revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PENSAMENTO GEOMÉTRICO: EM BUSCA DE UMA CARACTERIZAÇÃO À LUZ DE FISCHBEIN, DUVAL E PAIS[1]

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.18.152-179

André Pereira da Costa[2]

Resumo: Este artigo, de natureza teórica, tem por objetivo construir uma caracterização de pensamento geométrico. Em nosso entendimento, esse texto é importante visto que não há uma unanimidade entre os estudiosos acerca de como se constitui essa forma de pensar em Matemática. Nessa direção, decidimos elaborar uma caracterização dessa instância de pensamento tendo por base as discussões teóricas de Efraim Fischbein, Raymond Duval e Luiz Carlos Pais, três autores que realizaram pesquisas relevantes sobre o assunto. Assim, concluímos que o pensamento geométrico é a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, de aplicar de modo coerente os instrumentos geométricos na resolução de problemas. É a capacidade de compreender a natureza dos fenômenos e inferir sobre eles, de identificar e perceber a importância da Geometria como uma ferramenta para entendimento do mundo físico e como um modelo matemático para compreensão do mundo teórico.
Palavras-chaves: Geometria. Caracterização. Pensamento geométrico.

GEOMETRICAL THINKING: IN SEARCH OF A CHARACTERIZATION IN THE LIGHT OF FISCHBEIN, DUVAL AND PAIS

Abstract: This article, of theoretical nature, aims to construct a characterization of geometric thinking. In our understanding, this text is important since there is no unanimity among scholars on how it can cause this way of thinking mathematics. So, in this direction, we decided to elaborate a characterization of this instance of thought based on the theoretical discussions from Efraim Fischbein, Raymond Duval and Luiz Carlos Pais, three authors who conducted relevant researches on the subject. Thus, we conclude that geometric thinking is the mental capacity to construct geometric knowledge, and consistently apply geometric instruments in the solution of problems. It is the ability to understand the nature of phenomena and infer from them, to identify and realize the importance of geometry as a tool for understanding the physical world and as a mathematical model to understand the theoretical world.
Keywords: Geometry. Characterization. Geometrical thinking.

Introdução

Atualmente, podemos evidenciar que o pensamento geométrico é o ponto central em uma diversidade de pesquisas desenvolvidas no campo da educação geométrica no Brasil e no exterior (LABORDE, 1985; BISHOP, 1989; NASSER, 1990; DEL GRANDE, 1990; BLANCO, 2014; etc.). Embora exista uma concordância acerca da relevância de promover o desenvolvimento desse pensamento nos discentes do ensino básico, esses estudos não apresentam uma definição clara para esse termo, perdurando uma falta de consenso acerca do

[1] Trata-se de um recorte da tese de doutorado do autor (PEREIRA DA COSTA, 2019).
[2] Doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professor da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), Barreiras, Bahia, Brasil. E-mail: andre.costa@ufob.edu.br

significado dessa instância do pensamento matemático.

Talvez, a falta de concordância sobre a caracterização do pensamento geométrico esteja fortemente ligada à própria natureza evolutiva da Geometria ao grande número de objetos geométricos referentes ao seu campo conceitual, à mobilização de diferentes experimentos matemáticos e, ainda, pelas diferentes maneiras prováveis de considerar o pensamento em geral (ALMEIDA, 2016).

Perante essas circunstâncias, optamos por escrever esse artigo que tem por objetivo construir uma caracterização do pensamento geométrico a partir das discussões teóricas produzidas por Fischbein (1993), Duval (1995) e Pais (1996). Em nosso entendimento, essa caracterização contribuirá com o desenvolvimento de pesquisas futuras em Educação Matemática que optarem por analisar, por exemplo, o funcionamento cognitivo do pensamento geométrico de diferentes sujeitos ao resolverem problemas em Geometria, ao longo da escolarização.

Pensamento geométrico na compreensão de Efraim Fischbein

Um pesquisador que tratou a respeito do processo de formação do pensamento geométrico é Efraim Fischbein (1993), ao introduzir a noção de conceito figural. Na Geometria, os conceitos dependem da fusão do aspecto figural e aspecto conceitual, isto é, o principal argumento do autor é que a Geometria pode ser compreendida a partir de entidades mentais (as chamadas figuras geométricas) que possuem ao mesmo tempo características conceituais e figurativas.

Para o investigador, uma esfera geométrica é uma entidade abstrata, formalmente determinável, como todo conceito autêntico. Além disso, possui propriedades figurativas, antes de tudo, uma certa forma. A idealidade e a perfeição absoluta de uma esfera geométrica não podem ser verificadas no mundo real.

Nesta associação entre conceito e figura, como é revelada em entidades geométricas, é o elemento imagem que estimula novas orientações do pensamento geométrico, mas existem as restrições lógicas e conceituais que controlam o rigor formal do processo. Então, Fischbein (1993) chama as figuras geométricas de conceitos figurais devido à sua natureza dupla.

Nas diversas teorias da Psicologia, conceitos e imagens mentais são diferenciados, em geral. Ao definir um conceito, o autor cita Pieron (1957, p.72): “representação simbólica (quase sempre verbal) usada no processo de pensamento abstrato e que possui um significado geral correspondente a um conjunto de representações concretas em relação ao que eles têm em comum”. Segundo Fischbein (1993), o que caracteriza então um conceito é o fato dele expressar uma ideia, uma representação geral, o ideal de uma classe de objetos, com base em suas características comuns.

Com relação à imagem mental, o autor a indica como uma representação sensorial de um objeto ou fenômeno. O conceito de metal é a ideia geral de uma classe de substâncias que tem em comum uma série de propriedades: condutividade elétrica, entre outras. A imagem de um objeto metálico é a representação sensorial do objeto respectivo (incluindo cor, magnitude, etc.).

Como apontado por Fischbein (1993), conceitos e imagens são classificados em duas categorias de entidades mentais basicamente distintas, em toda a teoria cognitiva real. Para ele, até mesmo a Teoria Proposicional, que considera que todos os tipos de informação são codificados finalmente na mesma lógica proposicional, remete-se a imagens e conceitos como duas entidades mentais distintas.

Ao provar que dois lados (AB e AC) de um triângulo isósceles (ABC) são congruentes, o pesquisador sinaliza que nesse tipo de prova se faz uso de certa quantidade de conhecimentos expressa de modo conceitual: os dois segmentos de reta que formam os lados AB e AC foram considerados como congruentes. Nessa situação, foram utilizados os conceitos de ponto, lado, ângulo e triângulo. Entre esses usos conceituais, foi mencionado o processo de reversão. Todavia, simultaneamente, foi usada a informação figurativa e as operações representativas, como a ideia de separar o triângulo de si mesmo, invertendo-o e superpondo-o sobre o original.

Fischbein (1993) indica que estamos lidando, nesse caso, com uma mistura de duas entidades independentes e definidas, que são ideias abstratas (conceitos), por um lado, e representações sensoriais que refletem algumas operações concretas, por outro. Ainda, sobre a prova da congruência de dois lados de um triângulo isósceles, o investigador explica:

> [...] consideremos o núcleo da prova, que é a operação de separar o triângulo ABC de si mesmo e de o reverter. Os conceitos não podem ser destacados, invertidos e combinados. Tratamos aqui de descrições de operações aparentemente práticas. Mas, na realidade, é possível separar um objeto de si mesmo? Certamente não. Tal operação não tem um significado concreto. Nós lidamos com um mundo ideal, com significados ideais. Os objetos a que nos referimos – pontos, lados, ângulos e as operações com eles – têm apenas uma existência ideal. Eles são de natureza conceitual. Ao mesmo tempo, eles têm uma natureza figurativa intrínseca: somente ao se referir a imagens, podemos considerar operações como desprendimento, reversão ou superposição (FISCHBEIN, 1993, p.140, tradução nossa).

Segundo o autor, o triângulo e seus elementos não podem ser considerados como conceitos puros ou apenas imagens comuns. As operações utilizadas na prova não podem ser realizadas com conceitos puros ou com objetos reais. Contudo, essas entidades e operações participam de uma prova formal, lógica, matematicamente válida e, simultaneamente, a conclusão (a igualdade dos dois ângulos internos associados aos vértices B e C) pode ser verificada praticamente.

Fischbein (1993) afirma que as entidades – pontos, lados (segmentos de reta), ângulos, o próprio triângulo e as operações com eles – apresentam qualidades conceituais. No raciocínio matemático, eles não são referidos como objetos materiais ou como desenhos. Os objetos materiais (sólidos ou desenhos) são apenas modelos materializados das entidades mentais com as quais o matemático trata. Apenas em um sentido conceitual, pode-se considerar a perfeição absoluta de entidades geométricas: linhas retas, circunferências, quadrados, cubos, etc.

