revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O GEOGEBRA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA A COMPREENSÃO DA PROPRIEDADE OPERATÓRIA LOGARITMO DO PRODUTO: UM ESTUDO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2019.8.16.119-137

Eder Marinho Martins[1]
Wenderson Marques Ferreira[2]
Edmilson Minoru Torisu[3]

Resumo: Um número considerável de estudantes dos cursos de licenciatura em Matemática chega à universidade com dificuldades em conteúdos do ensino básico que são pré-requisitos para disciplinas da graduação, particularmente o conteúdo de funções, fundamental para as disciplinas de cálculo. Os logaritmos são um exemplo bastante representativo de conteúdo no qual os estudantes apresentam dificuldade. Nesse estudo qualitativo, realizado com cinco estudantes do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública brasileira, utilizamos o GeoGebra como recurso didático para a compreensão da propriedade logaritmo do produto. Utilizamos a descoberta guiada por meio de um roteiro que permitiu aos estudantes compreenderem a citada propriedade. Para coletar as impressões em relação à atividade, um questionário foi aplicado. Os resultados mostraram que os estudantes puderam: compreender, com mais clareza, a propriedade do logaritmo do produto por meio da visualização e intervenção do professor; criar conjecturas a respeito de como seria a extensão das ideias para o logaritmo do quociente; criar situações, dentro da atividade, para suscitar reflexões acerca do conteúdo que pudessem, como resultado, gerar discussões que promovessem um avanço no repertório de conhecimentos dos estudantes.
Palavras-chave: GeoGebra. Propriedades de Logaritmos. Descoberta Guiada. Educação Matemática.

GEOGEBRA AS A DIDACTIC RESOURCE FOR THE COMPREHENSION OF OPERATIONAL PROPERTY LOGARITHM OF THE PRODUCT: A STUDY WITH MATHEMATICS UNDERGRADUATE

Abstract: A considerable number of undergraduate students in Mathematics come to university with difficulties in content of basic education which are prerequisites for undergraduate subjects, particularly the subject of functions, which is fundamental to understand the Calculus. Logarithms are a very representative example of a subject that students have difficulties. In this qualitative study, done with five undergraduate students in Mathematics from a Brazilian public university, we used GeoGebra as a didactic resource for understanding the product property of logarithms. We applied guided discovered through a script that allowed students to understand the property. To collect the

[1] Doutor em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais. Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). E-mail: eder@ufop.edu.br.
[2] Doutor em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais. Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). E-mail: wmf@ufop.edu.br.
[3] Doutor em Educação (Linha de pesquisa: Educação Matemática) pela Universidade Federal de Minas Gerais. Professor do Departamento de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). E-mail: edmilson@ufop.edu.br

impressions in relation to the activity, it was applied a questionnaire. The results showed that students were able to: more clearly understand the product property logarithms through the visualization and intervention of the teacher; to create conjectures about how would be the extension of the ideas to the quotient property; create situations within the activity to bring reflections about the subject that could, as a result, generate discussions that promote an advance in the students' repertoire of knowledge.
Keywords: GeoGebra; Properties of logarithms; Guided Discovery; Mathematics Education

Introdução

O uso de tecnologias tem crescido de forma significativa nos últimos anos, modificando a forma com que as pessoas se comunicam, se relacionam e se informam, acelerando o processo daquilo que temos denominado globalização. Nesse contexto, as informações circulam com tamanha velocidade que acontecimentos da política, cultura e economia de lugares tão distintos e distantes tornam-se de tal forma amalgamados que passam a fazer parte do conteúdo de nossas conversas diárias. Somos instados, a todo momento, a demonstrar conhecimentos acerca de tudo e de todos, sob pena de sermos considerados alienados.

Naturalmente, os efeitos de tudo isso afetam a Educação. Ao redor do mundo professores, instituições e governos têm se esforçado para acompanhar os avanços desse mundo cada vez mais tecnológico. Fazer da escola um espaço atraente aos estudantes, acostumados (em boa parte) ao uso de tecnologias digitais, ainda que não com pretensões de estudo, requer que os professores se apropriem do uso dessas mesmas tecnologias em sua prática pedagógica. Isso é tarefa fácil? Sabemos que não, sobretudo em um país como o nosso, cujas mazelas da educação são muitas e bem conhecidas. É urgente, portanto, tomar medidas para a melhoria da Educação no Brasil. Nessa empreitada, o professor tem papel crucial e pode ter, na medida do possível, a tecnologia como aliada. Observamos, entretanto, que não defendemos o seu uso indiscriminado, o que pode comprometer a qualidade do ensino, nem acreditamos que o uso de tecnologias sanará todos os problemas educacionais atuais. Nós a entendemos, conforme já mencionamos, como uma aliada.

