revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS EXPLORATÓRIAS NO 3º ANO DE ESCOLARIDADE

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.18.118-136

Eliane Maria de Oliveira Araman[1]
Maria de Lurdes Serrazina[2]

Resumo: Este artigo[3] tem como objetivo analisar processos de raciocínio matemático evidenciados por dois pares de alunos do 3º ano de escolaridade de uma escola pública da periferia de Lisboa ao resolverem uma sequência de três tarefas exploratórias. A fundamentação teórica aborda o raciocínio matemático, nomeadamente quanto à sua definição, seus aspectos estruturais e processos. O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa e insere-se num projeto mais amplo que utiliza uma metodologia de investigação baseada em design. Os dados foram recolhidos por observação participante apoiada por gravação em vídeo dos pares ao realizarem as tarefas, bem como dos registros escritos dos alunos na resolução das tarefas. O processo de análise evidenciou indícios de raciocínio matemático sustentado pelos processos de formular conjecturas, generalizar, validar e justificar.
Palavras-chave: Raciocínio matemático. Processos de raciocínio. 3º ano.

MATHEMATICAL REASONING PROCESSES IN SOLVING EXPLORATORY TASKS IN THE THIRD GRADE

Abstract: This paper aims to analyze processes of mathematical reasoning evidenced by two pairs of third grade students of a public school in the periphery of Lisbon when solving a sequence of three exploratory tasks. The theoretical framework approaches the mathematical reasoning, namely as to its definition, its structural aspects and processes. The study follows a qualitative and interpretative approach and is part of a larger project that uses design research. The data were collected by participant observation supported by video recording of the pairs when they performed the tasks and the students' written records of the tasks solving. The analysis process showed evidence of mathematical reasoning supported by the processes of formulating conjectures, generalizing, validating and justifying.
Keywords: Mathematical reasoning. Reasoning processes. Third grade.

Introdução

O desenvolvimento do raciocínio matemático é considerado um dos grandes objetivos do ensino da Matemática, tanto em termos portugueses (MATA-PEREIRA; PONTE, 2017), como internacionais (JEANNOTTE; KIERAN, 2017; STYLIANIDES, 2009). As orientações curriculares internacionais assim o preconizam (NCTM, 2017). Justifica-se assim a pertinência deste estudo centrado no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Este artigo, que se insere em um projeto mais amplo, tem como objetivo analisar

[1] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. E-mail: elianearaman@utfpr.edu.br
[2] Doutora em educação Matemática. UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa - UL. E-mail: lurdess@eselx.ipl.pt
3 Uma versão preliminar foi apresentada no XXX Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM) realizado na Escola Secundária Amato Lusitano em Castelo Branco, Portugal, nos dias 10 e 11 de julho de 2019.

processos de raciocínio matemático evidenciados por dois pares de alunos do 3º ano de escolaridade ao resolverem uma sequência de três tarefas exploratórias, inseridas numa cadeia de tarefas.

A análise, tendo como aporte teórico os processos de raciocínio matemático definidos por Lannin, Ellis e Elliot (2011), Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), Jeannotte e Kieran (2017) e Morais, Serrazina e Ponte (2018), apresenta evidências de raciocínio matemático nomeadamente, dos processos de conjecturar, generalizar, justificar e validar dos alunos durante a realização das tarefas.

Raciocínio matemático

Apesar de haver consenso entre os pesquisadores sobre a importância do raciocínio matemático, o mesmo não ocorre em relação à caracterização do mesmo. "O raciocínio matemático é reconhecido como fundamental por numerosos autores, que sublinham uma variedade de aspectos" (PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012, p. 357). Jeannotte e Kieran (2017) comentam que, na comunidade de pesquisadores, o discurso sobre o raciocínio matemático é constituído de múltiplas visões, que confrontam umas às outras. De acordo com estas autoras, tal polissemia dificulta comparações não apenas das diversas abordagens e caracterizações do raciocínio matemático, mas também dos resultados dos estudos sobre ele.

Em síntese, destacam-se as seguintes definições para o Raciocínio Matemático que, embora diferentes, guardam uma essência comum, que é produzir novos conhecimentos a partir de outros já existentes:

Quadro 1: Algumas definições para Raciocínio Matemático

Definição	Referência
"Processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos".	JEANNOTTE; KIERAN (2017, p. 7)
Processo de inferência como o que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões.	STYLIANIDES (2009)
Processo que utiliza "informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões".	MATA-PEREIRA; PONTE (2018, p. 782)
Processo conjunto de conjecturar, generalizar, investigar porquê, argumentar e refutar se necessário.	LANNIN; ELLIS; ELLIOT (2011)
Um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas como verdadeiras (conhecimento prévio).	MORAIS; SERRAZINA; PONTE (2018)

Fonte: As autoras

Jeannotte e Kieran (2017), por sua vez, identificaram também dois aspectos do raciocínio matemático: o estrutural e o de processo. As formas mais citadas do aspecto estrutural são a dedução, a indução e a abdução, enquanto no aspecto de processo identificaram oito processos distintos que emergiram da literatura, dentre os quais estão generalizar, conjecturar, justificar e provar (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Segundo as autoras, os aspectos estrutural e de processo são dois modos de olhar para o raciocínio matemático, mas que se relacionam, já que as "estruturas são parte do aspecto de processo do raciocínio matemático e os processos contribuem para a construção dessas estruturas" (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 7). O raciocínio dedutivo, por exemplo, relaciona-se com os processos de justificação, prova e prova formal, diferença que discutiremos adiante. O raciocínio indutivo está ligado ao processo de generalização, enquanto o raciocínio abdutivo relaciona-se, principalmente, com os processos de generalizar e conjecturar.

De acordo com Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), o raciocínio indutivo é aquele por meio do qual se elaboram conjecturas a serem verificadas posteriormente. Diferentemente do raciocínio dedutivo, o indutivo não conduz necessariamente a conclusões válidas, mas é importante para a criação de novo conhecimento. Já o abdutivo consiste em formular hipóteses razoáveis sobre determinado fenômeno. O raciocínio abdutivo, assim como o indutivo, não conduzem necessariamente a uma afirmação válida (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018). Assim, raciocinar matematicamente não se limita apenas ao raciocínio lógico e dedutivo, mas envolve também processos intuitivos, formulação de ideias e validação de afirmações (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

Com relação aos processos de raciocínio, Jeannotte e Kieran (2017) organizaram e caracterizaram vários processos associados ao raciocínio matemático, entre os quais, os relacionados com:

(i) a procura de semelhanças e diferenças, como sejam os processos de generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar e classificar;

(ii) a validação, como sejam os processos de justificar e provar; e

(iii) o suporte a outros processos de raciocínio, como seja o processo de exemplificar.

