2009), um dos obstáculos mais difíceis de superação, quando se trata de conjuntos infinitos, são os problemas em que a relação *parte-todo* está presente. Pudemos constatar a dificuldade que esses autores apontam em nossa pesquisa, e ainda, o modo que ela permanece inalterada mesmo nos alunos concluintes, já que dos 7 (sete) alunos concluintes que responderam esta atividade, 5 (cinco) apresentaram indícios deste obstáculo, ou seja, a maioria dos acadêmicos em suas respostam manifestaram o obstáculo epistemológico *parte-todo* descrito por *o todo é sempre maior que uma de suas partes*.

Os acadêmicos (*Bc1, Bc7, Bi15, Bi16, Bi21, Bi31*) apesar de não manifestarem indícios do obstáculo *parte-todo* em suas respostas, indicam a dificuldade em se comparar "objetos" e/ou conjuntos infinitos na matemática, vejamos alguns fragmentos de respostas no quadro a seguir.

Quadro 7: Fragmentos de respostas da atividade 2.

"Não seria mais pontos, pois as duas são infinita" (Resposta do aluno *Bi15* para a atividade 2).
"CD não é maior, pois os dois são números infinitos" (Resposta do aluno *Bi31* para a atividade 2).

Fonte: os autores.

Nesse mesmo item da atividade 2, identificamos 7 (sete) acadêmicos (*Bi9, Bi14, Bi26, Bi28, Bi30, Bi32, Bi33, Bi35*) que deram respostas em que não contemplavam a atividade proposta.

A terceira atividade[9], segundo Lorin (2018), foi inspirada no paradoxo de Galileo Galilei (1638), que tentou estabelecer uma relação entre o que denominamos hoje de conjunto dos números quadrados perfeitos com o conjunto dos números naturais, isto é, relacionar o conjunto dos números naturais (todo) com o subconjunto próprio dos números quadrados perfeitos (parte).

Com essa atividade, assim como a anterior, também é possível investigar se os alunos identificam se o conjunto dos números naturais e o conjunto dos seus respectivos quadrados possuem a mesma cardinalidade, entretanto usando uma linguagem diferente da segunda atividade.

Nessa investigação, identificamos que os alunos manifestaram dois obstáculos epistemológicos, o da *parte-todo* e o da *constrição* ou *achatamento* da cardinalidade. Dos acadêmicos, 8 (oito) (*Cc5, Cc6, Ci7, Ci13, Ci25, Ci29, Ci30, Ci33*) manifestaram o primeiro obstáculo, o acadêmico *Ci14* manifestou o segundo obstáculo. No quadro abaixo, trouxemos fragmentos que apresentam indícios desses obstáculos nas respostas dos alunos.

Quadro 8: Fragmentos de respostas da atividade 3 com os obstáculos epistemológicos.

"Existe mais números naturais" (Resposta do aluno *Ci25* para a atividade 3, com o obstáculo parte-todo). "Eu acho que existem na mesma quantidade, pois eles são infinitos" (Resposta do aluno *Ci14* para a atividade 3, com o obstáculo da constrição ou achatamento da cardinalidade).

Fonte: os autores.

Inferimos, baseando-se no fragmento acima, que o aluno *Ci14* admite que todos os conjuntos e/ou objetos infinitos possuem o mesmo "tamanho" e este fenômeno também é descrito na pesquisa de D'Amore *et al.*:

> Essendo l‟infinito una categoria non sottoponibile ad ulterior classificazioni, tutti gli infiniti sono uguali tra loro; dalla maggior parte dei soggetti che fanno questa considerazione o simili, l‟infinito è visto come entità numerica non precisabile, più un modo di dire che um oggetto passibile di oggettivazione matemática[10] (D'AMORE *et al.*, 2004, p. 66).

Identificamos também 24 (vinte e quatro) alunos, (*Cc4, Ci9, Ci10, Ci11, Ci12, Ci15, Ci16, Ci17, Ci18, Ci19, Ci20, Ci21, Ci22, Ci23, Ci24, Ci26, Ci28, Ci32, Ci34, Ci35, Ci36, Ci37, Ci38, Ci39*) que manifestaram dificuldade em se comparar objetos e/ou conjuntos

[9] Ver Figura 03 em anexo.
[10] Infinito sendo uma categoria que não pode ser submetida a classificações adicionais, todos os infinitos são iguais entre eles. Para a maioria dos assuntos que fazem essa consideração ou considerações semelhantes, o infinito é visto como uma entidade numérica que não pode ser especificada, é mais uma maneira de dizer (ou pensar), do que um objeto passível de objetificação matemática (tradução nossa).

infinitos, esses acadêmicos, em geral, utilizam a mesma conclusão de Galilei, pois afirmam que não se pode concluir nada por se tratar de conjuntos infinitos. Esta dificuldade também ficou evidente nos fragmentos de resposta da segunda atividade apresentadas Quadro 7.