É fato que o uso de tecnologias na sala de aula muda a dinâmica desse espaço, possibilitando aumento do repertório das formas de ensinar e de aprender. Na Educação Matemática (EM) em particular, muitas pesquisas têm sido realizadas e os resultados colocam em relevo os contributos do uso de tecnologias da informação e comunicação (TIC) para a aula de Matemática e para a formação de professores, tanto na modalidade presencial quanto a distância (PONTE, 2000; CARNEIRO; PASSOS, 2014; BORBA; MALHEIROS; ZULATTO, 2007; BAIRRAL; POWELL, 2013).

Quando o assunto são livros com essa temática, três produções ganham importância no cenário nacional por apresentarem ideias largamente referenciadas em pesquisas em EM. No livro Informática e Educação Matemática (BORBA; PENTEADO, 2016), os autores apresentam

> [...] uma variedade de exemplos sobre o uso de informática com alunos e professores para, em seguida, debater desde temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa até questões epistemológicas e pedagógicas relacionadas à utilização de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática (BORBA; PENTEADO, 2016, p. 4).

Outro livro, intitulado Tecnologias Digitais e Educação Matemática (BORBA; CHIARI, 2013), é composto por textos de vários pesquisadores do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) que apresentam ao leitor o uso de várias tecnologias digitais utilizadas nas pesquisas do grupo. No terceiro livro, intitulado Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014), os autores discutem quatro diferentes fases do uso das tecnologias digitais em Educação Matemática, a saber: as três primeiras fases identificadas por ícones como a linguagem Logo, softwares de funções ou geometria e Educação Matemática *online* e a quarta fase, identificada pelo uso da *internet*, performance matemática digital, *Facebook*, *Youtube* e GeoGebra.

Parece-nos, então, que no tocante às possibilidades tecnológicas para as pesquisas em EM, podemos considerar um guarda-chuva que abarca uma ampla variedade de opções. Nesse cenário, estudos que utilizam softwares de geometria dinâmica para o ensino de conteúdos matemáticos têm tido destaque. Destes, o GeoGebra é, sem dúvida, um dos mais utilizados pelos pesquisadores, talvez como consequência de algumas de suas características: é um software gratuito, combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma única aplicação, é oferecido em vários idiomas e é de fácil manipulação, facilitando, sobremaneira, a interface com o usuário.

No presente estudo, o objetivo é apresentar uma proposta de atividade para justificar as propriedades dos logaritmos utilizando recursos do GeoGebra. Essa proposta, criada por professores do Departamento de Matemática e do Departamento de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) tem o intuito de ajudar estudantes do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática na compreensão dessas propriedades, de forma a adensar seus conhecimentos sobre o assunto.

Dificuldades em conhecimentos básicos de Matemática em cursos de Licenciatura em Matemática

Em nossa experiência na formação de professores de Matemática na Universidade Federal de Ouro Preto, temos testemunhado, ao longo dos anos, as dificuldades apresentadas pelos ingressantes do curso em conteúdos do ensino básico que são pré-requisitos para disciplinas da graduação, particularmente o conteúdo de funções, fundamental para as disciplinas de cálculo.

Incomodados com os relatos de professores, que estavam sempre a comunicar essas dificuldades, os colegiados dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática criaram a disciplina Elementos de Cálculo, com o objetivo de melhor preparar os estudantes do curso de Matemática para cursar as disciplinas de Cálculo que, na maioria das vezes, são um terreno árido para eles. Na disciplina Elementos de Cálculo, um dos conteúdos revisto é o de função logarítmica e, dentro desse conteúdo, as propriedades dos logaritmos.

Entendemos que para o futuro professor de Matemática, os conhecimentos próprios da Matemática, os chamados conhecimentos sobre o objeto de ensino, são fundamentais para uma boa atuação na profissão futura. Sendo assim, é mister uma formação sobre bases sólidas que permita ao profissional atuar com segurança em classes de Matemática.

Curi e Santos (2011), numa pesquisa realizada com 240 professores que atuavam na rede pública de ensino verificaram, em um teste aplicado, que esses professores

> [...] obtiveram um percentual pequeno de acertos na resolução de problemas que utilizavam conhecimentos matemáticos do Ensino Médio. Apenas 40% dos professores pesquisados acertaram problemas envolvendo função exponencial; 44% acertaram problemas de função logarítmica (CURI;

SANTOS, 2011).

Essa pesquisa nos mostra a fragilidade do conhecimento dos professores em conteúdos básicos, dentre os quais, logaritmos. Consideramos, então, que a proposta a ser apresentada para a visualização de propriedades dos logaritmos, pode contribuir para a formação do professor de Matemática. Optamos por trabalhar com atividades guiadas e, sobre isso, trataremos, a seguir.