Com relação à primeira categoria de organização (i), o processo generalizar pressupõe que se infiram narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou sobre as relações entre os elementos desse conjunto. De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2001), os alunos generalizam quando se focam numa ideia ou num aspecto particular de um problema e pensam nele de uma forma mais abrangente. Ainda, descrevem que na generalização, duas etapas são relevantes: identificar os elementos comuns e alargar o domínio do qual se partiu (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2001). Na mesma direção, Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012, p. 3) afirmam que a generalização "parte de uma conclusão ou conjectura específica para formular uma conjectura de âmbito mais geral".

Conjecturar consiste em "um processo que envolve raciocínio sobre relações matemáticas, desenvolvendo declarações, nomeadas como conjecturas, que requerem maior exploração para verificar se são verdadeiras ou não verdadeiras" (MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018, P. 555). Envolve um processo cíclico de: (i) enunciar a conjectura; (ii) verificar se cobre todos os casos e exemplos; (iii) tentar refutar; e (iv) encontrar um motivo que faça com que a conjectura seja verdadeira ou tentar modificá-la (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

De acordo com Lannin, Ellis e Elliott (2011), os alunos podem criar conjecturas válidas ou inválidas, conjecturas estas que estarão alicerçadas em raciocínios válidos ou por vezes inválidos. Embora não sejam desejáveis, os raciocínios inválidos servem de ponto de partida para o entendimento de ideias matemáticas. Quanto à forma de apresentação de uma conjectura, ela pode ser escrita de várias formas, ou até mesmo existir apenas na mente dos alunos. Em contexto escolar, os alunos procuram regularmente padrões e relações e concluem como e porquê que eles existem (LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011). O processo de identificar padrões pode ser confundido com o de conjecturar, sendo que identificar padrões pode levar a uma conjectura, contudo, os dois processos não são iguais (STYLIANIDES, 2009).

Por sua vez, a comparação é um processo que procura por meio de semelhanças e diferenças construir uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas. A comparação de exemplos torna assim possível conjecturar. Comparar pode ter lugar a par com outros processos de raciocínio matemático como generalizar, identificar um padrão ou validar (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Já a classificação pode ser entendida como um processo que procura justificar conjecturas de forma objetiva, tendo como base propriedades e definições matemáticas (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

A segunda categoria (ii) de organização dos processos de raciocínio matemático diz respeito à validação, que é um processo matemático cujo objetivo é alterar o valor epistêmico de uma narrativa. Depois de procurar informação, esta pode ser validada de três formas: justificar, provar e provar formalmente (JEANOTTE; KIERAN, 2017).

De acordo com Jeannotte e Kieran (2017, p. 12), "justificar é um processo de procura de dados, afirmações e suporte para modificar o valor epistêmico. Justificar é um processo social, podendo assumir dois formatos: (i) justificar a conjectura que surgiu no processo e (2) relatar a validade que altera o valor epistêmico". O processo de justificar não apenas mostra que uma afirmação é verdadeira, mas também fornece razões pelas quais ela é verdadeira ou válida em todos os casos possíveis. Ao justificar, os alunos "não apenas desenvolvem suas habilidades de raciocínio, mas também seu entendimento conceitual" (MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2018, p. 556).

Provar e provar formalmente (cujo rigor e grau de formalismo é maior do que em provar) também são processos sociais usados pelos indivíduos ou pela comunidade para responder a questões da veracidade de uma afirmação. Provar algo é um tipo especial de atividade matemática na qual os indivíduos tentam justificar as suas afirmações por meio de uma argumentação dedutiva. De acordo com Jeannotte e Kieran (2017), este processo altera o valor epistêmico de provável para verdadeiro, por meio da pesquisa de dados, enunciados ou algo que suporte essa alteração.

Por fim, na categoria (iii) temos o processo de exemplificar que apoia os demais, uma vez que infere exemplos que apoiam tanto a pesquisa de semelhanças e diferenças como a validação. Este processo permite explorar problemas com o objetivo de conjecturar, verificar conjecturas e reformulá-las ou pode levar a generalizações (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

Para Morais, Serrazina e Ponte (2018, p. 556), "alunos de diferentes anos escolares podem se envolver em processos de raciocínio matemático. Isso significa que conjecturas, generalizações e como essas conjecturas são testadas e justificadas assumirão formas diferentes ao longo dos anos escolares".

Tendo em consideração as especificidades no desenvolvimento do raciocínio neste nível de escolaridade, bem como as definições dos processos de raciocínio apresentadas pelos vários autores, apresentamos no Quadro 2 uma síntese do que levamos em consideração nas resoluções e diálogos dos alunos que nos permitiu identificar a presença das ações de generalizar, conjecturar, justificar e validar.

Quadro 2: Processos de raciocínio e respectivos indicadores (baseado em Lannin, Ellis e Elliot, 2011; Ponte, Mata-Pereira e Henriques, 2012; Jeannotte e Kieran, 2017; Morais, Serrazina e Ponte, 2018)

Processos de Raciocínio	**Indicadores**
Generalizar	Identifica semelhanças entre os casos e aplica um conhecimento ou procedimento que satisfaz todos os casos semelhantes.
Conjecturar	Elabora uma estratégia de resolução definindo um procedimento a ser usado que tem o valor epistêmico de provável ou possível.
Validar	Recorre a dados ou informações que permitem conferir se um procedimento é válido ou não, permitindo sua aceitação ou refutação.

Justificar	Além de apresentar um procedimento, apresenta motivos para alterar o valor epistêmico de uma narrativa, justificando por que de ser válido ou não.

Fonte: As autoras

Metodologia

Esta investigação segue uma abordagem qualitativa com caráter interpretativo. Insere-se num projeto mais amplo que utiliza uma metodologia de investigação baseada em design (PONTE *et al.*, 2016).

O presente estudo analisou os processos de raciocínio evidenciados por dois pares de alunos do 3º ano de escolaridade ao realizarem uma sequência de três tarefas matemáticas, inseridas numa cadeia composta por sete tarefas cujo objetivo era o de desenvolver a flexibilidade de cálculo em problemas de multiplicação. Os alunos foram escolhidos, por indicação da professora, dada a sua capacidade de comunicação, nomeadamente de expressar o seu pensamento durante o trabalho autônomo. A aula analisada foi realizada em janeiro de 2016 numa turma de uma escola pública da periferia de Lisboa, composta por 26 alunos, cujos nomes foram alterados para garantir a confidencialidade. Os dados foram recolhidos através da observação participante das investigadoras, apoiada pelas gravações áudio/vídeo, que foram posteriormente transcritas. Foram também áudio-gravadas as interações entre os dois pares de alunos durante o trabalho autônomo. Foram ainda recolhidos os registros escritos dos alunos. A sequência de três tarefas desenvolvida na aula denominada *Mais do que Dez vezes Dois e Dez vezes Cinco* apresenta características exploratórias. Os alunos estavam organizados aos pares, o que permitiu a interação entre eles e cuja análise é o foco do presente artigo. Analisamos os processos de raciocínio evidenciados pelos pares Marta e Agnaldo e Mónica e Bento, durante o trabalho autônomo, tendo em conta os processos de raciocínio, indicados no Quadro 2.