Em relação aos outros acadêmicos, 3 (três) (*Ci8, Ci27, Ci31*) não conseguiram concluir nada sobre a questão. Já 3 (três) (*Cc1, Cc2, Cc3*) conseguiram estabelecer uma relação biunívoca entre os conjuntos, manifestando que ambos possuem a mesma cardinalidade. O Quadro 9 traz algum desses fragmentos.

Quadro 9: Fragmentos de respostas da atividade 3 com o consenso científico atual.

“Existem na mesma quantidade. Pois para cada número natural há um quadrado perfeito, logo o conjunto dos quadrados perfeitos são enumeráveis, eu consigo estabelecer uma correspondência biunívoca com os números naturais” (Resposta do aluno *Cc1* para a atividade 3).

“Ambos conjuntos são infinitos. É possível realizar uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais e dos quadrados perfeitos. A quantidade de números de ambos conjuntos é a mesma. Ambos conjuntos são enumeráveis” (Resposta do aluno *Cc3* para a atividade 3).

Fonte: os autores.

A quarta atividade[11], apresenta uma situação que pode ser interpretada como uma soma infinita de uma PG, ou seja, 0,999...=0,9+0,09+0,009+...=1. Na análise das respostas desta atividade, é possível identificar dificuldades relacionadas ao obstáculo epistemológico que se sustenta na ideia de que o limite é algo que se aproxima, mas não chega.

Analisando as respostas dos alunos, percebemos que 29 acadêmicos *(Dc1, Dc2, Dc4, Dc5, Dc6, Dc7, Di8, Di9, Di11, Di13, Di14, Di17, Di18, Di19, Di20, Di21, Di22, Di24, Di25, Di26, Di27, Di29, Di30, Di31, Di33, Di35, Di36, Di38, Di39*) manifestaram esse obstáculo. O quadro abaixo apresenta alguns dos fragmentos em que é possível identificar indícios desse obstáculo.

Quadro 10: Fragmentos de respostas da atividade 4 com o obstáculo epistemológico “o limite se aproxima, mas não chega”.

“O menino ganharia pois $0,\overline{9}$ no infinito está tão próximo de 1, então tende a 1. Logo $0,\overline{9}$ é o maior número que começa com zero” (Resposta do aluno *Dc1* para a atividade 4).

“Ao menino, $0,\overline{9}$ está no limite, tendendo a 1” (Resposta do aluno *Di11* para a atividade 4).

Fonte: os autores.

Entre os que responderam esta atividade, 7 (sete) (*Dc3, Di10, Di32, Di15, Di16, Di23,*

[11] Ver Figura-04 em anexo.

Di32, *Di34*) conseguiram estabelecer uma igualdade entre $0,\overline{9}$ e 1. Observe alguns dos fragmentos de resposta.

Quadro 11: Fragmentos de respostas da atividade 4 com o consenso científico atual.

"Acredito que Snoppy está certo pois:

$$x = 0,999\ldots$$
$$10x = 9,999\ldots$$
$$10x = 9 + 0,999\ldots$$
$$10x = 9 + x$$
$$10x - x = 9$$
$$9x = 9$$
$$x = 1$$

Logo 0,999... é 1" (Resposta do aluno *Dc3* para a atividade 4).

"Snoppy ganha, pois de fato 0,999... = 1" (Resposta do aluno *Di10* para a atividade 4).

Fonte: os autores.

Considerando as respostas que apresentaram indícios do obstáculo *o limite se aproxima, mas não chega*, é possível identificar um número proporcionalmente maior da manifestação desse obstáculo entre àqueles que estão concluindo o curso, 6(seis) de 7(sete), em relação à proporção dos acadêmicos que estão iniciando o curso e apresentaram esse obstáculo, 23 (vinte e três) de 32 (trinta e dois).