Além disso, de acordo com o pesquisador, essas entidades geométricas não possuem correspondentes de material autêntico. Pontos (objetos sem dimensões), linhas (objetos unidimensionais), planos (objetos bidimensionais) não existem, não podem existir na realidade. Os objetos reais de nossa experiência prática são necessariamente tridimensionais. Mas, mesmo o cubo ou a esfera, a que o matemático se refere, não existem na realidade física, embora sejam representações tridimensionais. Esses, também, são meras construções mentais que não devem possuir qualquer realidade substancial.

Concordamos com o autor, ao considerar que os objetos geométricos não existem no mundo físico, mas, sim, o que podemos encontrar são as representações desses objetos a partir de objetos físicos. Por exemplo, um dado pode parecer um cubo, mas não é. O dado é um objeto real, do mundo físico, mas que matematicamente pode ser analisado com uma representação tridimensional do cubo (que é um objeto geométrico tridimensional abstrato, logo, uma construção mental).

A distinção entre o objeto geométrico (construção mental) e sua representação (objeto físico) desempenha papel importante ao desenvolvimento do pensar em Geometria. Uma pessoa que ainda não consegue perceber essa diferença, geralmente, não alcançou o pensamento geométrico de natureza avançada. Nessa direção, o campo geométrico é considerado como uma ferramenta para compreensão do mundo físico. Logo, a Geometria não é vista como um modelo teórico para o estudo dos objetos matemáticos do mundo platônico.

Ademais, Fischbein (1993) aponta que essas construções são representações gerais, como qualquer conceito, e, jamais, cópias mentais de objetos particulares e concretos. Por exemplo, quando desenhamos um determinado triângulo ABC em uma folha de papel para verificar algumas de suas propriedades (como a de suas alturas para serem concorrentes), não nos referimos ao desenho específico respectivo, mas a uma determinada forma que pode ser a de uma infinita classe de objetos.

Segundo o autor, mesmo a forma particular desenhada com os lados e ângulos dados, pode ser a de uma infinidade de objetos. Na verdade, se lida com uma hierarquia de formas, de uma aparentemente particular (mas, de fato, corresponde a uma infinidade de objetos possíveis) à categoria universal de triângulos. Idealidade, abstração, perfeição absoluta, universalidade são propriedades que fazem sentido no domínio dos conceitos.

De acordo com o investigador, as propriedades das figuras geométricas são impostas ou derivadas de definições no domínio de um determinado sistema axiomático. Com isso, uma figura geométrica tem uma natureza conceitual. Por exemplo, um quadrado não é uma imagem desenhada em uma folha de papel, mas, sim, uma forma controlada por sua definição (embora possa ser inspirada por um objeto real). Um quadrado é um retângulo com lados iguais.

A partir dessas propriedades, pode-se continuar a descobrir outras propriedades do quadrado (congruência de ângulos que são todos retos, diagonais congruentes, entre outros). Assim, será possível perceber que o quadrado é todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

Fischbein (1993) pontua que uma figura geométrica pode então ser descrita como tendo propriedades intrinsecamente conceituais. Contudo, uma figura geométrica não é um mero conceito, mas, sim, uma imagem visual. Ela possui uma propriedade que os conceitos usuais não possuem, ou seja, inclui a representação mental da propriedade espacial.

Ainda, o autor afirma que os conceitos não se transformam, não se movem e as imagens, como tal, não possuem a perfeição, a generalização, a abstração, a pureza que se supõe ao realizar os cálculos (por exemplo, calcular a distância percorrida por um veículo, conhecendo o raio das rodas, o número de rotações por unidade de tempo e o tempo gasto).

Como mencionado pelo pesquisador, o triângulo, a circunferência, o quadrado, o ponto, a linha, o plano e, em geral, todas as figuras geométricas, representam construções mentais que possuem propriedades simultaneamente conceituais e figurativas. Certamente, quando imaginamos uma circunferência, imaginamos uma circunferência desenhada (incluindo, por exemplo, a cor da tinta) e não a circunferência ideal e perfeita.

Segundo o autor, a circunferência matemática, que é o objeto de nosso raciocínio matemático, não tem cor, nenhuma substância material, nenhuma massa etc. e é supostamente ideal e perfeito. Esse objeto tem todas as propriedades de um conceito, ele pode participar, como está, em um raciocínio matemático e isso, apesar de ainda incluir a representação da propriedade espacial.

Para Fischbein (1993), os objetos de investigação e manipulação em raciocínio geométrico são então entidades mentais, chamadas por conceitos figurais, que refletem propriedades espaciais (forma, posição, magnitude) e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais (como a idealidade, a abstração, a generalidade e a perfeição).

O autor não pretende afirmar que a representação que temos em mente, ao imaginar uma figura geométrica, é desprovida de qualquer qualidade sensorial (como a cor), exceto as propriedades espaciais. Mas ele afirma que, enquanto operamos com uma figura geométrica, agimos como se nenhuma outra qualidade contasse. Deve ficar claro que a fusão entre conceito e figura em raciocínio geométrico expressa apenas uma situação ideal e extrema. Geralmente não alcançada absolutamente devido a restrições psicológicas.

O investigador indica que o pensamento geométrico inclui uma interação permanente entre imagens e conceitos, tanto em situações cotidianas como científicas. O desenvolvimento dessa forma de pensar em Matemática é determinado essencialmente por construções conceituais (simbolizadas ou mediadas por meios imaginários) ou vice-versa.

Logo, o pensamento geométrico é a capacidade que permite uma pessoa compreender a Geometria composta por entidades mentais, que têm características conceituais e figurativas. É o pensamento que possibilita perceber uma figura geométrica como uma imagem visual por meio da sua representação mental. Essa representação é construída a partir das propriedades conceituais e figurativas.

Nesse processo, o sujeito encara de fato como um jogo em que as redes conceituais ativas interagem com fontes imaginativas. Além disso, Fischbein (1993) admite que, no decurso dessa interação, os significados mudam de uma categoria para a outra, imagens que obtêm significado e conceitos mais generalizados, em grande parte enriquecendo suas conotações e seu poder combinacional.

Fischbein (1993) considera três categorias de entidades mentais quando se refere às figuras geométricas: a definição, a imagem (baseada na experiência perceptivo-sensorial, como a imagem de um desenho) e o conceito figurativo. O conceito figurativo é uma realidade mental, é a construção tratada pelo raciocínio matemático no domínio da Geometria. É desprovido de propriedades concreto-sensoriais (como cor, peso, densidade, etc.), mas exibe propriedades figurativas.

De acordo com o autor, essa construção figurativa é controlada e manipulada, em princípio sem resíduos, por regras e procedimentos lógicos no âmbito de um determinado sistema axiomático. A dificuldade em aceitar a existência desse tipo de entidades mentais é determinada pelo fato de que estamos diretamente conscientes apenas da representação mental (incluindo várias propriedades sensoriais como a cor) e do conceito correspondente.

O investigador sinaliza que é necessário um esforço intelectual para entender que as operações matemáticas e lógicas manipulam apenas uma versão purificada da imagem, o conteúdo espacial-figurativo da imagem.

Como indicado pelo pesquisador, na manipulação de palavras em uma atividade verbal, os sons (ouvidos ou expressos) são representantes externos, materiais de significado. O significado está além da materialidade da palavra expressa: o significado é uma ideia fixada por um complexo de relacionamentos. O conceito figural também possui sentido.

Segundo o investigador, a particularidade desse tipo de significado é que ele inclui a figura como uma propriedade intrínseca. O significado autêntico da palavra circunferência em Geometria, como é manipulado pelo nosso processo de raciocínio, não é redutível a uma definição puramente formal. É uma imagem inteiramente controlada por uma definição.

Para o autor, o termo “figura” é ambíguo e pode denotar uma grande variedade de significados. No seu texto, “figura” refere-se apenas às imagens espaciais. Normalmente, uma figura possui uma certa estrutura, uma forma.

Segundo Fischbein (1993), as figuras geométricas correspondem a esta descrição, mas algumas especificações devem ser adicionadas: (a) uma figura geométrica é uma imagem mental, cujas propriedades são completamente controladas por uma definição; (b) um desenho não é a própria figura geométrica, mas uma concretização gráfica ou materialização; (c) a imagem mental de uma figura geométrica é, usualmente, a representação do modelo materializado dela.

Ele considera que a figura geométrica em si é apenas a ideia correspondente que é a entidade figural abstrata, idealizada e purificada, determinada estritamente pela sua definição.