Resultados

Os resultados estão organizados de acordo com a sequência de tarefas (Tarefa 1, Tarefa 2 e Tarefa 3[4]).

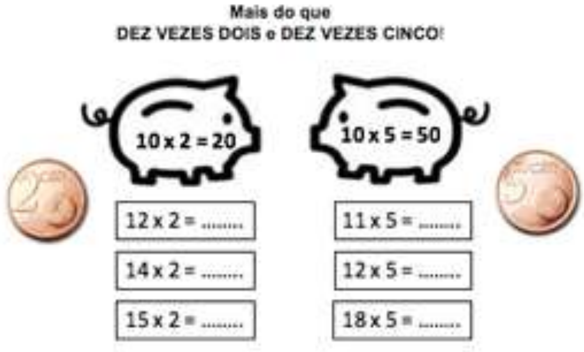
Tarefa 1

Na introdução desta tarefa (Figura1), após ter sido distribuída aos alunos, a professora

[4] Tarefas elaboradas por Jean Marie Kraemer, pesquisador membro do Projeto *Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos.*

pede a um deles para a ler em voz alta e faz uma breve explicação, destacando seu objetivo, estabelecer maneiras (estratégias) de resolução. Em seguida, os alunos começam a fazer a tarefa.

Figura 1: Tarefa *Mais do que dez vezes dois e dez vezes cinco.*



Fonte: As autoras

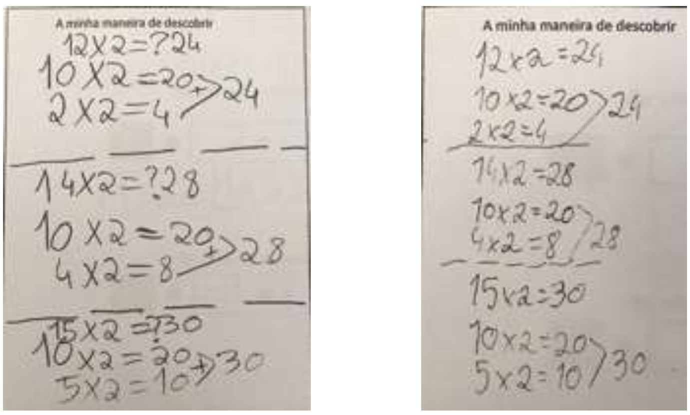
Par 1

Marta dirige-se a Agnaldo, afirmando que já tem uma estratégia.

> Marta: 12 vezes 2 é fácil. Vamos olhar minha estratégia. 10 vezes 2, 2 vezes 2 [registra o resultado 24]. 10 vezes 2 igual a 20, 4 vezes 2 igual a 8, igual a 28.

Marta utiliza conhecimentos que já possui, no caso, a decomposição dos números nas ordens no multiplicando. Segue esta estratégia para obter os demais resultados. Além disso, Marta descreve o procedimento que utilizou. Agnaldo faz os três produtos utilizando este mesmo procedimento (Figura 2).

Figura 2: Registros de Marta e Agnaldo[5]- 1ª parte Tarefa 1.



Fonte: As autoras

Ambos continuam a resolução (Figura 3). Agnaldo registra 10 X 5 = 50, 1 X 5 = 5,

[5] Do lado esquerdo registro da Marta, do lado direito do Agnaldo.

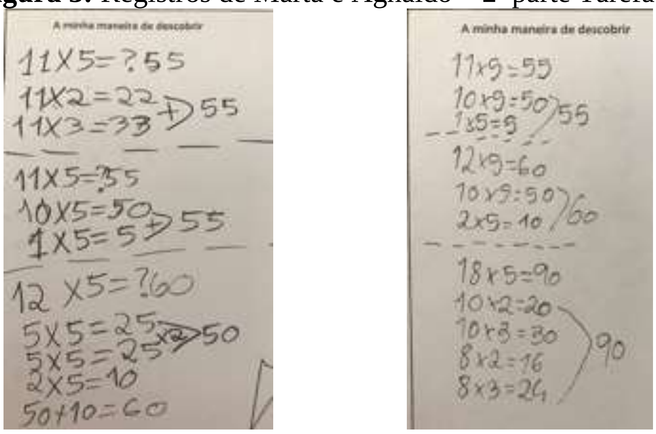
cuja soma dá 55, ainda com a mesma estratégia. Marta opta por uma estratégia diferente, decompondo o multiplicador (ambos utilizam a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição).

> Marta: Vou fazer 11 vezes 5. Agnaldo: vou fazer, olha minha estratégia aqui. 11 vezes 2, 11 vezes 3. Tu não fizeste essa estratégia [indica a folha de Agnaldo].
> Agnaldo: Vou fazer no 18 vezes 5.

Marta faz o produto 12 X 5 para a qual utiliza novamente a estratégia de decomposição do multiplicando: 5 X 5 = 25; 5 X 5 = 25; 2 X 5 = 10; 25 + 25 = 50; 50 + 10 = 60. Agnaldo faz a resolução para o 18 vezes 5, adotando também a estratégia da decomposição, só que a aplica tanto no multiplicando quanto no multiplicador, evidenciando recorrer a conhecimentos anteriores.

> Agnaldo: Olha minha estratégia, olha. [mostra a folha para Marta com o seguinte registro: 10 X 2 = 20; 10 X 3= 30; 8 X 2 = 16; 8 X 3 = 24, cuja soma assinala como 90].

Figura 3: Registros de Marta e Agnaldo – 2ª parte Tarefa1.



Fonte: As autoras

Par 2

Mónica e Bento recorrem à decomposição, optando Mónica por decompor o multiplicando e Bento, o multiplicador (Figura 4).

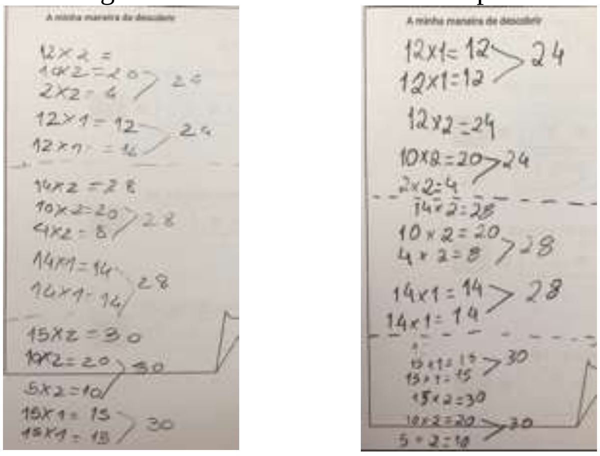
> Mónica: Vamos começar então. 12 vezes 2; 10 vezes 2 igual a 20, 2 vezes 2 igual a 4. Vamos olhar minha estratégia. 24 [registra na folha].
> Bento: Minha estratégia é 12 vezes 1 igual a 12; 12 vezes 1 igual a 12 [registra na folha com a soma 24].
> Mónica: Vamos fazer essas duas. Deixa eu ver essa.
> [Cada um registra a estratégia feita pelo outro].