Considerando agora as respostas daqueles que afirmam que existe uma igualdade entre a representação decimal 0,999... e o número 1, a proporção se inverte, ou seja, 7(sete) dos 32 alunos ingressantes apresentaram esse tipo de resposta. Já entre os concluintes, apenas 1(um) dos 7(sete), responderam de acordo com o consenso científico atual.

Baseando nessas respostas, os acadêmicos concluintes do curso de matemática, apresentaram proporcionalmente mais obstáculos nessa atividade do que os ingressantes, mesmo passando pelas disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral e Análise, que em seu escopo, trata dos conceitos de limite.

Em relação aos demais acadêmicos, 3 (três) (*Di12*, *Di28*, *Di37*), não foi possível, baseados em suas respostas, investigar a existência ou não de indícios de algum obstáculo.

Assim como a atividade 4, a quinta atividade[12] apresenta um paradoxo em que é possível investigar se os acadêmicos o interpretam como uma soma infinita de uma PG, ou como uma soma de uma série geométrica. Essa atividade foi fundamentada no paradoxo de Zenão.

Como esta atividade trabalha com os conceitos de PG infinita e série geométrica,

[12] Ver Figura-05 em anexo.

também nos permitiu investigar se o obstáculo epistemológico *limite é algo que se aproxima, mas não chega* se manifesta! Analisamos as respostas dos 33 acadêmicos, 24 desses (*Ei4, Ei6, Ei8, Ei10, Ei11, Ei12, Ei13, Ei14, Ei15, Ei16, Ei17, Ei18, Ei19, Ei20, Ei21, Ei22, Ei24, Ei25, Ei27, Ei28, Ei29, Ei30, Ei33*) apresentaram esse obstáculo. Vejamos no Quadro 12 alguns fragmentos onde o obstáculo se manifesta.

Quadro 12: Fragmentos de respostas da atividade 5 com o obstáculo epistemológico "o limite se aproxima, mas não chega".

"Essa atividade é um paradoxo, porque a cada distancia que Aquiles percorreu para alcançar a tartaruga, ela já vai ter percorrido uma nova distancia, ou seja, um novo desafio, e será sempre assim, por isso é um paradoxo, a corrida não terá fim" (Resposta do aluno *Ei14* para a atividade 5). "Aquiles nunca chegará até a tartaruga, pois sempre existira um espaço entre os dois" (Resposta do aluno *Ei27* para a atividade 5).

Fonte: os autores.

Apenas um acadêmico o *Ec1*, considerou o paradoxo como uma série convergente. Os demais, (*Ec2, Ei3, Ei5, Ei7, Ei9, Ei23, Ei26, Ei31, Ei32*) até falaram que o Aquiles ultrapassaria, porém não conseguiram concluir, outros não chegaram à conclusão nenhuma. O Quadro 13 a seguir apresenta a resolução do *Ec1*.

Quadro 13: Fragmentos de resposta da atividade 5 com o consenso científico atual.

"Aquiles alcançará a tartaruga. É possível montar uma série convergente de razão 1/10 para descrever a relação de movimento entre os dois" (Resposta do aluno *Ec1* para a atividade 5).

Fonte: os autores.

A sexta atividade[13] tinha como objetivo investigar se os alunos aceitam tal identificação, assim como Cantor escreve na carta, depois de ter feito a demonstração, "Eu vejo, mas não creio". Ou seja, verificamos se os discentes apresentam o obstáculo epistemológico relacionado a Cantor, onde "O quadrado possui mais pontos que um de seus lados, pois tem dimensão superior" ou "não existe bijeção entre objetos de dimensões distintas".

E em relação a esse obstáculo, 21 acadêmicos o manifestaram em suas respostas, sendo eles, *Fc1, Fc2, Fc3, Fi4, Fi5, Fi6, Fi7, Fi8, Fi12, Fi14, Fi15, Fi16, Fi20, Fi21, Fi22, Fi23, Fi24, Fi25, Fi26, Fi27, Fi30*. Vejamos dois fragmentos que exemplificam:

[13] Ver Figura-06 em anexo.

Quadro 14: Fragmentos de respostas da atividade 5 com o obstáculo epistemológico “estabelecimento de bijeção entre objetos de dimensões distintas”.

“Não é possível pois a quantidade de pontos no segmento se somará a do quadrado junto com os outros 3 segmentos” (Resposta do aluno *Fi11* para a atividade 6). “Não pois uma figura bidimensional é composta por outros segmentos unidimensionais além de um segmento lateral” (Resposta do aluno *Fi21* para a atividade 6).