Ao analisar a diferença entre as ciências empíricas e a Geometria, Fischbein (1993) argumenta que:

> [...] a diferença entre as ciências empíricas e a geometria, a este respeito, é que, na geometria, as imagens podem ser controladas exaustivamente por conceitos enquanto nas ciências empíricas não são. Nas ciências empíricas, o conceito tende a se aproximar da realidade existente correspondente, enquanto na matemática é o conceito, por meio da sua definição, que determina as propriedades das figuras correspondentes. Isso leva a uma consequência fundamental. Todo o processo investigativo do matemático pode ser realizado mentalmente, de acordo com um determinado sistema

> axiomático, enquanto o cientista empírico deve, mais cedo ou mais tarde, retornar a fontes empíricas (FISCHBEIN, 1993, p.149, tradução nossa).

Então, com fundamento na discussão de Fischbein (1993), o pensamento geométrico é caracterizado pela interação entre dois aspectos: o figurativo e o conceitual. Nessa direção, em nosso entendimento, podemos considerar que o pensamento geométrico pode ser definido com a capacidade mental que permite considerar a Geometria como um conjunto de entidades mentais (as chamadas figuras geométricas) que possuem simultaneamente características conceituais e figurativas. Essas características interagem entre si.

3.2 Pensamento geométrico na compreensão de Raymond Duval

Raymond Duval (1995) fornece uma análise do pensamento geométrico a partir de uma abordagem cognitiva e de um ponto de vista perceptual. Dessa forma, baseando-se na sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica – TRRS, ele apresenta um recurso analítico no formato de um quadro refinado para analisar a semiótica da Geometria.

A TRRS investiga o funcionamento cognitivo implicado, sobretudo, na atividade vinculada à Matemática e no contexto complexo referente à aprendizagem do saber matemático. Duval (1995) percebeu que muitos estudantes apresentam dificuldades conceituais de aprendizagem relacionadas à Matemática, assim, ele passou a investigar sistematicamente tais dificuldades em uma perspectiva cognitiva. Então, para o autor, a descrição do funcionamento cognitivo possibilita a compreensão com significado dos objetos matemáticos pelo aluno.

Segundo o pesquisador o aspecto crucial à compreensão matemática é a diferenciação do objeto matemático de sua representação. Geralmente, na sala de aula da escola básica, o estudante considera que a representação do objeto matemático é o próprio objeto em si mesmo, como consequência disso, ele não constrói uma compreensão com significado.

Por exemplo, o desenho de um triângulo na folha do caderno é uma representação, de natureza geométrica, mas não o próprio objeto geométrico triângulo em si. Esse objeto é uma idealização, uma construção mental. Todavia, são as representações que possibilitam o acesso aos objetos da Matemática.

Nessa situação, segundo Fischbein (1993), estamos diante de uma combinação de duas entidades definidas e autônomas: o conceito (ideias abstratas) e as representações sensoriais (que indicam algumas operações concretas). Para Duval (1995), o conceito corresponde ao objeto geométrico, que é uma construção mental de natureza platônica, enquanto que as representações sensoriais consistem em um modelo de representação desse objeto matemático.

Para Duval (1995), as representações dos objetos matemáticos podem ser classificadas em três categorias: mentais, internas (ou computacionais) e semióticas. As representações mentais são formadas por uma coleção de imagens e pontos de vista que uma pessoa apresenta, relacionados a um objeto ou a um cenário.

As representações internas são marcadas pela realização de uma atividade de modo automático, buscando promover um resultado moldado ao cenário. Por fim, as representações semióticas consistem em construções formadas pela aplicação de signos derivados a um sistema de representação, que apresentam uma complexidade de sentido e lógica funcional.

Duval (1995) destaca que as representações semióticas são fundamentais à atividade cognitiva do pensamento do ser humano, sendo ainda responsáveis por comunicar, isto é, deixar as representações perceptíveis e disponíveis às pessoas. Desse modo, essas representações exercem uma função indispensável na formação do pensamento em Matemática.

Conforme o autor, essa importância se justifica pelo fato de que os objetos matemáticos devem ser tratados a partir de um sistema de representação, além disso, tais objetos não são visíveis, são produções da nossa cognição. Logo, necessitam desses sistemas para sua designação.

Discussão semelhante pode ser encontrada em Fischbein (1993) ao considerar que os objetos matemáticos são construções mentais, logo, não existem na realidade física. Desse modo, os objetos físicos são representações tridimensionais utilizadas pelo matemático no estudo dos objetos de natureza matemática, presentes apenas no mundo platônico.

Duval (1995) considera que a construção dos conhecimentos em Matemática está fortemente atrelada à variedade de registros de representação. Para o autor, o registro define-se como um "campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios" (DUVAL, 2012, p.1, *tradução de Méricles Thadeu Moretti*).

No caso específico das representações semióticas, no campo matemático, existe uma ampla diversidade dessas representações, as quais Duval (1995) organizou em quatro grupos de registros: a língua natural (associações verbais e conceituais), as escritas algébricas e formais (sistemas de escritas numéricas, algébricas, simbólicas e cálculo), as representações gráficas (gráficos cartesianos) e figuras geométricas (planas ou em perspectivas).

Na TRRS, o autor destaca duas operações cognitivas importantes para compreensão do funcionamento cognitivo, especificamente, no estudo dos objetos em Matemática: o tratamento e a conversão. Para Duval (1995), o tratamento consiste em uma modificação que ocorre dentro de um mesmo registro, enquanto que a conversão é a mudança da representação de um objeto matemático para outra representação desse próprio objeto. Então, a partir dessas alterações, que possuem diferenças, podemos realizar uma análise refinada do ensino e da aprendizagem da Geometria.

Como ilustração dessas modificações, consideremos, por exemplo, uma atividade relacionada à orientação espacial, na qual, em uma turma do quinto ano do ensino fundamental brasileiro, os estudantes recebem do professor o mapa do bairro da escola. Ao marcarem o percurso que realizam de casa até a escola, certamente, cada estudante apresentará um resultado diferente do seu colega, ou seja, diferentes tratamentos produzirão a mesma representação gráfica, no caso, o mapa fornecido pelo docente.

Em um segundo momento, os estudantes registram na folha do caderno o modo como realizam o percurso a partir da leitura do mapa. Nessa fase, os discentes fazem a conversão, isto é, a mudança da representação gráfica (o mapa) para a língua natural (a descrição no caderno). Nessa situação, o objeto geométrico evidenciado é o de “orientação espacial” e para que a aprendizagem seja relevante, é necessário que o docente oriente para que os alunos realizem variados tratamentos e conversões.

Duval (1995) ressalta que o tratamento se refere ao modo e não ao conteúdo do objeto em Matemática. Para o autor, a conversão abrange diferentes representações semióticas de um mesmo objeto matemático, então, demanda o reconhecimento da distinção entre o modo e conteúdo de uma representação semiótica.

Além disso, como sinalizado pelo pesquisador, a conversão é uma operação mental complexa, que envolve muito mais do que uma associação predefinida entre nomenclaturas e figuras. Para que uma pessoa realize essa operação, ela deve articular as variáveis cognitivas específicas de cada registro de representação semiótica.

A respeito dessa complexidade, Pirola (2012, p.37) indica que:

> [...] a operação de conversão tem como característica conservar a referência ao mesmo objeto matemático. Para que o sujeito não confunda o objeto a ser estudado com o conteúdo de sua representação, é necessário dispor de, ao menos, dois registros de representação, de modo que esses dois sejam percebidos como representando o mesmo objeto. Também é preciso que o sujeito seja capaz de converter, de transitar entre os registros.

Segundo Duval (1995), a passagem pelos vários registros de representação deve ser complementada com a coordenação desses registros durante a solução de uma atividade ou de um problema em sala de aula. Coordenar provoca reconhecer o objeto em Matemática nos diversos registros que os representam, além de compreender que tais registros se completam e manifestam atributos e propriedades matemáticas do objeto.

De acordo com o pesquisador francês, para compreender Matemática, inicialmente, é necessário que o estudante coordene no mínimo dois registros de representação semiótica, relacionados a um certo objeto.

Nessa direção, nos diversos cenários de sala de aula da escola básica, os professores de Matemática devem organizar as situações didáticas de forma que os estudantes vivenciem e coordenem vários registros de um objeto matemático nas atividades. Nesse sentido, a formação conceitual desse objeto ocorrerá quando os estudantes estabelecerem a coordenação dos registros, assim, eles compreendem as especificidades de cada campo de representação semiótica do objeto em Matemática evidenciado na aula.