Seguem para o segundo produto, novamente recorrendo à estratégia da decomposição do multiplicando ou do multiplicador.

> Mónica: A primeira já fizemos, vamos à segunda. 14 vezes 2. 10 vezes o 2 é igual a 20; 4 vezes 2 é igual a 8 que é igual a 28 [faz o registro enquanto fala]. Já está. Agora vamos fazer a próxima conta, que é 14 vezes o 1 que é igual a 14; 14 vezes o 1 que é igual a catorze [registra o resultado 28].

Bento registra as mesmas estratégias.
Mónica: Agora vamos fazer o 30 [referindo-se ao resultado de 15 X 2]. Tu também tens que fazer a do 15 [indica a folha de Bento] que é igual a 30.
Bento: Espera aí [ele está a finalizar alguns registros]. Pronto! 15 vezes 1 é igual a 15; 15 vezes 1 que é igual a 15, é igual a 30 [registra enquanto fala].
Marta: 30. Já fiz. [registra 10 X 2 = 20; 5 X 2 = 10, indicando a soma 30].

Figura 4: Registros de Mónica e Bento[6] – 1ª parte Tarefa 1.



Fonte: As autoras

Iniciam as multiplicações por 5. As estratégias usadas por eles continuam as mesmas, só que agora apenas decompõem o multiplicando.

Ambos os pares identificaram semelhanças entre os casos, ou seja, todas as operações envolviam a multiplicação de um número composto por dezenas e unidades por outro composto apenas por unidades. Diante disso, escolhem um procedimento que, ao ser utilizado com sucesso em uma das operações, é estendido às demais, num processo de generalização.

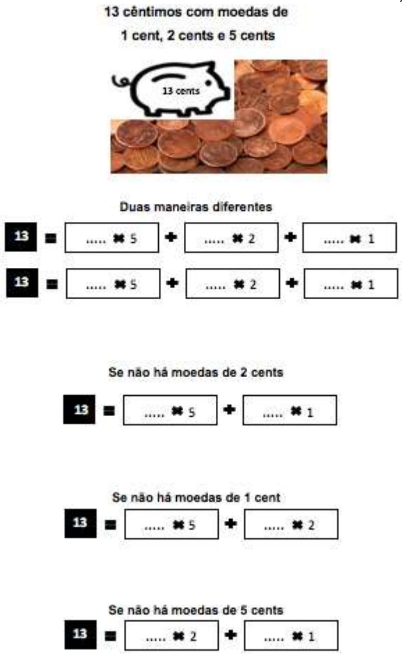
Tarefa 2:

A professora solicita que um aluno leia a tarefa. Em seguida faz uma breve explicação, salientando que o objetivo da Tarefa 2 (Figura 5) é descobrir as maneiras diferentes de se formar os 13 cêntimos. Nesse momento, um dos alunos questiona se podem sobrar cêntimos, a professora esclarece que não. Os alunos começam a resolver.

---

[6] Do lado esquerdo registro da Mónica, do lado direito do Bento.

Figura 5: Tarefa *13 cêntimos com moedas de 1 cent, 2 cents e 5 cents.*



Fonte: As autoras

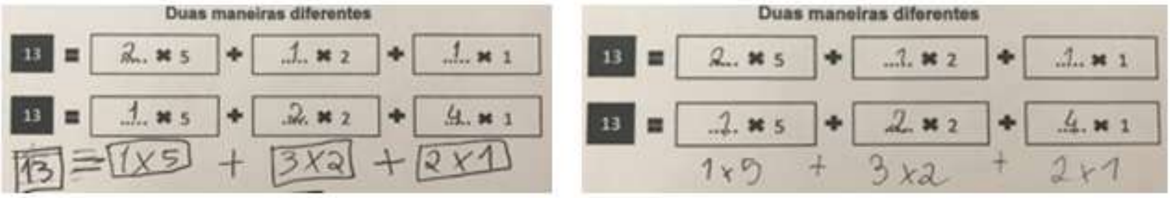
Par 1

Tendo como referência a tarefa anterior, Marta e Agnaldo resolvem esta rapidamente, sem muitos questionamentos (Figura 6).

> Marta: Então 10 [indicando 2 X 5]; 12 [indicando 1 X 2 = 2 que somado ao 10, dá 12]; então aqui também é 1. 1, 1 e 2 [faz o registro].
> Começam a tentar a segunda maneira de obter 13 cêntimos.
> Marta: 5 vezes 2 igual a 10. 1 vezes 5?
> Agnaldo: 1 vezes 5 [ambos registram]. Faltam 8. 2 vezes 2...
> Marta: 4 [ambos anotam 2 x 2 na folha].
> Agnaldo: Então temos 4, então 1 X 4 [fazem o registro].
> Marta: Acho que tem uma terceira maneira [e começa a anotar 1 X 5 + 3 X 2 + 2 X 1]. Também dá.
> Agnaldo: Como?
> Marta: 5 mais 6, 11, com 2, 13 [indica com o lápis cada operação para Agnaldo]. Esse exercício dá de três maneiras.
> Agnaldo anota em sua folha.

Após estabelecer a primeira maneira, Marta percebe que a opção de duas moedas de 2 cêntimos (2 X 5) não é mais válida, então indaga Agnaldo da possibilidade de iniciar com 1 moeda de 1 cêntimo (1 vezes 5?). Agnaldo concorda. Optam por iniciar por 1 X 5, que, para atingir 13, "Faltam 8". Identificam facilmente que precisam distribuir o 8 nas duas multiplicações (2 X 2 + 4 X 1). Essa estratégia possibilita a Marta perceber que há outra maneira de obter os 13 cêntimos.

Figura 6: Registros de Marta e Agnaldo 1ª parte Tarefa 2.