Fonte: os autores.

Os outros 10 acadêmicos, (*Fi9, Fi10, Fi11, Fi13, Fi17, Fi18, Fi19, Fi28, Fi29, Fi31*), deram respostas que não contemplavam a discussão proposta nas atividades.

Considerações finais

É preciso reconhecer que existem obstáculos num sentido amplo do termo no processo de aprendizagem dos alunos, aqui, pudemos apresentar que muitos desses obstáculos podem se relacionar com os obstáculos epistemológicos presentes na constituição histórica dos conceitos.

Por meio da aplicação das atividades investigamos as respostas dos acadêmicos ingressantes e concluintes de um Curso de Licenciatura em Matemática, que responderam atividades retiradas da Tese: *Relações entre Teoremas-em-ação e Obstáculos Epistemológicos do conceito de Infinito*, (LORIN, 2018), envolvendo os conceitos de Infinito, e estabelecemos relações das respostas desses alunos com obstáculos referentes ao conceito de infinito que identificamos na literatura.

Para identificar os obstáculos epistemológicos se fez necessário entender o que aconteceu historicamente na construção do conceito. Com isso, foi possível apresentar cinco obstáculos epistemológicos relacionados à aprendizagem do conceito de infinito, são eles: *infinito ≡ ilimitado*, que considera todo e qualquer ente infinito é ilimitado; *constrição ou achatamento da cardinalidade*, que considera todos os conjuntos infinitos com a mesma cardinalidade; *parte-todo*, que considera que o todo é sempre maior que uma de suas partes; estabelecimento de *bijeção entre objetos de dimensões distintas*, que se apresenta como a dificuldade em aceitar a bijeção entre dois conjuntos infinitos, sendo um dos conjuntos, parte própria do outro e o *limite é algo que se aproxima, mas não chega*, que se configura em pensar o limite apenas por meio de aproximações e nunca finalizar o processo.

Afirmamos que uma investigação histórica e epistemológica bem fundamentada nos permitiu compreender o que ocorreu na história para chegar a esses obstáculos, isso foi primordial para que pudéssemos investigar se houve indícios de obstáculos se manifestando nas respostas dos acadêmicos.

Foi possível identificar em todos os casos, a manifestação de obstáculos, tanto nos alunos ingressantes quanto nos alunos concluintes. E ainda, destacamos que o obstáculo *limite é algo que se aproxima, mas não chega* se manifestou proporcionalmente mais em alunos concluintes do que nos alunos ingressantes. Inferimos que esse fenômeno pode ser interpretado por conta da linguagem utilizada em sala de aula e/ou nos livros didáticos, ou ainda, por conta de uma ausência de discussão acerca da natureza do conceito de infinito nas disciplinas de Calculo Diferencial e Integral e na disciplina de Análise Real. Isso pode ter induzido um entendimento equivocado nos conceitos de limite, ocasionando no obstáculo supracitado.

Portanto, esta pesquisa indica a necessidade de um tratamento adequado às noções de infinito e a diferenciação entre infinito atual e infinito potencial, que pode ser, por exemplo, considerando a existência de obstáculos no decorrer da constituição desses conceitos e que os alunos possivelmente irão manifestá-los.

Sabemos que após uma investigação e a constatação de obstáculos epistemológicos manifestados nos alunos, é preciso de alguma forma, que o professor encontre maneiras para que o aluno supere tais obstáculos. Lorin (2018) apresentou uma dessas maneiras que podem ser utilizada e adotada nesse sentido.

Enfim, com o presente texto, esperamos contribuir com todos aqueles que almejam investigar os obstáculos epistemológicos na constituição das noções de infinito potencial e atual, servindo de suporte teórico-metodológico para suas aulas, e ainda, oferecer auxílio para pesquisas futuras que investigarão este conceito.

Referências

AMADEI, Flávio Luiz. **O infinito:** um obstáculo no estudo da matemática. 2005. 212f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação Matemática. PUC, São Paulo, 2005.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gráfica Brás Monteiro Ltda, 1975

D'AMORE, Bruno. **Elementos de Didática da Matemática**. Trad. Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

D‟AMORE, B.; ARRIGO, G.; BONILLA ESTÉVEZ, M.; FANDIÑO PINILLA, M.I.; PIATTI, A.; RODRÍGUEZ BEJARANO, J.; ROJAS GARZÓN, P.J.; ROMERO CRUZ, J.H.;

SBARAGLI, S. **Il “senso dell’infinito”**. La matematica e la sua didattica. Bolonha - Itália. Vol. 4, p.46-83, 2004.