Tanto Fischbein (1993) como Duval (1995) sinalizam que as figuras geométricas são importantes à aprendizagem em Geometria dos estudantes do ensino básico. No caso do primeiro autor, a figura geométrica é uma imagem mental (representação do modelo materializado dessa figura), cujas propriedades são integralmente controladas por uma definição. Enquanto que, para o segundo pesquisador, as figuras geométricas compõem um registro de representação semiótica relacionado a um objeto matemático.

Em relação à Geometria, Duval (1995) introduz três processos cognitivos imprescindíveis à aprendizagem geométrica dos estudantes da escola básica: visualização, construção e raciocínio.

A visualização é formada pelo estudo de natureza heurística de um cenário sofisticado, enquanto que a construção é a produção de configurações que constituem um modelo no qual os objetos em Matemática são conectados aos procedimentos representados e aos produtos obtidos.

Por fim, o raciocínio é o processo discursivo utilizado em provas e justificativas. Como indica o investigador, cognitivamente um estudante torna-se proficiente em Geometria a partir da articulação sinérgica desses três processos.

Um importante itinerário para a compreensão de como o aluno aprende Geometria, sobretudo quando ele tem contato com as figuras geométricas, é por meio das apreensões geométricas, propostas por Duval (1995), que, em nossa compreensão, consistem em um modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico: apreensão perceptiva, apreensão discursiva, apreensão operatória, apreensão sequencial.

A apreensão perceptiva possibilita a identificação ou o reconhecimento, rapidamente, de uma forma (ou objeto) representada no plano ou no espaço. Epistemologicamente, tem o papel de identificar os objetos de duas ou de três dimensões. Tal tarefa é executada a partir de tratamentos de natureza cognitiva, realizados de modo automático, logo, sem consciência. Esse tipo de apreensão refere-se à primeira impressão visual e com a leitura dos formatos da figura em um cenário da Geometria.

A apreensão sequencial é marcada pela construção de uma figura geométrica, ou ainda, pela descrição dessa construção. Ela corresponde à ordem de como ocorre a produção da figura, então, não depende somente das propriedades geométricas vinculadas à figura, mas de demandas de natureza técnica dos instrumentos empregados (software, compasso, régua, etc.).

A apreensão discursiva refere-se a uma hipótese, uma legenda ou a uma denominação. Ela está relacionada ao fato de que as propriedades geométricas representadas em um desenho não podem ser definidas por meio da percepção, logo, devem ser explicadas a partir das variáveis da figura geométrica. Segundo Duval (1995), essa justificativa é de ordem dedutiva.

A apreensão operatória é mobilizada quando o estudante opera sobre as figuras geométricas por meio de manipulação, composição, transformação, reconfiguração, comparação dos objetos voltados à Geometria para solucionar certa situação geométrica. Para Duval (1995) essa apreensão é mais sofisticada cognitivamente do que as demais apreensões, sendo alcançada por um estudante proficiente em Geometria.

De acordo com Duval (1995), a apreensão operatória consiste em alterações geométricas prováveis em uma figura, que podem ser realizadas de muitos formatos, como ilustrado no Quadro 01.

Quadro 01: Modificações figurais pela apreensão operatória

Tipo de modificação configural	Operações que constituem a produtividade heurística	Fatores que afetam a visibilidade
Modificações mereológicas	Reconfiguração intermediária Imersão	Característica convexa ou não convexa das partes elementares
Modificações óticas	Superpossibilidade Anamorfose	Recobrimento parcial Orientação
Modificações posicionais	Rotação Translação	Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras

Fonte: Duval (1988, p.63, tradução nossa).

Conforme apresentado pelo Quadro 01, toda figura geométrica pode sofrer modificações de três modos distintos segundo Duval (1988). As modificações mereológicas são caracterizadas pela decomposição (fração ou reagrupamento) da figura em subfiguras, mantendo uma relação de parte e de todo. Enquanto que, nas modificações óticas, ocorre uma deformação ou aumento ou redução da figura, ou seja, ela é transformada em outra figura (imagem). Por fim, as modificações posicionais são marcadas pelos movimentos de translação e de rotação, isto é, a figura é deslocada a partir de um ponto de referência.

Em cada uma dessas modificações, diferentes operações são possíveis de ocorrerem. Nas modificações mereológicas verifica-se a reconfiguração intermediária, na qual uma ou várias subfiguras diferentes, obtidas a partir de uma figura, são organizadas, formando uma segunda figura (convexa ou não convexa). Então, essa operação resume-se apenas a um tratamento figural. Já a imersão ocorre quando a figura é mergulhada e dobrada no plano.

No caso das modificações óticas, a operação de superpossibilidade é o tratamento capaz de aumentar ou diminuir a figura sem gerar deformações. Ao passo que a anamorfose produz distorções visuais na figura. Nas modificações posicionais, a rotação é o movimento realizado em torno de um referencial que está na própria figura e a translação é a mudança de posição a partir de um ponto de referência fora da figura.

É importante destacar que as apreensões não são isoladas, logo, é possível que na solução de um problema, um estudante utilize mais de uma das apreensões. Então, essa conexão entre as apreensões será necessária para a compreensão da situação. Além disso, não há hierarquia entre as apreensões, mas, sim, uma subordinação, sendo que a apreensão perceptiva coordena esse processo, como sinaliza Moretti (2013, p.291):

> [...] o que se desprende do trabalho desenvolvido por Duval é que não há uma hierarquia entre estas apreensões, mas uma subordinação de uma a outra dependendo do tipo de problema. Em geral, nas atividades propostas para o ensino fundamental, é a apreensão perceptiva que subordina as demais.

Dessa forma, a apreensão perceptiva subordina as demais apreensões. Então, por exemplo, é essa apreensão que possibilita o aluno, ao desenhar uma reta, identificar a altura e designá-la por meio da letra *h*. Se o estudante realiza a identificação, então, ele está operando. Nesse caso, a apreensão perceptiva comanda a apreensão operatória.

Duval (1995) considera também que a figura geométrica é o produto da articulação entre as apreensões perceptiva e discursiva, pois é necessário analisar a figura geométrica por meio das hipóteses, desprezando, assim, as formas e as propriedades percebidas.

A visualização consiste na ligação entre as apreensões operatória e perceptiva. Ela pode orientar a apreensão operatória, pois não demanda conhecimento em Matemática. Para o autor, a demonstração (heurística) é o produto da articulação entre as apreensões discursiva e operatória, enquanto que a construção geométrica resulta da associação entre as apreensões perceptiva, sequencial e discursiva.

Com base nessas conexões, "podemos perceber a importância da apreensão perceptiva na aprendizagem da Geometria: as apreensões operatória, discursiva e sequencial subordinam-se, em maior ou menor grau, dependendo do tipo de problema, à apreensão perceptiva" (MORETTI; BRANDT, 2015, p. 605).

Essa relevância da apreensão perceptiva fez Duval (2005) realizar a caracterização dos diferentes modos de olhar em Geometria, que consiste na classificação das formas de ver, de acordo com a função das figuras nas atividades geométricas propostas aos alunos: o olhar do botanista, o olhar do agrimensor, o olhar do construtor e o olhar do inventor.

O olhar em Geometria inicia com o olhar icônico, a partir do botanista, considerado o mais elementar, finalizando com o olhar não icônico, com o inventor, reconhecido como o olhar mais avançado. Dessa forma, ao aprender a realizar os olhares desse itinerário, o aluno apreenderá a olhar em Geometria (MORETTI, 2013). O quadro a seguir apresenta uma explicação referente a cada olhar:

Quadro 02: Olhares em Geometria conforme Duval (2005)

Olhares	Descrição
Botanista	Este é o olhar mais óbvio e imediato. É uma questão de aprender a reconhecer e a nomear as formas elementares que são usadas na Geometria Plana: tipos de triângulos e quadriláteros, configurações obtidas pelas diferentes posições de duas linhas retas umas sobre a outra, possivelmente as formas circulares e formas oval, etc. É obviamente uma questão de observar as diferenças entre duas formas que têm algumas semelhanças (um quadrado e um retângulo) e observar semelhanças entre diferentes formas (entre um quadrado e um paralelogramo). Aqui, propriedades distintas são características visuais de contornos.
Agrimensor	Trata-se de aprender a medir comprimentos em um campo, chão ou distâncias entre dois pontos de referência e para registrá-los em um desenho que tenha um status de plano. Estamos, portanto, no início em duas escalas de grandezas que devemos combinar. Mas esse mapeamento não é natural ou óbvio, porque não existe um procedimento comum para medir as distâncias reais no campo e medir os comprimentos de um desenho. As tarefas específicas deste olhar consistem em propor atividades que exigem passar de uma escala de grandeza para outra.
Construtor	A particularidade das figuras geométricas, pelo menos daquelas que correspondem a formas e configurações euclidianas elementares de formas elementares, deve ser construída por meio de instrumentos. As figuras geométricas não são desenhadas a mão, são construídas com a ajuda de um instrumento que guia o movimento da mão, ou que a substitui.
Inventor	Neste olhar, na resolução de um problema, traços na figura fornecida são adicionados, são realizadas operações sobre a figura, e na busca de percursos de solução, modificações são realizadas. O inventor é capaz de resolver o seguinte problema: *Como construir, a partir de um determinado quadrado, outro quadrado duas vezes maior (cuja área é o dobro)?*

Fonte: Duval (2005, p. 10-11, tradução nossa).