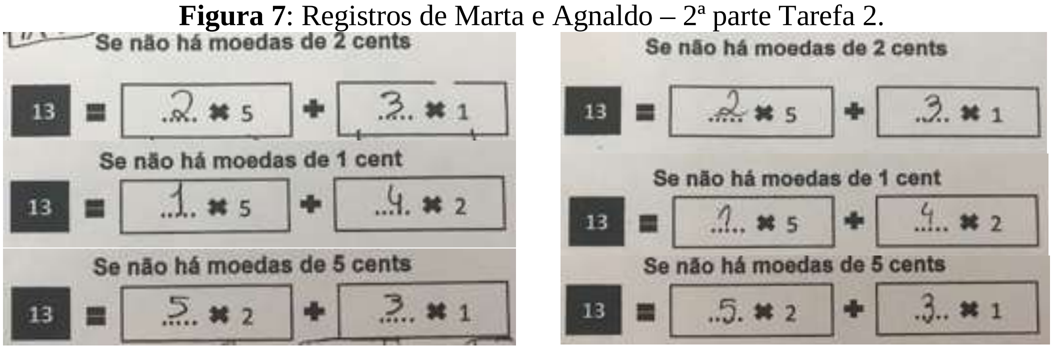
Fonte: As autoras

Continuam a resolução da tarefa (Figura 7).

Agnaldo: Eu já sei [registra 2 X 5 + 3 X 1]. Pronto! [mostra sua folha para Marta] 2 vezes 5 mais 3 vezes 1.
Marta anota rapidamente.
Agnaldo: Agora faltam moedas de 1 cêntimo. 2 vezes 5 [anota na folha].
Marta: Não pode ser! Não pode ser vezes 2 tem que ser vezes 1.
Agnaldo apaga o 2 e escreve o 1.
Agnaldo: 1 vezes 5, 5.
Marta: Agora já temos 5, então 4 vezes o 2 [ambos anotam].
Fazem o último sem comentários.

Novamente Marta entende que não pode usar, quando não há moedas de 1 cêntimo, a multiplicação 2 X 5, pois, já tendo 10 cêntimos, ao multiplicar 1 X 2 terá 12 cêntimos, e ao multiplicar 2 X 2 terá 14 cêntimos, o que, em nenhum dos casos, atende à exigência da tarefa. Embora ela não explicite oralmente essa ideia, ela está subjacente à resposta que dá ao colega "Não pode ser! Não pode ser vezes 2 tem que ser vezes 1".

Figura 7: Registros de Marta e Agnaldo – 2ª parte Tarefa 2.



Fonte: As autoras

Ao terminarem, a professora aproxima-se e pede para eles explicarem o que fizeram.

Marta: Fizemos 2 vezes 5 que era 10, mais 1 vezes 2 que já era 12, depois 1 vezes 1, mais um era 13. Depois aqui fizemos 1 vezes 5 é 5, depois...
Agnaldo: 2 vezes 2 é 4, que daí já era 9, mais 4.
Professora: Sim, e as outras? Não tem moedas de 2 cêntimos?
Marta: 2 vezes 5 é 10, depois 3 vezes 1 é 3, então é 13.
Agnaldo: 1 vezes 5 é igual a 5, mais 4 vezes 2 que é 8. E agora [indicando a última questão] 5 vezes 2 mais 3 vezes 1.
Marta: Essas aqui estão inversas [indica 2 X 5 + 3 X 1 e 5 X 2 + 3 X 1], uma parte está inversa e

a outra está igual. Pois dá na mesma.

Marta e Agnaldo relatam passo a passo o que fizeram, apresentando, em alguns momentos, justificações para suas escolhas ("2 vezes 5 é 10, depois 3 vezes 1 é 3, então é 13"). Marta indica conhecer e aplicar a propriedade comutativa da multiplicação ao afirmar que 2 X 5 e 5 X 2 dão o mesmo resultado. Esta propriedade já tinha sido usada por Agnaldo na resolução da primeira parte da tarefa, quando fez 13 = 1 X 5 + 2 X 2 + 4 X 1, sua fala foi "Então temos 4, então 1 vezes 4", embora use o registro 4 X 1, atendendo ao exigido pela tarefa.

Par 2

Mónica e Bento não tiveram dúvidas e iniciaram prontamente a tarefa.

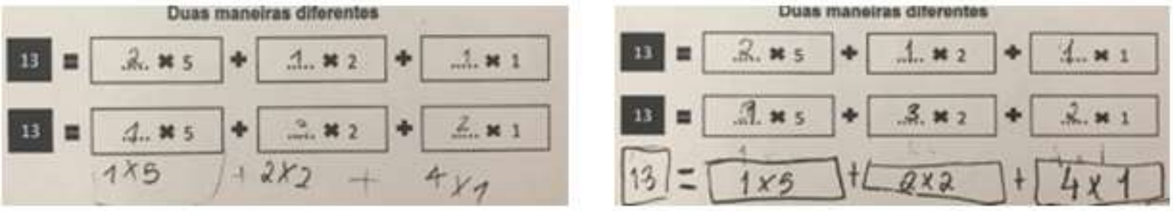
Mónica: Quando fazes vezes 1 é o número que se tem vezes o 1... Oh Bento, já sei! Esses dois números têm que dar 12 [indica as multiplicações por 5 e por 2].
Bento anota 2 X 5 em sua folha. Em seguida o 1 X 2 e 1 X 1.
Mónica: 2 vezes 5, 1 vezes 2 e... 1 vezes 1 é 1 [anota em sua folha].
Bento já fez de outra maneira e mostra Mónica.
Bento: 2 vezes o 5 é 10, 1 vezes o 2 é dois, faz 12, mais 1. 13.
Mónica: Duas maneiras diferentes, são duas maneiras diferentes. Tu fizeste igual.
Bento apaga a segunda maneira.

Neste trecho é possível perceber a intencionalidade de Mónica em usar a multiplicação por 1 como elemento neutro, sobrando 12 para serem distribuídos entre moedas de 5 e de 2. Tal estratégia os auxilia a fazer a primeira maneira. Bento, sem perceber, repete o mesmo procedimento ao fazer a segunda maneira e é corrigido por Mónica. Prosseguem na tarefa.

Bento: Aqui dá 5 [anota 5 X 5 + 3 X 2 + 2 X 1 e mostra para Mónica].
Mónica: Isso dá 25 [indica 5 X 5]. 5 vezes 5 dá 25.
Bento apaga e anota o 1 X 5.
Bento: Agora 5 vezes 1 igual a 5, depois 3 vezes 2 igual a 6, depois 2 vezes 1.
Mónica: Agora fica calmo que eu vou fazer. Não, não, agora eu tenho que fazer aqui o 3 (3 X 1), aqui fica 2 (2 X 2) e aqui fica 1 (1 X 5).
Bento: Não, aqui fica o 2 (2 X 1), aqui fica o 3 (3 X 2) e aqui fica o 1 (1 X 5).
Mónica: Deixa eu ver, 5 mais 3 são 8 .... hum... pois não dá [apaga].
Bento: Aqui dá 2, mais 5 igual a 7, mais 6 igual a 13 [mostra sua folha a Mónica].
Mónica: Pois então eu estava a pensar mal [corrige sua folha].
Bento: Olha aqui, 1 vezes 5 igual a 5, depois 2 vezes 2 igual a 4. 5 mais 4 dá quanto?
Mónica: 9.
Bento: 9 [registra 4 X 1]. Já fizemos outra. Há 3 maneiras, aqui na parte de duas maneiras diferentes.
Mónica: Quais são? [olha a folha de Bento e faz o mesmo registro]. 5, 5 mais 4, 9 mais 4, 13 [diz enquanto indica cada um dos produtos].