Descoberta Guiada

Atividades investigativas em aulas de Matemática vêm se constituindo como um terreno fértil para pesquisas em Educação Matemática. São várias as perspectivas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), por exemplo, sugerem que na investigação o estudante tenha a oportunidade de refazer os passos de um matemático. Skovsmose (2000) discute os cenários para investigação, que podem levar o estudante a desenvolver uma análise crítica do uso da Matemática na sociedade. Embora com diferenças, as perspectivas apresentam uma característica comum: o estudante não estará passivo diante da figura do professor. Contrapondo-se à Educação Bancária (FREIRE, 2000), uma atividade investigativa baseia-se no diálogo, no qual o estudante também tem voz. O professor o ajuda, medeia a aprendizagem e não assume ser o dono do saber.

Durante toda atividade investigativa o estudante pode, em alguma medida, "descobrir" alguma coisa, fazer conjecturas, concluir, generalizar e o nível de participação do professor pode variar. Uma possibilidade interessante em sala de aula de Matemática, para estudantes com ainda pouca experiência nas investigações, é o que tem sido denominado Descoberta Guiada (ERNEST, 1996). Nesse tipo de descoberta o professor traça um objetivo a ser alcançado e conduz o estudante, de forma indireta, ao conhecimento.

A atividade proposta neste estudo foi nos moldes de uma descoberta guiada.

Sujeitos, contexto e procedimentos metodológicos

Os sujeitos deste estudo foram cinco estudantes oriundos de escolas públicas e uma estudante oriunda de escola privada. Destes, três estavam cursando a disciplina Elementos de

Cálculo e dois já a haviam cursado. A referida disciplina é parte da grade curricular da Licenciatura e do Bacharelado em Matemática da UFOP e oferecida no primeiro período dos cursos. Nessa disciplina, os alunos têm a oportunidade de rever, ou mesmo aprender, conteúdos voltados para embasar os estudos do Cálculo Diferencial e Integral: desigualdades, intervalos e valor absoluto, equações e inequações polinomiais de 1º e 2º graus e modulares, funções (definições, exemplos, gráficos), funções afins e aplicações, funções quadráticas e aplicações, Composição de funções, funções bijetoras e invertíveis, Funções trigonométricas e suas inversas, funções logarítmicas e exponenciais.

Para a coleta de dados nos importamos mais com a descrição das situações, procedimentos, comportamentos dos sujeitos envolvidos e suas falas, sem hipóteses a priori, o que nos autoriza a inserir o estudo dentro do paradigma qualitativo (ALVES-MAZZOTTI; GEWANSDSZNAJDER, 1998).

O interesse em criar uma forma de visualização das propriedades de logaritmos surgiu a partir do incômodo de um dos autores deste artigo ao notar que os estudantes, de forma geral, apresentam dificuldades para compreender tais propriedades e, como consequência, apenas memorizam as expressões relativas a elas. Não é raro encontrar estudantes que pensam, por exemplo, que o logaritmo do produto é o produto dos logaritmos.

Após pesquisar, por um longo período, as possibilidades do GeoGebra para explorar as propriedades dos logaritmos, o professor chegou à versão da atividade proposta aos estudantes que será apresentada mais à frente – acreditando que a visualização oferecida pelo GeoGebra pode contribuir para melhor compreensão das propriedades do logaritmo.

Após exaustivos testes, chegamos à versão da atividade que consideramos adequada ao nosso objetivo. Sendo assim, convidamos os cinco estudantes para participar dela, em horário extraclasse, no laboratório de informática do Departamento de Matemática. Caso nossos resultados fossem satisfatórios, tínhamos a intenção de que passasse a ser prática recorrente para o ensino de propriedades de logaritmos.

A observação, que é clássica em pesquisas qualitativas, foi utilizada para capturar comportamentos, falas e expressões dos estudantes que, de alguma forma, nos dessem pistas das descobertas feitas por eles relacionadas às propriedades de logaritmos.

A Atividade

A atividade foi realizada no Laboratório de Informática. Os estudantes, alunos dos cursos de Bacharelado e de Licenciatura em Matemática, desenvolveram a atividade individualmente em um computador, seguiram um roteiro apresentado pelo docente e responderam às perguntas feitas no decurso da atividade. Antes do início da atividade propriamente dita, foi realizada uma revisão sobre funções exponenciais, definição de logaritmo e gráfico da função logarítmica.