Conforme indica Moretti (2013), esses olhares percorrem de um sentido a outro à medida que as apreensões geométricas são mobilizadas. No botanista, por exemplo, é mobilizada a apreensão perceptiva, enquanto que no caso do inventor, todas as apreensões são mobilizadas.

Segundo Duval (2011), outro aspecto importante ao desenvolvimento pensamento geométrico é a mudança dimensional, que consiste em um procedimento intelectual mobilizado, sobretudo, na resolução de problemas em Geometria.

Conforme sinalizado pelo autor, uma representação em Geometria só tem sentido se ela for transformada em outra representação. Isso é essencial para as figuras geométricas que apresentam dois tipos de operações figurais que são específicos dessas figuras. Sobre essas operações, Duval (2011, p.88, *tradução de Marlene Alves Dias*) afirma que:

> [...] existem aquelas que se apoiam diretamente na percepção e que transformam unidades figurais 2D/2D (ou objetos 3D/3D) em outras de mesma dimensão. São aquelas executadas desde o começo da Geometria. Elas apresentam a particularidade de poder ser realizadas por manipulações sobre objetos materiais. E existem aquelas que dependem das operações de desconstrução dimensional. Nenhuma manipulação material pode simulá-las. Elas apareceram mais tarde na história da Geometria.

Desse modo, como sinalizado pelo pesquisador, a operação fundamental relacionada às figuras geométricas não é a sua produção, mas, sim, a desconstrução dimensional das figuras produzidas, seja por programas computacionais, seja de forma manual e instrumental. A mudança dimensional é marcante nas definições, nas propriedades, nas justificativas, ou seja, em todo pensamento referente à Geometria, sobretudo, no estudo das figuras geométricas.

Assim, de acordo com Duval (1995, 2005), o pensamento geométrico é a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos a partir das apreensões geométricas. Dito de outra forma, é a capacidade de reconhecer um objeto geométrico no plano ou no espaço, de construir uma figura geométrica ou descrever essa construção, de analisar essa figura em termos de suas propriedades e de operar sobre as figuras geométricas por meio de manipulação, decomposição, transformação etc.

Essa definição sinaliza implicitamente a existência de níveis de pensamento geométrico. Todavia, essa discussão não é realizada por Duval, que centra seus estudos na subordinação existente entre as apreensões geométricas.

É importante destacar que um estudante desenvolverá o pensamento geométrico quando ele mobilizar, no mínimo, uma dessas características, ou seja, quando ele atuar em uma das apreensões geométricas. Além disso, como mencionado por Duval, não há hierarquia, logo, um mesmo sujeito pode trabalhar em duas ou mais apreensões simultaneamente.

Pensamento geométrico na compreensão de Luiz Carlos Pais

Tal como Fischbein (1993), Luiz Carlos Pais (1996) também investigou sobre como ocorre a formação do pensamento geométrico. Sustentando-se na Teoria Epistemológica da Geometria, desenvolvida por Gonseth (1945), o autor brasileiro analisou as implicações do uso de desenhos, objetos materiais e de imagens mentais como recursos didáticos auxiliares e representativos do processo de produção dos conceitos geométricos, além do reconhecimento da presença de uma provável conexão desses componentes com as dimensões intuitiva, experimental e teórica do conhecimento geométrico.

Dessa forma, a correlação entre os quatro elementos (objeto, conceito, desenho e imagem mental) necessários à elaboração de conceitos geométricos e os aspectos intuitivo, experimental e teórico, vinculados ao conhecimento em Geometria, constituem o pensamento geométrico.

O termo objeto é considerado por Pais (1996) como sendo uma parte material, visivelmente reconhecível na realidade sentida pelo estudante e que pode ser relacionada ao modo que certos conceitos em Geometria são ensinados na escola básica. A título de ilustração, o objeto coligado ao conceito de pirâmide pode ser uma pirâmide produzida em cartolina, plástico, madeira, argila, varetas ou qualquer outro tipo de material. Então, no âmbito da Geometria, o termo objeto é empregado tanto como modelo físico como material didático.

Para o autor, o objeto é compreendido como uma maneira primária de representação de conceitos, tendo em vista que o processo de produção de cunho teórico é demorado, sucessivo e complicado: “primária no sentido de que ele é a forma mais acessível e imediata à sensibilidade humana” (PAIS, 1996, p.68). Dessa forma, o objeto é um modelo físico que favorece a elaboração de ideias, todavia, não ocupa o lugar delas: “o termo objeto é aqui utilizado apenas em sua acepção concreta e está associado principalmente aos modelos ou materiais didáticos” (PAIS, 1996. p.66).

Nessa perspectiva, podemos considerar materiais concretos e materiais manipulativos como objetos. Contudo, conforme sinaliza o pesquisador, a atividade de manipular os objetos não pode se reduzir, apenas, à ludicidade.

> Devido a sua natureza particular e concreta, esses objetos permitem uma relativa facilidade de manipulação no transcorrer de atividades visando a aprendizagem. Entretanto, faz-se necessário salientar que esta manipulação não pode limitar-se a uma simples atividade lúdica. Não se trata, aqui, da manipulação de objetos defendida na educação pré-escolar cuja finalidade não está voltada diretamente para uma aprendizagem formal. O significado que lhe é conferido é análogo à *experiência raciocinada* descrita por Bkouche (1989), o qual associa necessariamente à manipulação física do objeto uma atividade intelectual que estabeleça uma relação dialética efetiva entre teoria e prática. O problema que surge com o uso desses materiais é que sua natureza contrasta frontalmente com a generalidade e a abstração dos conceitos visados, surgindo também daí a necessidade de se transpor sua própria materialidade (PAIS, 1996, p.67).

Nesse cenário, na manipulação de objetos, é fundamental que o estudante realize interpretação geométrica do(s) conceito(s) que está(ão) sendo representado(s), para que possa desenvolver a abstração e a generalização dele(s). Então, para o autor, não se trata de abandonar a utilização de objetos, mas, sim, compreender que a aprendizagem apenas provocará uma ação relevante ao aluno, quando ele tiver condições de realizar uma análise geométrica da representação implicada.

É notório, por isso, que a materialidade deve ser tratada na direção de possibilitar a origem do processo de abstração, de outro modo, reincidirá na falha desagradável de reconhecer a presença de uma Geometria de natureza concreta.

Para Fischbein (1993), os objetos em Geometria são, então, entidades mentais, chamadas por conceitos figurais, que apresentam propriedades espaciais (forma, posição, magnitude) e, de modo simultâneo, têm qualidades conceituais (idealidade, abstração, generalidade e perfeição).

Com relação ao termo desenho, Pais (1996) destaca que, do mesmo modo que o objeto, também o é de âmago basicamente concreto e peculiar e, sendo assim, contrário aos atributos globais e abstratos do conceito. Essa associação entre o individual e o global, entre o concreto e o abstrato, que abrange a atividade de representar conceitos, aponta, por si própria, para a maior complexidade colocada à atividade didática que é, igual no contexto dos objetos, a carência de realizar a transposição do próprio desenho.

Segundo o autor, a representação, por um desenho, dos conceitos vinculados à Geometria é um dos recursos didáticos mais vigorosamente estabelecidos nos processos de ensino e de aprendizagem desse campo da Matemática. Tal fato demanda um estudo refinado de origem didática e epistemológica sobre seu funcionamento na aprendizagem geométrica.

> Quer seja na representação de figuras planas ou espaciais, o desenho tem sido, na realidade, uma passagem quase que totalmente obrigatória no processo de conceitualização geométrica. Sua presença destaca-se tanto nas aulas de geometria, como nos livros didáticos, ou mesmo, simplesmente, para ilustrar os enunciados de exercícios, definições ou teoremas. Essa sua presença significativa leva à necessidade de uma reflexão epistemológica e didática sobre o seu verdadeiro estatuto na aprendizagem geométrica (PAIS, 1996, p. 68).