Bento inicia a resolução apresentando um cálculo equivocado (5 X 5) e é alertado por Mónica, que apresenta como justificação que o resultado é 25, portanto maior do que o exigido pela tarefa. Após fazer a adequação, apresenta sua resolução a Mónica. Ao fazer sua tentativa, Mónica também apresenta um cálculo equivocado e é corrigida por Bento. Entretanto, Bento apenas relata as operações que fez, o que conduz Mónica a verificar se está correto ou não ("Deixa eu ver, 5 mais 3 são 8 .... hum... pois não dá"), indicando um processo de validação. Na sequência, Bento apresenta a justificação do seu procedimento ("Aqui dá 2, mais 5 igual a 7, mais 6 igual a 13"). Bento encontra outra maneira de se obter 13 cêntimos e compartilha-a com Mónica, evidenciando justificações de que esta maneira também é correta ("Olha aqui, 1 vezes 5 igual a 5, depois 2 vezes 2 igual a 4. 5 mais 4 dá quanto?"). Na sequência anota 4 X 1, que, somado ao 9, totaliza 13 cêntimos (Figura 8).

Figura 8: Registros de Mónica e Bento – 1ª parte Tarefa 2.



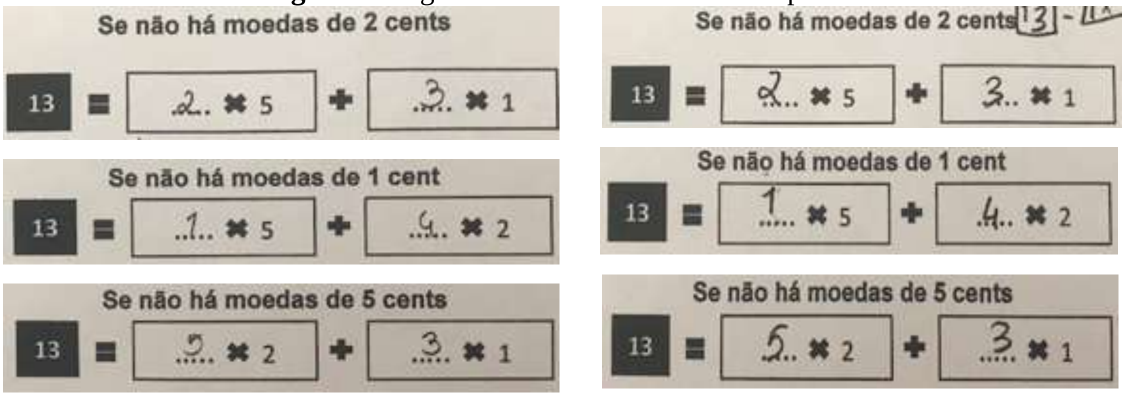
Fonte: As autoras

Passam para a resolução da tarefa quando não há moedas de 1, 2 e 5 cêntimos (Figura 9).

> Mónica: Não pode ser 5 vezes 5 que passa, dá 25 [anota 2 X 5 + 3 X 1]. Pronto, este é fácil.
> Bento olha e anota na sua folha.
> Mónica: Eu vou tentar fazer esta.
> Mónica anota 1 X 5 e fica pensativa um momento.
> Bento: Se não há moedas de 1 cêntimo não é difícil.
> Mónica: 1 X 5, 5 ... encontramos 8 [registra 4 X 2 na folha]. Quanto é 5 + 8? [pergunta a Bento]. É 13 não sabes?
> Bento: Tens razão [registra em sua folha].
> Mónica: E a debaixo?
> Bento: 5 [ambos registram 5 X 2 + 3 X 1].

Neste trecho Mónica percebe, tendo como referência a parte anterior da tarefa, que o 5 X 5 não é uma opção adequada ("Não pode ser 5 vezes 5 que passa, dá 25"), portanto, considera fácil a resolução. Ao mostrar sua estratégia a Bento (1 X 5 + 4 X 2), apresenta uma justificação ("Quanto é 5 + 8? É 13 não sabes?). Ao concordar com ela, Bento faz o mesmo registro.

Figura 9: Registros de Mónica e Bento – 2ª parte Tarefa 2.

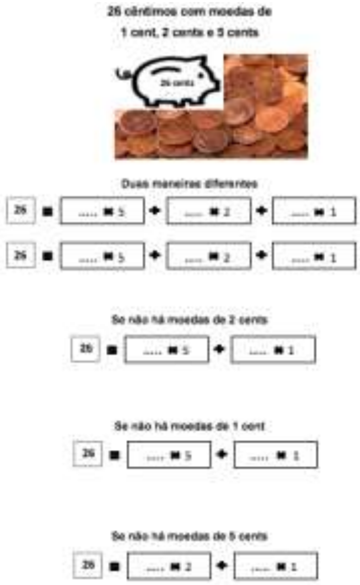


Fonte: As autoras

Tarefa 3:

Na Tarefa 3 (Figura 10), semelhante à Tarefa 2, os alunos precisam encontrar maneiras diferentes para compor 26 cêntimos com moedas de 1, 2 e 5 cêntimos. A professora deu continuidade ao modo de introduzir a tarefa. Os alunos não tiveram dificuldade na compreensão e, um deles, identificou um erro de impressão, que foi corrigido por todos e não causou problemas.

Figura 10: Tarefa *26 cêntimos com moedas de 1 cent, 2 cents e 5 cents.*



Fonte: As autoras

Par 1

Como já haviam feito a Tarefa 2, não tiveram dúvidas em começar. Vão preenchendo sem conversar, num primeiro momento.

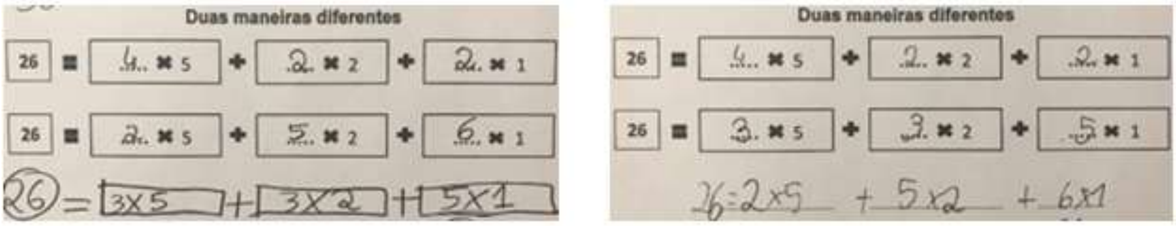
Agnaldo: Já fiz [mostra sua folha a Marta com o registro 4 X 5 + 2 X 2 + 2 X 1].