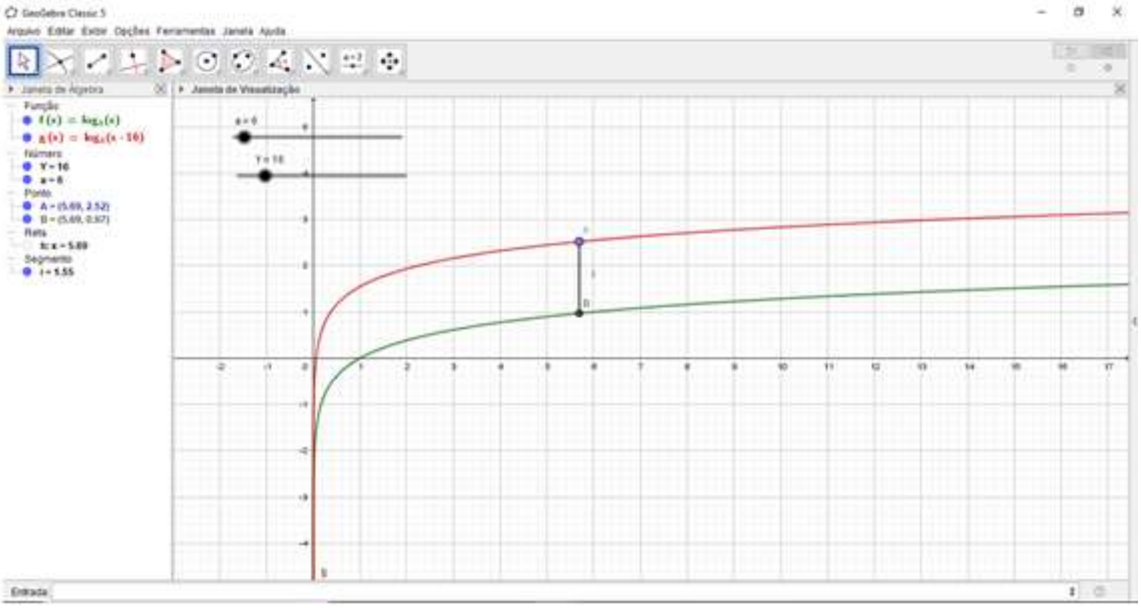
Nossos objetivos com a atividade foram: possibilitar uma visualização geométrica das propriedades do logaritmo do produto e do quociente; possibilitar que os estudantes pudessem conjecturar a propriedade do logaritmo do produto.

Como instrumento auxiliar foi criado o seguinte roteiro, que poderia auxiliar os estudantes na construção do gráfico da função logarítmica utilizando o GeoGebra (Figura 1).

Roteiro de construção

1) Crie os controles deslizantes a e Y, com a e Y positivos;
2) Construa as funções
   f(x) = log(a,x) e g(x) = log(a,xY);
3) Marque um ponto A sob o gráfico de f;
4) Construa uma reta perpendicular ao eixo x que passa pelo ponto A;
5) Construa o ponto B, obtido pela interseção entre a reta e o gráfico de g;
6) Construa o segmento AB e desabilite a exibição da reta;

Figura 1: Gráfico da função logarítmica obtido a partir do roteiro



Fonte: autores

Após a construção sugerida, realizamos algumas perguntas aos estudantes, já conduzindo para a abordagem do logaritmo do produto.

Perguntas feitas e comentários:

1) Deixando a e Y fixados e movendo A, o que acontece com o comprimento do segmento AB?

   Após um trabalho, puramente empírico, todos os estudantes foram capazes de concluir que o comprimento do segmento AB permanecia constante.

2) Mude os valores de a e Y movendo os controles deslizantes criados. Neste caso o valor do segmento AB mudou?

   Após o trabalho de experimentação, uma estudante observou que o valor do comprimento AB deveria depender dos valores de a e Y.

3) Você consegue perceber alguma relação entre os valores de f(x) = log(a,x) e g(x) = log(a,xY)?

   Após um período de reflexão, uma estudante apontou que a diferença entre g(x) e f(x) era exatamente o valor do comprimento AB. Neste ponto, é importante observar que os valores de a e Y foram mantidos maiores que 1, ou seja o raciocínio da estudante estava correto.

As perguntas, nesse caso, foram conduzindo os estudantes à conclusão de fatos importantes para a compreensão da propriedade do logaritmo do produto. Para os estudantes, talvez fosse difícil perceber o que de importante deveria ser observado ou a que conclusões importantes eles deveriam chegar. Nesse sentido, a presença do professor foi de fundamental importância para *filtrar* as informações. Contudo, as perguntas, embora direcionando ao resultado desejado, não vinham acompanhadas de respostas imediatas. A resposta vinha do próprio estudante como resultado do que havia compreendido. Em outras palavras, as perguntas do professor contribuíram para que o estudante trilhasse um caminho coerente, pelo menos na sua percepção, para responder às questões, desenvolvendo seu raciocínio.

Isso corrobora as ideias de Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012, p. 356) quando os autores consideram que, para desenvolver no estudante a capacidade de raciocinar matematicamente "[...] é preciso trabalhar em tarefas que, por um lado, requerem raciocínio e, por outro lado, estimulam o raciocínio. Só deste modo se pode esperar uma compreensão efetiva dos conceitos e procedimentos matemáticos por parte do aluno".

Naturalmente, a resposta poderia estar errada ou parcialmente errada. Se fosse esse o caso, o professor, mais uma vez, poderia intervir para ajudar o estudante a encontrar outro caminho, ajudando-o a compreender melhor a situação proposta e a obter uma resposta mais satisfatória.