Ao destacar a importância do desenho na conceitualização geométrica, cujo outro uso é na representação de figuras geométricas ou espaciais, aqui notamos certa proximidade das ideias de Pais (1996) com as de Fischbein (1993). Esse segundo pesquisador sinaliza que um desenho não é a própria figura geométrica, mas uma concretização gráfica ou materialização.

Assim, Pais (1996) sublinha que a utilização do desenho na Geometria Espacial, que muitas vezes necessita o auxílio da técnica da perspectiva, é mais complexo do que no caso da Geometria Plana, na qual o desenho geralmente é reconhecido pelo estudante como se fosse o próprio conceito em si.

Essa aplicação da perspectiva, que deixa o objeto representado em terceira dimensão, é uma das grandes dificuldades apresentadas pelos estudantes ao estudarem conceitos geométricos espaciais. Acerca das particularidades dessas dificuldades, Pais (1996) cita Bonafe (1988):

> [...] neste sentido, Bonafe (1988) analisa em detalhes as dificuldades do ensino da geometria espacial, quando o aluno ainda não tem imagens mentais suficientemente operacionais para decodificar um desenho em perspectiva. Este autor destaca o fato de que tanto a produção de um desenho em perspectiva pelo aluno, como a sua leitura, podem constituir-se em obstáculos consideráveis para a aprendizagem. Estas observações sugerem uma reflexão mais importante em torno da possibilidade do desenho transformar-se num obstáculo epistemológico […] (PAIS, 1996, p.69).

O autor sinaliza que a leitura e a interpretação das informações geométricas apresentadas num desenho necessita do controle de algumas informações técnicas que, em geral, não são abordadas de forma clara e sistemática no ensino básico. Nos livros didáticos, os desenhos são explorados em diversos grafismos que, não obstante, têm um sentido fixado, têm seu uso sustentado numa certa tradição, em vez de serem baseados numa aprendizagem formal.

Para Pais (1996), essas dificuldades, acrescidas daquelas referentes à perspectiva, que situam o desenho como um modo de representar mais complicado do que o representar por um objeto.

Como bem pontua o pesquisador, a constituição das imagens mentais é um assunto bastante interessante a Psicologia Cognitiva, sendo o centro de vários estudos dessa área de conhecimento, especificamente por possibilitar um modo holístico de apresentar o conhecimento humano. Dessa forma, ao estudar as imagens mentais que podem ser correlacionadas aos conceitos geométricos, Pais (1996) reportou-se à Epistemologia da Geometria desenvolvida por Denis (1979; 1989), de gênese teórica cognitiva.

Assim, de acordo com o investigador brasileiro, essas imagens, que são de âmago basicamente diferente daqueles do objeto e do desenho, podem ser evidenciadas por dois atributos fundamentais: a abstração e a subjetividade. Em decorrência de serem abstratas, essas características podem ser associadas aos conceitos, apesar de que seu caráter subjetivo as separe da lógica científica. Todavia, o autor ressalta que a elaboração da objetividade percorre pela etapa subjetiva da visão particular do estudante.

Ao reconhecer a complexidade ao definir uma imagem mental, Pais (1996) a considera como a capacidade do indivíduo em enunciar, por meio da descrição, as especificidades de um desenho ou de um objeto, quando esses componentes não estão presentes. Dessa maneira, as noções de origem geométrica são ideias de natureza abstrata e, em vista disso, desconhecidas da sensibilidade externa do ser humano, a constituição de imagens mentais é um corolário praticamente restrito da exploração com objetos e desenhos.

Sobre o papel das imagens mentais no ensino e na aprendizagem da Geometria, o investigador explica que:

> [...] a aprendizagem geométrica engloba necessariamente uma razoável habilidade racional de trabalho, com boas imagens mentais associadas não só aos conceitos como também aos teoremas e situações geométricas fundamentais. Exemplos de frases como: “Imagine uma reta perpendicular a um plano”; “seja a diagonal principal de um cubo”, fazem um apelo direto ao uso de uma imagem desse tipo. No transcorrer da aprendizagem, aos poucos, o conjunto de tais imagens é enriquecido tanto no aspecto quantitativo como qualitativo. Para os interesses educacionais, essas imagens são tanto melhor quanto mais operacionais elas forem, o que permitirá o desenvolvimento de um raciocínio mais dinâmico para a resolução de problemas ou para novas aprendizagens. Para os interesses do ensino da geometria, são os objetos e os desenhos que podem principalmente estimular a formação de boas imagens e, neste contexto, elas constituem uma terceira forma de representação das noções geométricas. A natureza desta representação é bem mais complexa em relação ao uso de um objeto ou de um desenho, mas, por outro lado, permite uma utilização muita mais rápida e eficiente (PAIS, 1996, p.70).

Quando discute sobre a generalidade e a abstração dos conceitos da Geometria, o autor afirma que esses processos são produzidos lentamente, numa lógica dialética que abrange, inevitavelmente, a influência da realidade física e uma reflexão intelectual sobre essa realidade. Em um primeiro momento, sua produção se define numa conexão de durável confronto entre o universo das ideias e a realidade física.

Para Pais (1996), se por um lado a procura dessas características tem sido o destaque maior do ensino da Geometria, por outro, as dificuldades na efetivação desta finalidade são ainda permanentes, eventualmente pela rejeição ou pela persistência em ponderar os obstáculos relacionados à vivência do estudante.

Em conformidade com o investigador, um modo do discente entender essa abstração é experienciar um processo evolutivo, no qual ele possa recordar dificuldades passadas no próprio progresso histórico do conceito. Nesse cenário de conceitualização, geralmente, o estudante mobiliza as representações por objetos e desenhos e, depois, por imagens mentais.

Pais (1996) enfatiza que a atividade de representar um conceito apenas faz sentido completo se esse conceito já estiver num determinado nível de formalização. Então, numa fase primária da aprendizagem, o estudante tende a identificar conexões entre o conceito e sua representação, quando diante das dificuldades geradas pelo processo de abstração. Dessa maneira, um rudimentar risco no quadro branco ou na folha de caderno passa a ser um segmento de reta, como na situação clássica da Geometria Plana, na qual os conceitos são reconhecidos pelo seu desenho.

É relevante destacar que o próprio termo "figura" apresenta duas interpretações: a primeira é compreendida como um conceito da Geometria e, a segunda, é entendida como apenas uma representação gráfica. A passagem desta dupla associação dialética, abrangendo o individual e o global, o concreto e o abstrato, é, provavelmente, o maior obstáculo epistemológico (no sentido bachelardiano) enfrentado pelo estudante na evolução primária da aprendizagem.

Ao apresentar essa relação dialética, percebemos uma convergência desse autor brasileiro com Fischbein (1993) e com Duval (1995). Fischbein (1993) indica que uma figura geométrica pode ser caracterizada como tendo propriedades profundamente conceituais. Todavia, uma figura geométrica não é um mero conceito, mas, sim, uma imagem visual, incluindo a representação mental da propriedade espacial.

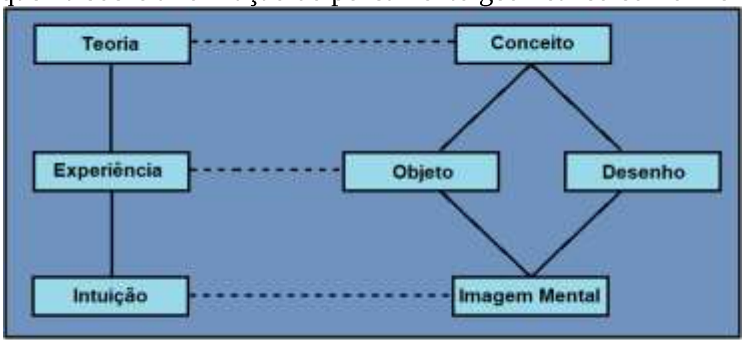
Além disso, ao analisar as figuras geométricas como representações gráficas, Pais (1996) se aproxima de Duval (1995), que considera essas figuras como representações semióticas de objetos geométricos.

Cientificamente, o conceito não pode ser vulnerável às mudanças que possibilitem a produção de diferentes interpretações. Nessa direção, Pais (1996, p. 71) comenta:

> [...] enquanto conhecimento é construído pelo homem, existe uma série de particularidades que acabam determinando níveis de conceitualização diferentes. Cada indivíduo possui uma série de imagens mentais associadas a um determinado conceito. Embora esses dois elementos sejam de natureza puramente abstrata, o primeiro deles refere-se ao domínio da psicologia cognitiva, enquanto que o segundo refere-se ao aspecto racional e objetivo da ciência. O trabalho didático situa-se entre esses polos interligados.