Marta faz o mesmo registro na sua folha e, em seguida inicia o registro da outra maneira.

> Marta: Eu fiz outra 2, 5, 6 [cujo registro é 2 X 5 + 5 X 2 + 6 X 1. Depois olha para Agnaldo que ainda está fazendo].
> Agnaldo: Vai dar 3 vezes 5, 15, 21, então 5. [registra 3 X 5 + 3 X 2 + 5 X 1].
> Marta: Já fiz tudo.
> Agnaldo: Ainda falta mais uma estratégia [Marta registra a estratégia feita por Agnaldo, que por sua vez registra a feita por ela].

Marta e Agnaldo encontram, rapidamente, três maneiras diferentes para compor 26 cêntimos (Figura 11). Este trecho não apresenta indícios de processos de raciocínio, apenas a descrição dos procedimentos feitos por eles, tendo como referência o que fizeram na tarefa anterior. Era esperado que os alunos estabelecessem alguma relação entre o 13 e o 26 (dobro ou metade) e estendessem essa relação ao efetuar o cálculo (13 = 2 X 5 + 1 X 2 + 1 X 1 e 26 = 4 X 5 + 2 X 2 + 2 X 1), mas isso não ocorreu, pelo menos de forma explícita.

Figura 11: Registros de Marta e Agnaldo – 1ª parte Tarefa 3.



Fonte: As autoras

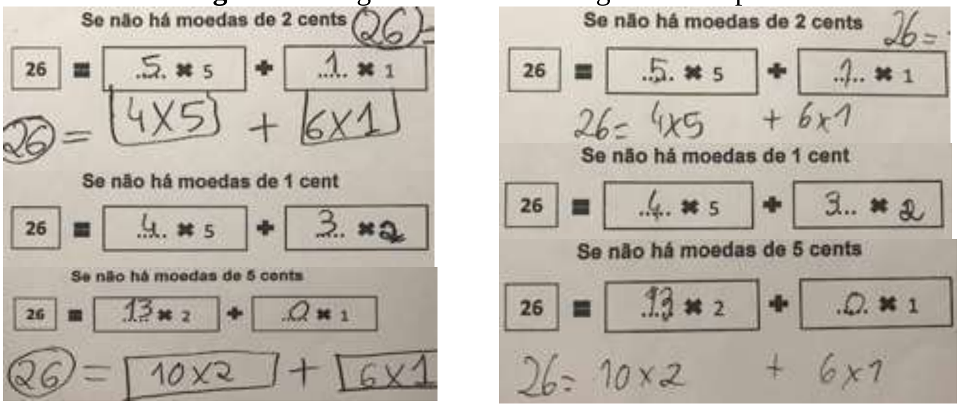
Marta e Agnaldo prosseguem para a próxima parte da tarefa.

> Marta: 5 vezes 5...
> Agnaldo: Olha, 5 vezes 5, 1 vezes 1 [registra 5 X 5 + 1 X 1].
> Marta registra a mesma estratégia de Agnaldo.
> Marta: Espera, quero fazer outro. 4 vezes 5 mais 6 vezes 1.
> Agnaldo registra essa estratégia em sua folha.
> Agnaldo: Agora sem moedas de 1 cêntimo.
> Marta: Não há moedas de 1 cêntimo. Então 5 vezes 4 e depois é 3 vezes 2. [registra enquanto fala].
> Agnaldo: Deixa eu ver, 20 e 6. E agora 26 [faz o mesmo registro].
> Marta: 13 e 0, olha aqui, 13 e 0. [registra 13 X 2 + 0 X 1]
> Agnaldo faz esse registro em sua folha.
> Agnaldo: Vamos fazer outras estratégias.
> Marta: Ó, ó, ó, 10 vezes 2 mais 6 vezes 1.
> Agnaldo: Acabamos! E fizemos muitas estratégias.

Num primeiro momento, Marta e Agnaldo concordam com as resoluções um do outro sem questionamentos. Entretanto, quando Marta apresenta a opção 5 X 4 + 3 X 2, Agnaldo sente a necessidade de analisar se a conjectura apresentada é válida (“Deixa eu ver, 20 e 6. E agora 26”). Só depois é que faz o registro. Portanto, houve um processo de validação feito por

Agnaldo, considerando correto o procedimento apresentado pela colega. Na sequência, Marta recorre a um conhecimento anterior, no caso a propriedade de elemento nulo da multiplicação, para encontrar uma maneira de compor os 26 cêntimos ("13 e 0, olha aqui, 13 e 0"), onde parece haver indícios de raciocínio matemático (Figura 12).

Figura 12: Registros de Marta e Agnaldo – 2ª parte Tarefa 3.



Fonte: As autoras

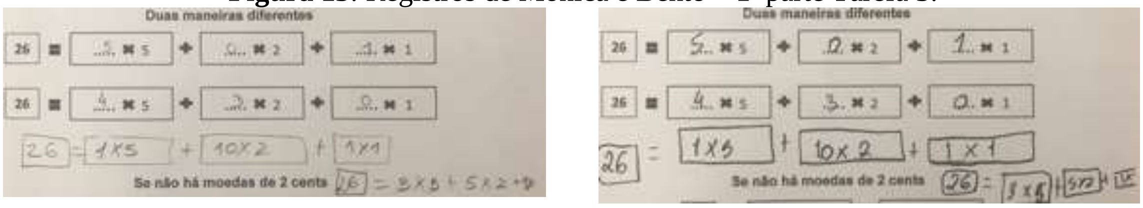
Par 2

Mónica e Bento iniciam a tarefa pela parte "se não há moedas de 2, 1 e 5 cêntimos". Bento registra 4 X 5 + 3 X 2. Em seguida faz sem moedas de 5 cêntimos e mostra a Mónica (8 X 2 + 10 X 1). E faz sem moedas de 2 cêntimos (5 X 5 + 1 X 1). Mónica faz seus registros iguais aos de Bento. Não há discussão nesse momento. Seguem para a primeira parte da tarefa.