GALILEI, Galileo. (1638). **Dialogues Concerning Two New Sciences** (H. Crew & A. de Salvio, Trans.). New York: Dover, 1914.

LORIN, João Henrique. **Relações entre teoremas-em-ação e obstáculos epistemológicos do conceito de infinito**. 2018. 181f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, 2018.

LORIN, J.H.; NOGUEIRA, C. M I. Do paradigma pitagórico ao paradigma euclidiano: um estudo histórico sob a ótica epistemológica kuhniana. **RPEM** - Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 4, n.7, p.113-134, 2015.

MORENO, L. E.; WALDEGG, G. The conceptual evolution of actual mathematical infinity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 22, n. 3, p. 211-231, 1991.

MORRIS, Richard. **Uma breve história do infinito:** dos paradoxos de Zenão ao universo quântico. Trad. Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 1998.

ROCK, Ana Isabel Sacristán. Dificultades y Paradojas del Infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional. In: Filloy, Eugenio (org.). **Matemática Educativa**: Aspectos de la investigación actual, Spanish Edition, p. 262- 279, 2003.

SAMPAIO, P. A. S. R. Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 22, n. 32, p. 123 – 146, 2009.

SANTOS, E. E. **O Infinito de Georg Cantor:** uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática. 2008. 264f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, 2008.

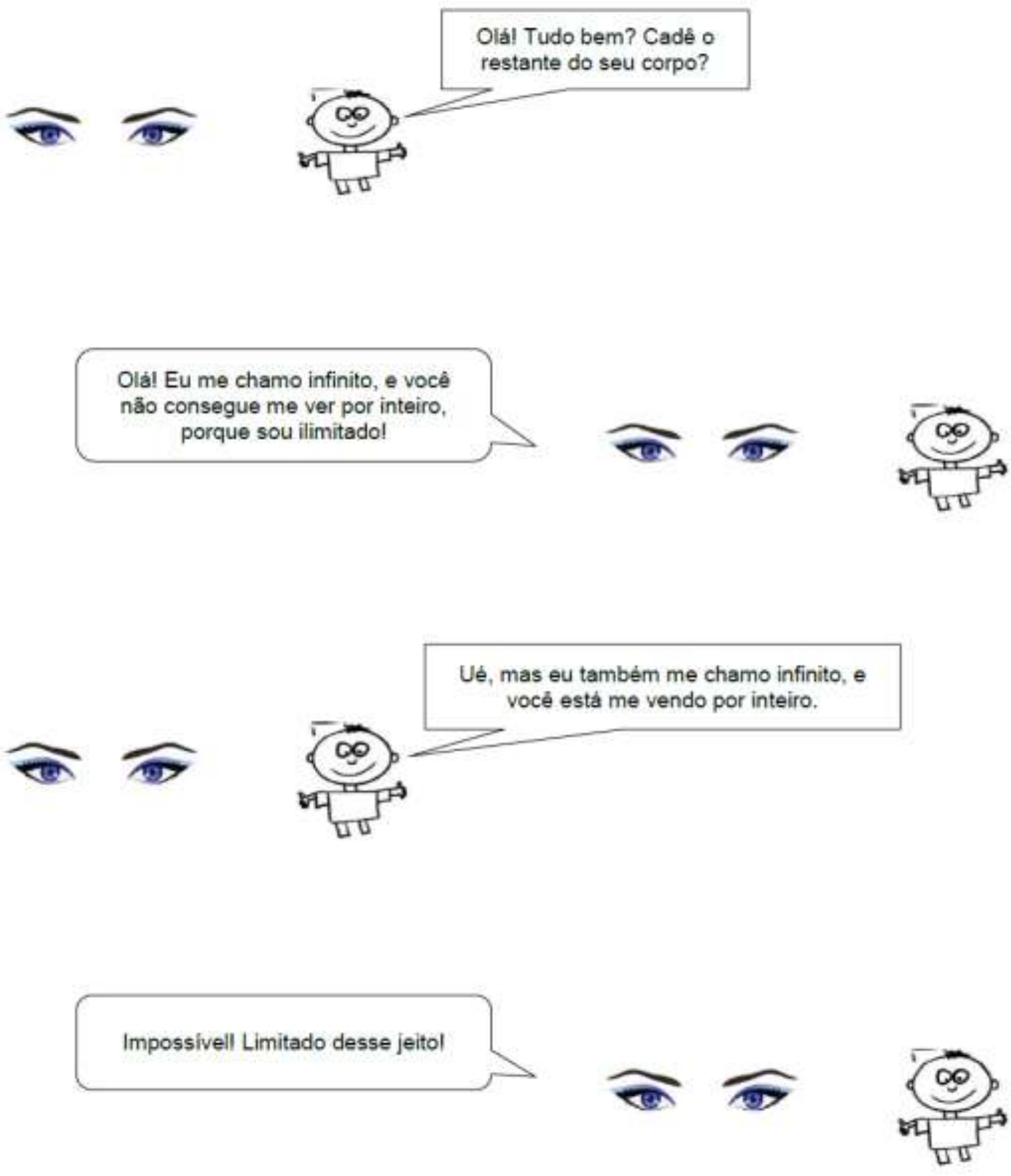
WALDEGG, Guillermina. **Identificação de obstáculos didáticos em el estúdio del infinito actual**. Revista Mexicana de Investigação Educativa, enero-junio, v. 1, n. 1, p. 107-122, 1996.