O autor apresenta um esquema que articula os três aspectos fundamentais do conhecimento geométrico – a intuição, a experiência e a teoria – aos quatro componentes básicos à aprendizagem geométrica – o objeto, o desenho, a imagem mental e o conceito –, esses últimos já foram explicados antes neste texto. A correlação entre eles constitui o pensamento geométrico, como ilustrado a seguir na Figura 1.

Figura 1: Esquema sobre a formação do pensamento geométrico conforme Pais (1996)



Fonte: adaptado de Pais (1996)

Como sinalizado pelo pesquisador, pelo esquema, a intuição é um modo de conhecimento direto que está a todo o momento acessível na essência das pessoas e, cuja justificativa e esclarecimento, não solicita um processo dedutivo de natureza racional orientada por uma série lógica de argumentações deduzidas umas das outras.

Nessa situação, o conhecimento geométrico apoiado apenas no aspecto intuitivo é caracterizado, antes de mais nada, por um funcionalismo praticamente direto quando relacionado com a evolução necessária de uma sequência dedutiva do raciocínio lógico. Aqui, em nosso entendimento, o pensar em Geometria é de natureza intuitiva, isto é, a pessoa mobiliza o *pensamento geométrico intuitivo*, pois analisa os objetos geométricos de forma intuitiva.

Segundo Pais (1996), os axiomas da Geometria Euclidiana podem ser admitidos com fundamento nesse modo de conhecimento intuitivo:

> [...] os axiomas da geometria euclidiana podem ser aceitos com base nesta forma de conhecimento intuitivo. Conforme observa Bkouche (1983), Legendre – um notável matemático da Revolução Francesa –, inicia sua obra

> clássica "Eléments de Géométrie" afirmando que **axioma** se define como "uma propriedade evidente por ela mesma" enquanto **teorema** pode ser considerado como a propriedade que se torna evidente por meio de um raciocínio matemático chamado demonstração. Por outro lado, uma vez admitidas algumas noções intuitivas, o raciocínio matemático, traduzido pelas demonstrações, não pode basear-se na argumentação intuitiva (PAIS, 1996, p.72).

Como ilustrado pelo investigador, consideremos um típico exemplo em aulas de Matemática sobre Geometria Plana, especificamente na análise de *uma reta que passa por um ponto que é interior à região limitada por uma circunferência*. Essa reta interceptará ou não essa circunferência? Certamente, a maior parte dos estudantes, que possuem uma breve introdução em Geometria, não apresenta dificuldade em argumentar que a reta, efetivamente, tanto interceptará a circunferência, quanto fará isso em dois pontos distintos.

O conhecimento, admitido ou expresso diretamente, é de natureza intuitiva, mobilizando o pensamento geométrico intuitivo. Todavia, esse mesmo problema pode ser explicado por uma produção experimental por meio da prática de um desenho. Nesse contexto, o desenho é aplicado para localizar ou evidenciar uma proposição, logo, é um tipo de conhecimento experimental. Então, em nossa compreensão, os estudantes mobilizam o *pensamento geométrico experimental*, pois resolveram o problema geométrico por meio de uma construção experimental.

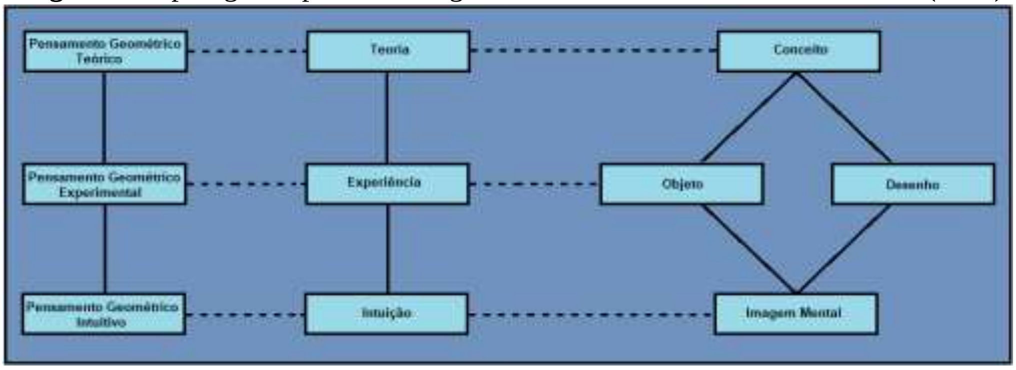
Além disso, na resolução da situação, o aluno poderia ter realizado uma demonstração, sem o uso da intuição e do desenho, caracterizando, assim, o aspecto teórico do conhecimento geométrico. Por isso, o discente atuaria no *pensamento geométrico teórico*, marcado pelo uso do processo demonstrativo na análise do problema.

Realizando uma análise mais pontual, podemos perceber que a classificação desenvolvida por Pais (1996), relacionada ao conhecimento geométrico, implicitamente aponta a existência de níveis de pensamento geométrico. Todavia, o autor não realiza uma discussão sobre isso no seu texto.

Dessa forma, podemos considerar que o pensamento geométrico teórico, caracterizado pelo desenvolvimento de demonstrações, seja em Geometria Euclidiana, como nas Não Euclidianas, corresponde ao nível mais complexo. Enquanto que o pensamento geométrico intuitivo e o experimental, de natureza subjetiva e empírica, constituem níveis mais elementares.

No entanto, na tipologia de pensamento geométrico que organizamos a partir da ampliação das discussões de Pais (1996), como ilustrado na Figura 2, a hierarquia não é tão estanque, pois o aluno, ao realizar uma demonstração de natureza teórica, pode fazer uso da intuição e da experimentação, mobilizando assim três formas de pensar em Geometria.

Figura 2: Tipologia de pensamento geométrico elaborada com base em Pais (1996)



Fonte: Pereira da Costa (2019)

Conforme Pais (1996, p.73):

> [...] do ponto de vista didático não se deve conceber a existência de um desses elementos totalmente desvinculados dos outros, pois, da mesma forma que há uma base intuitiva no método axiomático, o apelo à experiência acaba determinando uma forte influência na gênese das noções teóricas da geometria. Na tentativa de melhor compreender este sincretismo e suas consequências pedagógicas, é necessário destacar que, no processo de elaboração conceitual, acaba predominando uma influência significativa das representações do conhecimento que seja por um objeto, por um desenho ou por uma imagem mental. Neste contexto, é necessário destacar ainda que as demonstrações, mesmo em se tratando de um raciocínio lógico e intelectual, têm sua formalização precedida de ensaios intuitivos e/ou experimentais que acabam não aparecendo em sua redação final.

O processo intuitivo está associado às imagens mentais, por apresentarem natureza subjetiva. Todavia, esses dois elementos, que constituem o pensamento geométrico intuitivo, são desconsiderados na validação do conhecimento. Os recursos, objeto e desenho, favorecem um conhecimento geométrico de âmago empírico que, formando o pensar em Geometria, de natureza experimental, não definem características das noções geométricas.

Agora, na produção do conhecimento teórico da Geometria, formado principalmente pelos conceitos que estabelecem o pensamento geométrico teórico, se faz necessário analisar as implicações da intuição e da experimentação. Portanto, os elementos objeto, desenho, imagem mental e conceito se complementam e articulam-se com os aspectos intuitivo, experimental e teórico, formando o pensamento geométrico.

Assim sendo, com base nas discussões de Pais (1996), em nossa compreensão, podemos considerar que o pensamento geométrico pode ser definido como a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos a partir de intuição, experimentação e teoria, correlacionados com objeto, desenho, imagem mental e conceito.

Considerações Finais

Verificamos, por meio da análise realizada sobre os estudos de Fischbein (1993), Duval (1995) e Pais (1996), que caracterizar pensamento geométrico é uma tarefa bastante complexa. Todos os autores, por exemplo, consideram o pensamento geométrico como uma capacidade mental de construir conhecimentos geométricos. Contudo, essa unanimidade não ocorre na compreensão desses pesquisadores sobre o modo como esse processo de construção ocorre.

Para Fischbein (1993), essa construção verifica-se por meio da interação entre os aspectos figurativo e conceitual relacionados à Geometria. Duval (1995) indica que esse processo baseia-se nas apreensões geométricas, mediante uma relação de subordinação. Pais (1996) sinaliza que a produção de conhecimentos geométricos ocorre a partir de intuição, experimentação e teoria, correlacionados com objeto, desenho, imagem mental e conceito.

Essa dificuldade de consenso ocorre, provavelmente, em virtude do próprio caráter evolutivo da Geometria, ao extenso número de objetos que compõem o seu campo conceitual (ponto, reta, plano, polígonos, entre outros), ao uso de diversos experimentos em Matemática (mobilizar, produzir e aprimorar conjecturas, provar hipóteses, elaborar demonstrações) e, por fim, pelas diversas formas possíveis de ponderar o pensamento na generalidade.