> Bento: Já fiz tudo. [5 X 5 + 0 X 2 + 1 X 1 e 4 X 5 + 3 X 2 +0 X 1]
> Mónica: Não, não, ainda não acabei. Não se pode usar o zero.
> Bento: Pode sim, se se quiser.
> Mónica: E por que é que queres usar o zero?
> Bento: Para ser mais fácil.
> Mónica: 5 vezes 5, 0 vezes 2, 1 vezes 1. Eu também usei o zero.
> Bento tenta uma nova estratégia.
> Bento: 1 vezes 5, aqui é 10 vezes o 2, vai dar certo! E 1 X 1. [mostra sua folha para Mónica].
> Mónica: Deixa eu confirmar essa coisa. Então 5, 20, 25... [já constatou que o resultado era 26 e registrou em sua folha].
> Bento: Professora, já fizemos tudo.
> Mónica: Vamos fazer mais aqui. Não consegues mais nenhuma?
> [faz o registro de 5 X 3 + 5 X 2 + 1 X 1].
> Bento olha o registro de Mónica.
> Bento: 5 vezes 3 não há.
> Mónica: É ao contrário [apaga e registra 3 X 5].

Mónica e Bento também não estabelecem, explicitamente, uma relação com a Tarefa 2 (dobro ou metade). Bento recorre ao conhecimento que possui sobre o elemento nulo da multiplicação e usa-o em duas situações. Ao ser questionado por Mónica, ele afirma que usa o zero "Para ser mais fácil", o que prontamente é aceito por Mónica que recorre a este conhecimento para fazer a tarefa ("Eu também usei o zero"). Bento apresenta outra maneira de fazer e, ao mostrar para Mónica, ela opta por validar tal resolução ("Deixa eu confirmar essa coisa. Então 5, 20, 25..."). Mónica revela conhecer a propriedade comutativa da multiplicação, pois realiza o registro de 5 X 3, que prontamente é corrigido por Bento, e, ao perceber o equívoco, afirma "É ao contrário*"* e registra corretamente 3 X 5 (Figura 13).

Figura 13: Registros de Mónica e Bento – 1ª parte Tarefa 3.



Fonte: As autoras

Discussão e conclusão

A análise do trabalho feito pelos alunos e dos diálogos sugerem indícios de raciocínio matemático tomando como base a definição de Jeannotte e Kieran (2017). Para desenvolver suas estratégias de resolução, os alunos basearam-se em conhecimentos anteriores, particularmente, na decomposição de números e no entendimento das estruturas aditivas e multiplicativas e em algumas propriedades da multiplicação, como comutativa, distributiva, elemento neutro e elemento nulo. Além disso, comunicaram com os pares suas resoluções, algumas vezes apenas relatando o procedimento adotado, mas em outras apresentando uma justificação, por exemplo, *"*15 vezes 1 é igual a 15; 15 vezes 1 que é igual a 15, é igual a 30".

Em relação aos processos de raciocínio utilizados, ao elaborar uma estratégia, os alunos participantes formularam conjecturas, mesmo que de forma inconsciente, pois, ao definir um procedimento a ser usado, por exemplo, a decomposição do multiplicando, julgaram que este caminho os conduziria a um resultado. Para Jeannotte e Kieran (2017), este processo leva à formulação de narrativas que têm um valor epistêmico de provável ou possível. No início da tarefa, Marta fez a seguinte afirmação "10 vezes 2 igual a 20, 4 vezes 2 igual a 8, igual a 28*"*. Ao perceber que sua estratégia a conduzia a um resultado correto, utiliza-a em todas as demais multiplicações.

Marta faz uma nova conjectura, de acordo com Morais, Serrazina e Ponte (2018), ao perceber que pode decompor também o multiplicador. Embora ela não a enuncie, tal conjectura tem como base o conhecimento de que, ao multiplicar um número por 2, depois multiplicar esse mesmo número por 3 e somar os resultados obtém o mesmo resultado do que multiplicar o número por 5, que corresponde à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Além disso, os alunos generalizam a ideia matemática de que, ao decomporem os números nas ordens (por exemplo, em 10 + 2) fazendo a multiplicação a partir da decomposição, obtém-se o mesmo resultado, tratando-se, portanto, de uma estratégia válida, usando de modo não explícito a propriedade distributiva. E como expressão dessa generalização, resolvem todas as multiplicações seguindo esta ideia, o que corresponde à ideia de generalizar defendida por Jeannotte e Kieran (2017) ou ainda por Lannin, Ellis e Elliot (2011). Entretanto, os alunos não apresentam uma justificação para a generalização.

Em alguns trechos, foi possível observar o processo de justificar, de acordo com Jeannotte e Kieran (2017), como por exemplo, na Tarefa 2, quando Mónica justifica a Bento que aquela resolução não é pertinente ("Não pode ser 5 vezes 5 que passa, dá 25"). Em outro trecho, Marta apresenta a justificação da sua resolução para Agnaldo ("2 vezes 5 é 10, depois 3 vezes 1 é 3, então é 13"). Ou ainda, a justificação apresentada por Bento quando Mónica contesta sua resolução ("Aqui dá 2, mais 5 igual a 7, mais 6 igual a 13").

Alguns trechos sugerem que os alunos recorreram ao processo de validação, ao conferir se o procedimento apresentado era válido ou não, o que vai ao encontro do definido por Jeannotte e Kieran (2017), como sendo o processo de validar. Por exemplo, na Tarefa 3, Agnaldo valida a estratégia utilizada por Marta ("Deixa eu ver, 20 e 6. E agora 26") ou quando Mónica valida a resolução de Bento ("Deixa eu confirmar essa coisa. Então 5, 20, 25..."). Somente após a validação é que ambos aceitam anotar em suas folhas.

Salientamos que as tarefas, elaboradas numa perspectiva exploratória, bem como o seu desenvolvimento em pares, apoiaram o raciocínio matemático. De acordo com Morais, Serrazina e Ponte (2018, p. 556), "é desejável que os estudantes se tornem progressivamente conscientes da necessidade de justificar e do que torna uma justificação válida, rejeitando declarações baseadas na autoridade (de um professor, um colega ou um livro didático)". Os processos explicitados conduziram os alunos a uma atividade intelectual rica, pois recorreram a conhecimentos anteriores para apresentar estratégias diferentes de resolução, sem recorrer a uma autoridade externa, como livros ou a professora.

Agradecimentos: Agradecemos à Capes pelo apoio recebido pela primeira autora na realização desta pesquisa, por meio do Programa PVEX (Programa de Professor Visitante no Exterior)/Processo nº 88881.170306/2018-01.

Referências bibliográficas

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, p. 1 – 16, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 2011.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 2, p. 1 – 18, 2017.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, v. 32, n. 62, p. 781 – 801, 2018.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 4, p. 552 – 570, 2018.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2017. (Obra original em inglês publicada em 2014).

PONTE, J. P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, v. XXV, n. 2, p. 77 – 98, 2016.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, v. 7, n. 2, p. 355 – 377, 2012.

STYLIANIDES, G. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 11, n. 4, p. 258-288, 2009.

Recebido em: 28 de Agosto de 2019
Aprovado em: 13 de abril de 2020