Após a obtenção da relação log(a,xY) = log(a,x) + K, em que K = AB (quando Y> 1), encaminhamos as perguntas no sentido de permitir que os obtivessem o valor de K. As seguintes perguntas foram feitas:

1) Qual o valor de log(a,1)?

2) Como o valor de log(a,1) pode nos ajudar a descobrir o valor de K?

Após refletirem, dois estudantes sugeriram (corretamente) a escolha de x = 1 e, neste caso, a obtenção de K = log(a,Y), conforme desejávamos. Finda a atividade, o professor sugeriu aos alunos que mudassem os valores de a ou Y de modo que pelo menos um deles ficasse menor que 1. A figura abaixo ilustra uma situação com a>1 e Y < 1.

Figura 2: situação com a>1 e Y < 1

Fonte: autores

Em seguida, perguntou-se:

3) E agora? Qual a relação existente entre f(x) e g(x)?

A mesma estudante que respondeu à questão 3 ponderou que, neste caso, a situação era diferente, pois, a diferença entre f(x) e g(x) era o valor do comprimento AB, isto é log(a,x) – log(a,xY) = K.

Surgiu uma dúvida entre os estudantes se a propriedade do logaritmo do produto ainda seria válida ou se, nesse caso, ter-se-ia log(a,xY) = log(a,x) – log(a,Y). A dúvida apresentada era natural, pois os estudantes estavam com a situação anterior em mente, quando K = log(a,Y).

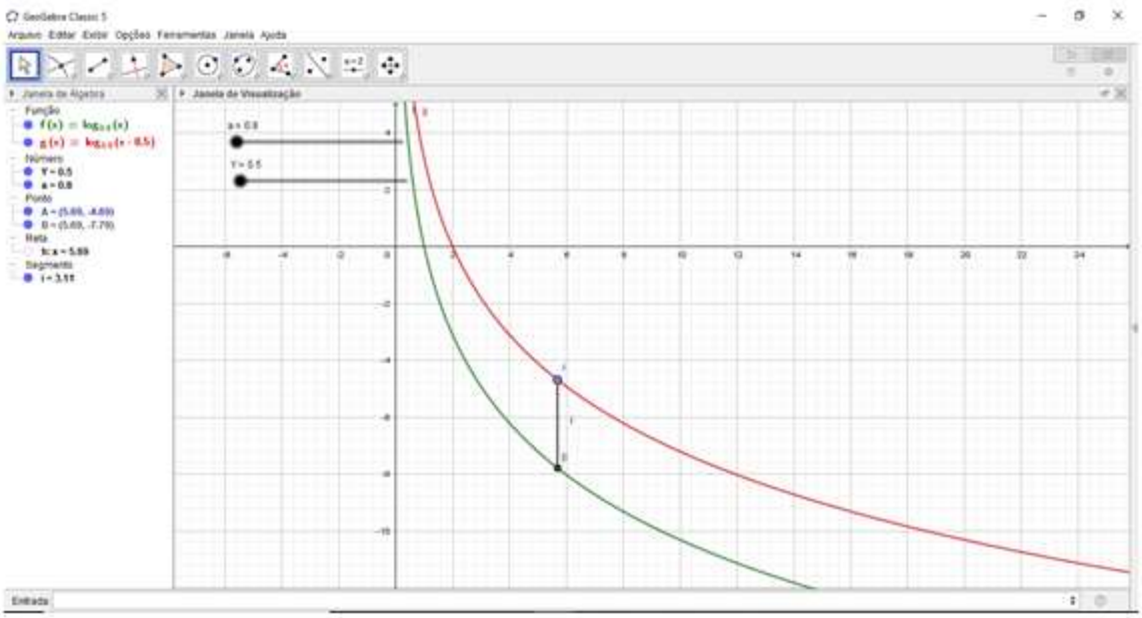
O professor, utilizando o quadro, propôs aos alunos que todos fizessem uma discussão a respeito da dúvida, adotando a mesma estratégia de antes. Os alunos escolherem (novamente) x = 1, obtiveram log(a,1) - log(a,Y) = K, isto é K = - log(a,Y) e notaram a diferença entre este caso e o anterior. Ainda que K = - log(a,Y), temos log(a,x) - log(a,xY) = - log(a,Y), o que implica em log(a,xY) = log(a,x)+log(a,Y).

Os casos em que a e Y são menores que 1 ou quando a<1 e Y > 1 são análogos aos anteriores e não foram trabalhados diretamente com os alunos, que foram convidados a estudar os casos.

A atividade permitiu aos estudantes compreender as propriedades de logaritmos, ainda que empiricamente, dando sentido a este conteúdo. Não estamos tratando de sentido prático, de uso cotidiano, que naturalmente é importante, mas de um sentido que leva o estudante a interpretar resultados. Não basta que o estudante decore fórmulas e procedimentos. De acordo com o NCTM[4] (2009), citado por Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012, p. 356) e em consonância com o que acabamos de discutir, "[...] a compreensão dos procedimentos passa não só pela sua aplicação, mas também por perceber a razão porque funcionam, como podem ser utilizados e como podem ser interpretados os seus resultados".