Contudo, levando em consideração que planejamos construir uma caracterização de pensamento geométrico para ser usada em futuras pesquisas da área de Educação Matemática, o debate efetivado, aqui, possibilitou-nos elaborar uma discussão acerca da natureza dessa forma de pensar em Geometria.

Nessa direção, Gravina (2001) sinalizou duas naturezas de pensamento geométrico: o empírico e o hipotético-dedudivo. No primeiro, os objetos geométricos são analisados a partir de características de objetos que compõem a realidade. No segundo, a Geometria é entendida a partir da dedução. Também, Leivas (2009), ao apresentar o pensamento geométrico avançado, mobilizado pela vivência com diferentes modelos geométricos, fez surgir duas questões: Há um pensamento geométrico elementar? Quais suas características?

Apesar desse autor não ter feito uma discussão sobre o pensamento geométrico elementar, em nosso entendimento, além do pensar em Geometria avançado, existe o elementar. Para isso, consideramos Tall (1995), que propôs duas naturezas para o pensamento matemático: elementar e avançado. Assim, para o pesquisador inglês, a evolução dessa forma de pensar começa quando a criança é introduzida na escola, concluído com o contato com a

Matemática vivenciada na universidade.

Nessa direção, o pensamento matemático elementar é desenvolvido na escola básica, onde a matemática é compreendida como uma associação de representações visuais, abrangendo geometria e gráficos, além de cálculos e manipulações simbólicas. Já o pensamento matemático avançado é estimulado na universidade, onde a matemática é entendida como uma estrutura formal de sistemas axiomáticos e provas matemáticas (TALL, 2008).

Mesmo o autor defendendo que o desenvolvimento do pensamento matemático é iniciado na escola, em nossa compreensão, essa forma de pensar ocorre antes da criança iniciar o processo de escolarização. No âmbito geométrico, tarefas como observar o espaço, analisar os objetos físicos e estabelecer as primeiras relações espaciais são atributos do pensar em Geometria que emergem em espaços informais, nos primeiros anos de vida de uma criança.

A Geometria vivenciada por ela é caracterizada pela experiência com o cotidiano, de ordem empírica e elementar. Então, "não há preocupação em considerar o campo geométrico como um modelo teórico. Dessa forma, os objetos do mundo físico não são analisados como representações de objetos geométricos no ambiente real" (PEREIRA DA COSTA, 2020, p. 91). Nesse contexto, o pensamento geométrico mobilizado é elementar.

Desse modo, o pensamento geométrico elementar é assinalado pela vivência e pelo contato com a Geometria da experiência prática, sendo iniciado antes do processo de escolarização. Ainda é distinguida pelo estudo de conceitos geométricos mais elementares na escola, pertencentes ao modelo euclidiano.

Concordando com Leivas (2009), o pensamento geométrico avançado é marcado pelo estudo com objetos geométricos mais sofisticados, vinculados, por exemplo, às Geometrias Não Euclidianas. Além disso, também é caracterizado pela integração de teoremas e axiomas nos construtos teóricos que compõem a Geometria de Euclides.

Estabelecendo uma relação entre o nosso estudo com Duval (1995), de forma específica, com as apreensões geométricas indicadas por esse autor, notamos que as apreensões perceptiva e sequencial são vinculadas ao pensamento geométrico elementar, ao passo que as apreensões discursiva e operatória combinam com o pensamento geométrico avançado.

Além disso, considerando a tipologia que propomos com base no estudo de Pais (1996), verificamos que o pensamento geométrico intuitivo e o pensamento geométrico experimental correspondem ao pensamento geométrico de natureza empírica e elementar.

Enquanto que o pensamento geométrico teórico equivale ao hipotético-dedutivo e ao avançado.

Em relação ao estudo de Fischbein (1993), na interação entre as redes conceituais ativas e as fontes imaginativas, necessárias ao pensamento geométrico, os significados mudam de status, ou seja, passam de uma categoria para outra, na qual as imagens alcançam significado e conceitos mais generalizados. Desse modo, em nosso entendimento, essa mudança de status ocorre na passagem entre o pensamento geométrico elementar e o avançado.

Ainda, pelas discussões apresentadas sobre pensamento geométrico, podemos perceber que os autores dão indícios da existência de níveis dessa forma de pensar em Geometria. Todavia, isso não é mencionado de forma clara ou, então, não é o foco dos estudos. É o caso, por exemplo, de Duval (1995), que não fala em níveis, mas, sim, em apreensões geométricas, de forma que há uma subordinação entre elas.

Desse modo, um estudante do ensino básico, ao resolver um problema geométrico, pode mobilizar mais de uma apreensão, simultaneamente. A ausência do termo “níveis”, em sua teoria, talvez, se justifica pelo fato dessa palavra (“níveis”) remeter à hierarquia, que não é vista com bons olhos pelo pesquisador.

Ao propor três tipos de conhecimentos geométricos, Pais (1996) deixa isso mais evidente. Por sua vez, Fischbein (1993), em nenhum momento do seu texto, faz referência à existência de níveis de pensamento geométrico. Contudo, como mencionado anteriormente, a mudança de categoria entre os significados das imagens mentais deixa isso implícito ou a critério de interpretação do leitor.

Por fim, concluímos que o pensamento geométrico é a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, de aplicar de modo coerente os instrumentos geométricos na resolução de problemas. É a capacidade de compreender a natureza dos fenômenos e inferir sobre eles, de identificar e perceber a Geometria como uma ferramenta para entendimento do mundo físico e como um modelo matemático para compreensão do mundo teórico.

Referências

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico:** um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

BISHOP, A. J. Review of research on visualization in mathematics education. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Chicago, v. 11, n. 1-2, p. 7-16, 1989.

BLANCO, T. F. Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría. *In*: FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA, 9., 2014, Puntarenas, **Anales** [...]. Puntarenas, 2014. p.1-13.

BONAFE, F. Quelques hypothèses et rèsultats sur l'enseignement de la géométrie de l'espace à partir de la représentation em perspective cavalière. **Bulletin de l'APMEP**, Paris, v.1, n. 363, pp. 151-164, 1988.

DEL GRANDE, J. Spatial Sense. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 1, n. 1, p. 14-20, 1990.

DENIS, M. **Les Images Mentales**. Paris: Presse Universitaire Française, 1979.

_______________. **Image et Cognition**. Paris: Presse Universitaire Française, 1989.

DUVAL, R. Aproche cognitive des problemes de geometrie en termes de congruence. *In*: DIDACTIQUE ET SCIENCES COGNITIVES, 1., 1988, Strasbourg. **Annales** [...]. Strasbourg: IREM, 1988. p. 57 - 74.

_______________. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

_______________. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *In*: DIDACTIQUE ET SCIENCES COGNITIVES, 36., 2005, Strasbourg. **Annales** [...]. Strasbourg: IREM, 2005. p. 5 - 53.

_______________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**, Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

_______________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tradução Marlene Alves Dias. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

FISCHBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 24, n.2, p. 139-162, 1993.

GONSETH, F. **La Géométrie et le problème de l'espace**. Neuchatel: Éditeur Griffon, 1945.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

LABORDE, C. Quelques problemes d'enseignement de la geometrie dans la scolarite obligatoire. **For the Learning of Mathematiu Association**, Montreal, n.3, p.27-34, 1985.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática. 2009. Tese

(Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

MORETTI, M. T. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiae**, Canoas, v.15 n.2, p.289-303, 2013.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.17, n.3, p.597-616, 2015.

NASSER, L. O desenvolvimento do raciocínio em geometria. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v.1, n.27, p. 93-99, 1990.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Revista Zetetiké**, Campinas, v.4, n.6, p. 65-74, 1996.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico:** o caso dos quadriláteros notáveis. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

_______________. O pensamento geométrico em foco: construindo uma definição. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**. Mossoró, v. 6. n. 16, 2020.

PIERON, H. **Vocabulaire de la Psychologie**. Paris: PUF, 1957.

PIROLA, D. L. **Aprendizagem em geometria nas séries iniciais:** uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

TALL, D. Cognitive Growth in Elementary and Advanced MathematicalThinking. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF LEARNING MATHEMATICS, 1., 1995, Recife. **Anais** [...]. Recife: UFPE, 1995, p. 161-175.

_______________. The Transition to Formal Thinking in: Mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, Queensland, v. 20, n. 2, p. 5-24, 2008.

Recebido em: 07 de setembro de 2019
Aprovado em: 15 de abril de 2020