Recebido em: 30 de junho de 2020
Aprovado em: 21 de setembro de 2020

Anexos

Figura 01

ATIVIDADE 1 - Considere o diálogo imaginário a seguir:

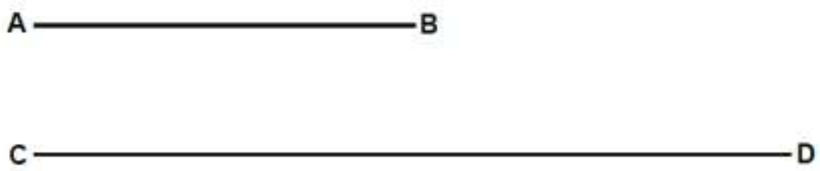


Comente este diálogo!

Fonte: Lorin (2018)

Figura 02

ATIVIDADE 2[73] - Considere os dois segmentos de reta AB e CD, representados abaixo, e responda às questões subsequentes:



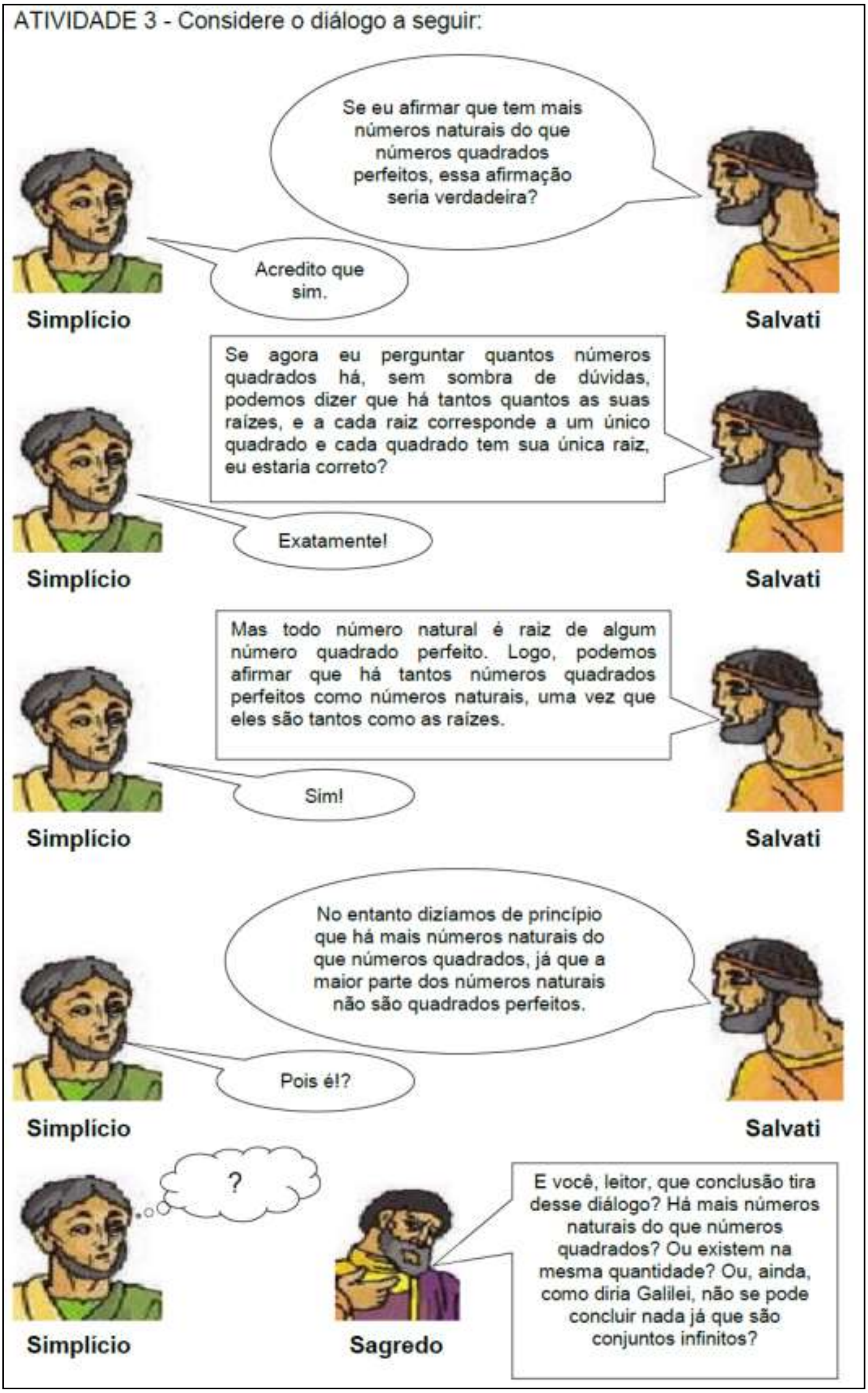
- Supondo que o segmento AB seja constituído por pontos, para você, a quantidade de pontos em AB é finita (porém muito grande) ou é infinita?