A figura abaixo ilustra uma situação em que a e Y são menores que 1.

Figura 3: situação em a<1 e Y<1



Fonte: autores

A seguir, temos a figura que representa a situação em que a<1 e Y > 1.

[4] National Council of Teachers of Mathematics

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Figura 4: situação em que a<1 e Y > 1.

Fonte: autores

A discussão sobre a validade da propriedade estudada no caso em que a base é um número positivo entre 0 e 1 gerou questionamentos entre os alunos participantes. Transcrevemos, abaixo, um diálogo entre o professor e uma aluna, no qual podemos perceber o modo como a mesma concluiu a veracidade da propriedade também neste caso.

Professor: Qual é o valor da constante K no caso em que 0<a<1?
Estudante: Eu já sei que vale log(a,Y).
Professor: Por quê?
Estudante: Porque a gente calculou.
Professor: Mas quando nós calculamos, tínhamos a>1...
Estudante não responde!
Professor: Como fizemos?
Estudante: Nós pegamos um x 'esperto'.
Professor: Então considere esse mesmo x.
Estudante: Se x=1, -i=log(a,Y).
Professor: E então? Quanto vale i?
Estudante: Nesse caso, i=-log(a,Y).
Professor: E qual será a conclusão nesse caso?
Estudante: log(a,XY)=log(a,X)-i =log(a,X)-(-log(a,Y))=log(a,X)+log(a,Y).
Professor: E daí concluímos que a propriedade também vale no caso em que a base está entre 0 e 1.

Diante das dúvidas do estudante, o professor cria provocações em forma de perguntas, que geram um encadeamento que permite ao estudante chegar a uma conclusão ou responder ao próprio questionamento. Essa é uma estratégia subjacente à descoberta guiada.

Durante a discussão com a turma, surgiram frases como “-g(x) menos o segmento é igual a f(x).” Embora inconsistentes, por sugerirem subtrair um número de um segmento, indicam que o aluno compreendeu geometricamente o que ocorreu, ainda que a verbalização estivesse equivocada. Ainda assim, representa uma boa oportunidade para o professor observar que a parcela subtraída não é o segmento, mas sua medida.

O questionário e sua análise

Após realizarmos o que estava previsto no roteiro, foi solicitado que os estudantes respondessem a um questionário, composto por cinco questões. As respostas, nos permitiram analisar as impressões dos alunos sobre a atividade bem como sobre seu conhecimento prévio acerca do assunto abordado.

A primeira questão tinha o objetivo de verificar se os estudantes já haviam estudado a propriedade abordada. Quatro deles disseram que já haviam visto tal resultado, seja no Ensino Médio ou no curso de Elementos de Cálculo. Apenas um dos alunos deu uma resposta distinta, respondendo que talvez tenha “visto por alto, no Ensino Médio”.

A segunda pergunta procurava saber se o estudante já havia estudado tais propriedades anteriormente, se seu professor as demonstrou formalmente ou, de alguma maneira, mostrou que elas eram válidas, ou simplesmente as enunciou para utilização nos exercícios?

As respostas a essa pergunta sugerem que as propriedades não são, em geral, justificadas para os alunos, especialmente no Ensino Médio, uma vez que quatro estudantes responderam que os professores apenas enunciaram as propriedades, sem nenhum tipo de justificativa. Um desses quatro estudantes, além de outro que apenas estudou tal propriedade no curso de Elementos de Cálculo, informou ter ‘visto’, na graduação, a demonstração formal da propriedade. A seguir, a resposta do aluno A_1 à segunda pergunta:

A_1: Que eu me lembre só as enunciaram.

Nenhum dos estudantes entrevistados respondeu que seus professores haviam realizado alguma atividade similar à desenvolvida por nós – com o uso de alguma ferramenta computacional, como o GeoGebra –, no intuito de justificar a validade da propriedade do logaritmo do produto. Concluímos, portanto, que nenhum dos participantes havia experimentado algum tipo de visualização ou manipulação utilizando ferramentas computacionais, sobre os aspectos do gráfico que envolvem as propriedades do logaritmo.

A importância dos processos de visualização tem sido destacada em muitas pesquisas em Educação Matemática, sobretudo naquelas que tratam do ensino de cálculo. De acordo com Arcavi (2003 *apud* FROTA, 2013, p. 63), a visualização não serve apenas para fins ilustrativos. Ela também serve como componente fundamental na argumentação, resolução de problemas e demonstrações.

A terceira questão proposta tinha como objetivo avaliar a percepção dos alunos sobre a relação entre a atividade proposta e a compreensão da propriedade do logaritmo do produto. Seu enunciado era o seguinte: se seu professor não as demonstrou, nem mostrou que eram válidas, com essa atividade você conseguiu compreender as propriedades? Justifique.

Os estudantes foram unânimes em considerar que a atividade proposta facilita a compreensão do conteúdo estudado. As respostas a esta questão foram bastante variadas, enfocando aspectos diversos. O estudante A_2, por exemplo, valorizou a atividade afirmando:

> **A_2**: Apesar da demonstração feita em sala, ainda havia muita dificuldade em compreender o processo e com a visualização com o GeoGebra, fica mais fácil.

O estudante A_3, além de responder, conjecturou a possibilidade de utilizar atividades similares no estudo das demais propriedades dos logaritmos:

> **A_3**: Inclusive antecipar o resultado e imaginar como seria para as demais propriedades.

Fazer conjecturas é importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Entretanto, se o estudante não compreende o conteúdo de forma efetiva, não se sente encorajado a conjecturar acerca dele. Uma possibilidade para facilitar a compreensão dos estudantes e, como consequência, dar-lhes mais segurança para discussões em sala de aula é o uso de softwares de geometria dinâmica, como ocorreu no presente estudo. Nesse sentido, Barros Filho, Laudares e De Miranda (2014, p. 329), consideram que:

> Por meio de *softwares* matemáticos, os estudantes podem visualizar na tela do computador os mais diversos gráficos, investigar, analisar, estabelecer proposições e conjecturas, validar resultados, relacionar variáveis e funções e construir várias representações da informação que auxiliam na resolução de problemas e na construção dos conceitos matemáticos.

O uso do GeoGebra para esta atividade enfatizou a componente visual do conteúdo. Possibilitou aos estudantes acesso a imagens que, em alguma medida, suscitam reflexões, o desenvolvimento de ideias ainda não conhecidas (no caso em que o estudante nunca havia tido contato com as propriedades), um *pensar sobre* e avançar na compreensão do conteúdo de logaritmos. Isso evidencia, mais uma vez, a importância do processo de visualização em Matemática e está em sintonia com a definição de visualização dada por Arcavi (2003 *apud* FROTA, 2013, p. 71), que escreveu o seguinte, sobre visualização:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de escrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados.

Outra resposta à terceira questão que nos chama a atenção foi dada pelo estudante A_4.

A_4: Aceitei as propriedades, o que ocorreu muito no ensino Médio e Fundamental.

A fala desse estudante nos leva a refletir sobre os procedimentos utilizados em nossas escolas, nas quais, em grande parte das vezes, os conceitos matemáticos são ensinados sem justificativas, explorações geométricas e sem valorizar metodologias e práticas docentes que conduzam à compreensão das propriedades. Uma boa prática para melhorar essa situação seria os professores introduzirem, desde cedo, demonstrações aos estudantes. No ensino fundamental, essas demonstrações não precisariam ser formais, mas suficientemente capazes de permitir que o estudante entenda muitos *porquês* e saiba, a partir daí, argumentar e justificar várias coisas. Os PCN (1998) sugerem algo parecido quando consideram que

> [...] é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas (BRASIL, 1998, p. 71).

De Villiers (2002) nos explica que a demonstração tem sido “[...] encarada quase exclusivamente em termos de verificação (convicção ou justificação) da correcção das proposições matemáticas. A ideia é que a demonstração é usada principalmente para eliminar as dúvidas, sejam elas pessoais e/ou de outros cépticos” (DE VILLIERS, 2002, p. 3).

O autor, no entanto, avança e amplia o papel das demonstrações considerando que, além de eliminar dúvidas dos estudantes, ela tem outras funções: explicação (proporcionar compreensão sobre porque é que é verdade); descoberta (a descoberta ou a invenção de novos resultados); comunicação (a negociação do significado); desafio intelectual (a realização/satisfação pessoal por se ter construído uma demonstração); sistematização (a organização de vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas).

De Villiers (2002) apresenta essas funções levando em consideração os matemáticos. Contudo, em alguma medida e guardadas as devidas proporções, elas podem ser consideradas para estudantes da educação básica com vistas à melhoria na aprendizagem de Matemática.

Ao serem questionados se o uso do GeoGebra facilitou ou não compreensão das propriedades abordadas, todos os alunos responderam afirmativamente e consideraram o uso do *software* como um facilitador. Além disso, quando questionados sobre a importância de atividades como a realizada, para a sua formação matemática, os estudantes valorizaram os procedimentos realizados, enfocando a compreensão do próprio conteúdo. Como exemplo, a resposta do estudante A_1:

> **A_1**: Nos permite entender o que estamos usando, porque é válido, e isso nos ajuda também a lembrar as propriedades. Para Licenciatura é uma ferramenta de ensino muito interessante.