- Se tivesse que comparar a quantidade de pontos do segmento AB com a do segmento CD, concluiria que CD possui mais pontos que AB? Justifique sua resposta.

[73] Adaptado de: Arrigo e D'amore (1999).

Fonte: Lorin (2018)

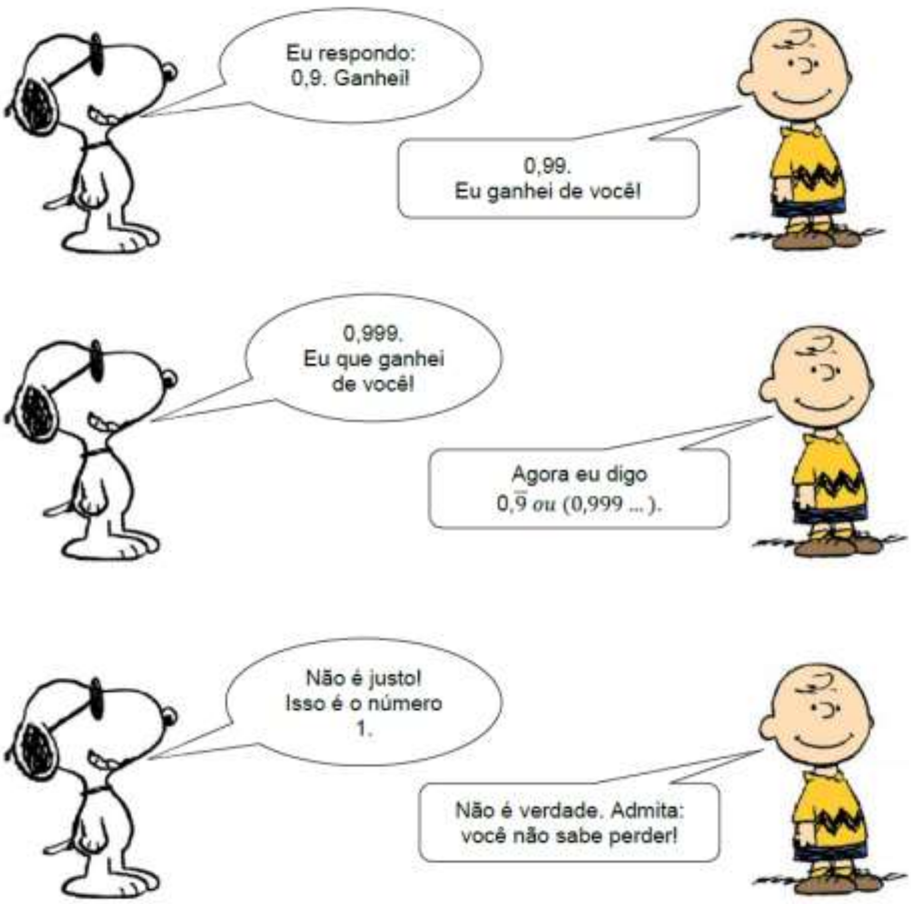
Figura 03



Fonte: Lorin (2018)