Ela parece reforçar que atividades similares ‘fogem’ das atividades comumente apresentadas na sala de aula. Também aborda a importância deste tipo de prática para os professores de licenciatura, que podem adotar práticas semelhantes em suas disciplinas. É importante que os futuros professores tenham contato, durante a sua formação inicial, com o uso de tecnologias para tentar atender as demandas que, possivelmente, surgirão em sua prática. A importância do uso dessas tecnologias nas aulas de Matemática tem sido amplamente divulgada como resultados de muitas pesquisas (PONTE, 2000; PONTE, OLIVEIRA; VARANDAS, 2003; MALTEMPI, 2008) em Educação Matemática e isso atesta tal importância.

Considerações finais

Ao realizar a atividade proposta e ao colhermos as impressões dos estudantes, percebemos que a utilização de softwares de geometria dinâmica com o objetivo de facilitar a visualização/compreensão de conteúdos matemáticos, praticamente não ocorreu nas turmas desses estudantes, quando frequentavam o Ensino Básico. O retorno positivo dos alunos à atividade guiada e a confirmação das potencialidades de aulas desse tipo, para melhor aprendizagem das propriedades de logaritmos, vão ao encontro de vários resultados de pesquisas em Educação Matemática que consideram o uso de recursos tecnológicos como bastante profícuo para o ensino de Matemática, tanto no ensino básico quanto nos cursos de licenciatura (FIGUEIREDO; GROENWALD, 2018; FARIA; MALTEMPI, 2018).

No presente estudo, pudemos perceber, claramente, que o uso do GeoGebra contribuiu para: a compreensão da propriedade do logaritmo do produto, por meio da visualização e intervenção do professor; criar conjecturas a respeito de como seria a extensão das ideias para o logaritmo do quociente; criar situações, dentro da atividade, para suscitar reflexões acerca do conteúdo que pudessem, como resultado, gerar discussões que promovessem um avanço no repertório de conhecimentos dos estudantes.

Além disso, entendemos que a atividade, por ter sido proposta em um curso de licenciatura em Matemática, pode ter provocado nos participantes a percepção de que a prática pedagógica precisa ser constantemente renovada para se adequar a mudanças que os sismos da área da educação porventura provoquem. Não é esse um trabalho fácil. No entanto, é necessário que tentemos realizá-lo, ainda que a muitas mãos. Nesse processo de mudança, pelo menos por enquanto, as tecnologias digitais podem servir como parte do alicerce da prática do professor. Não é fácil, mas há esperanças...

Referências

ALVES-MAZZOTTI, A. J; GEWANSDSZNAJDER, F. O debate contemporâneo sobre os paradigmas. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.

BAIRRAL, M. A.; POWELL, A. B. Interlocution among problem solvers collaborating online: A case study with prospective teachers. **Pro-Posições**, v. 24, n. 1, 1-16, 2013.

BARROS FILHO, A. A.; LAUDARES, J. B.; DE MIRANDA, D. F. A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica. **Educação Matemática Pesquisa:** Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 16, n. 2, set. 2014.

BORBA, M. C.; CHIARI, A. **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

BORBA, M. C.; MALHEIROS, P.; ZULATTO, B. **Educação a Distância Online**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BRASIL, **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática, Brasília: MEC / SEF, 1998.

CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B. A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas aulas de Matemática: Limites e possibilidades. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 8, n. 2, p. 101-119, 2014.

CURI, E.; SANTOS, C.A.B. Algumas reflexões sobre o tratamento de conteúdos do ensino básico em um curso de licenciatura em matemática. **Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana**, Recife, v. 2, n. 2, p. 1-19, 2011.

DE VILLIERS, M. **Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica.** Trad. Rita Bastos. ProfMat, 10, Visue, Portugal. Actas... (CD-ROM) Visue, Associação de Professores de Matemática, 2002. Disponível em http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/profmat2.pdf último acesso em 27 de junho de 2019.

ERNEST, P. Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Eds.). **Investigar para aprender Matemática**, Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996, p.25-48.

FARIA, R. W. S. C.; MALTEMPI, M. V. Intradisciplinaridade Matemática com GeoGebra na Matemática Escolar. **Bolema,** v. 33, n. 63, p.348-367. 2018.

FIGUEIREDO, F. F.; GROENWALD, C; L; O; G. Utilizando tecnologias digitais para o design de atividades abertas em Matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. v.7, n.13, p.87-107, jan.-jun. 2018.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. São Paulo: Paz e Terra, 2000.

FROTA, M. C. R. Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em cálculo. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A, M. F. T. (orgs). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. São Paulo: Papirus, 2013, p. 61-88.

MALTEMPI, M. V. Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. **Revista de Ensino de Ciência e Matemática**, Canoas, v.10, n.1, p.59-83, jan./jun. 2008.

PONTE, J. P. Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: Que desafios? **Revista Iberoamericana de Educación**, Madri, v. 24, p. 63-90. 2000.

PONTE, J. P., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na Sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. **Praxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul./dez. 2012.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática:** explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

Recebido em: 30 de setembro de 2018
Aprovado em: 10 de julho de 2019