Figura 04

ATIVIDADE 4[74] – Dado o desafio “vence quem é capaz de encontrar o maior número que começa com zero”, considere o seguinte diálogo:



Se você fosse o árbitro neste desafio, a quem você daria a vitória? E por quê?

[74] Adaptado de: D'Amore B.; Arrigo G.; Bonilla Estévez M.; Fandiño Pinilla M.I.; Piatti A.; Rodríguez Bejarano J.; Rojas Garzón P.J.; Romero Cruz J.H.; Sbaragli S. (2004).

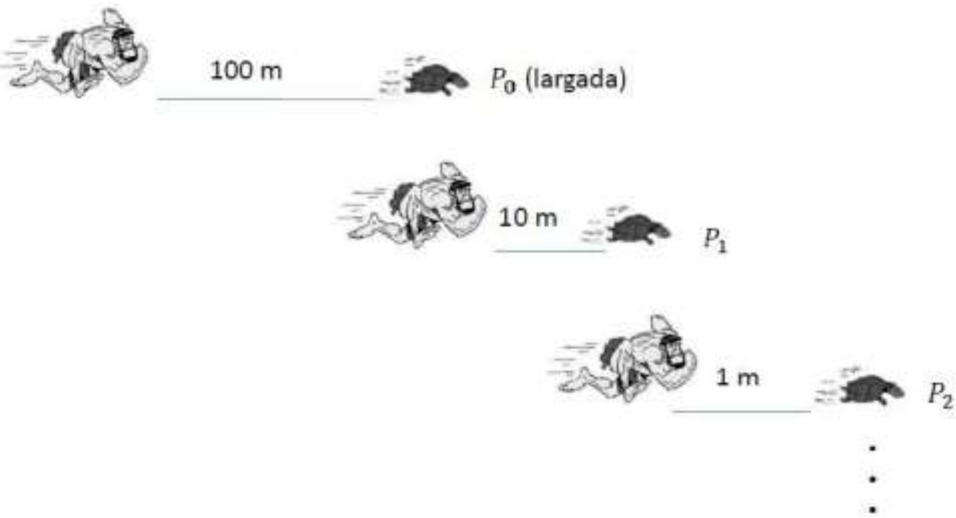
Fonte: Lorin (2018)

Figura 05

ATIVIDADE 5

Zenão de Eléia, um filósofo da Grécia Antiga, além de perfeito dialético, ficou muito conhecido por seus famosos paradoxos. O paradoxo mais conhecido de Zenão é: Aquiles e a Tartaruga.

Aquiles e uma tartaruga movem-se na mesma direção ao longo de uma linha reta, sendo que Aquiles correrá sempre 10 vezes mais rápido que a tartaruga. Aquiles deu um adianto de 100m a tartaruga, e nunca conseguiu alcançá-la, já que quando ele atingiu a posição inicial da tartaruga, ela já tinha avançado 10 m, e se encontrara noutro local adiante dele, e quando ele chegar a essa nova posição, a tartaruga terá realizado novo avanço; e assim sucessivamente.



Para mim, Aquiles nunca alcançará a Tartaruga...

Chegará, sim! Cada vez mais, Aquiles se aproxima da tartaruga...

Por mais perto que Aquiles se aproxime da tartaruga, sempre existirá um espaço entre os dois...

Pois é, acho que tem razão.

E, para você, qual a sua opinião?

Fonte: Lorin (2018)

Figura 06

ATIVIDADE 6 - Considere a situação abaixo:

Em um quadrado de lado 10 cm há infinitos pontos.

10 cm

Também em um lado do quadrado há infinitos pontos.

10 cm

Seria possível afirmar que há tantos pontos num quadrado (uma figura bidimensional) quanto num segmento que representa seu lado (uma figura unidimensional)? **Justifique sua resposta**.

Fonte: Lorin (2018)