revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MENOS COM MENOS É MENOS OU É MAIS? RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS NA SALA DE AULA

Evanilson Landim[1]
Lícia de Souza Leão Maia[2]

Resumo: Afirmar que *menos com menos é mais* não é uma ação trivial, tampouco uma verdade que se sustenta em todas as situações. O artigo, ora apresentado, busca compreender as dificuldades e resistências de adolescentes, jovens e adultos escolarizados na compreensão dos conceitos relativos à multiplicação e à divisão de números inteiros. Foram feitas entrevistas clínicas com 32 estudantes já escolarizados na multiplicação e divisão de números inteiros. Os participantes responderam a 17 itens distribuídos em três questões elaboradas e analisadas a partir da teoria dos campos conceituais. Os resultados trouxeram à tona que, tanto os estudantes da EJA, quanto os do 8º ano do Ensino Fundamental ainda apresentam dificuldades na resolução de situações que envolvem a multiplicação e a divisão de números inteiros relativos.
Palavras-chave: Números Inteiros. Multiplicação e Divisão. Educação de Jovens e Adultos. Campos Conceituais.

LESS WITH LESS IS LESSER OR MORE? SOLVING MULTIPLICATION AND DIVISION PROBLEMS OF WHOLE NUMBERS IN THE CLASSROOM

Abstract: The statement that less with less is more is not a trivial action, nor a truth that is supported in all situations. The article presented here seeks to understand the difficulties and resistance of educated adolescents, young and adults to understand the concepts of multiplication and division of whole numbers. The research was conducted through clinical interviews applied to 32 students already attending school in the multiplication and division of whole numbers. Participants responded to 17 items divided into three questions prepared and analyzed according to the theory of conceptual fields. Results brought to light that both students of YAE and the 8th grade still have difficulties in resolving situations involving multiplication and division of integers.
Keywords: Integer. Multiplication and Division. Youth and Adult Education. Conceptual Fields.

Introdução

"Professor, menos com menos é menos ou é mais?"

As últimas três décadas - de 1980 a 2010 - têm sido marcadas por intensas discussões, pesquisas e práticas inovadoras no ensino da Matemática. Em contrapartida, a aprendizagem a

[1] Doutor em Educação pela UFPE. Mestre em Educação Matemática e Tecnológica pela UFPE. Professor do Colegiado de Matemática da UPE/Campus Petrolina e da Escola Estadual Antônio Padilha. E-mail: evanilson.landim@upe.br.
[2] Doutora em Sciences de L'education - Université de Paris V (Sorbonne). Professora Titular da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). E-mail: liciaslm@hotmail.com.

partir do processo de conceitualização ainda tem sido substituída por um ensino sublinhado pelo uso de regras, fórmulas e truques. Esses métodos de ensino, muitas vezes, deixam de lado a compreensão dos conceitos em detrimento do emprego de técnicas e algoritmos. Nesse caso, o que ocorre é uma excessiva "preocupação com as respostas a serem obtidas, com os modos de procedimentos já estabelecidos" (MEDEIROS, 2005, p.14).

A questão é que essa forma de agir pode inibir o pensamento, a reflexão e a conduta dos estudantes nessa matéria. Por outro lado, o fato é que já evoluímos muito no ensino e na aprendizagem de Matemática, principalmente graças aos movimentos e às pesquisas que a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), juntamente com as universidades, tem realizado nos últimos 30 anos.

Um ensino de Matemática mais tradicional alimenta, cotidianamente, questionamentos como: *professor, menos com menos é menos ou é mais?* Não deveria ser estranho, na sala de aula, emergirem questões dessa natureza, porque uma prática de ensino que desconsidera a reflexão, a análise e a compreensão, dando lugar apenas à repetição dificilmente vai deixar de favorecer o surgimento dessas e de outras indagações.

O texto aqui apresentado busca respostas e significados para os modos de agir de estudantes do 8º ano e da 4ª fase da educação de jovens e adultos (EJA), ciclos equivalentes do Ensino Fundamental, quando resolvem atividades relativas à multiplicação e à divisão de números inteiros. Para tal, foram propostas três questões ou problemas, elaborados e analisados com base na teoria dos campos conceituais. Nesta análise, estamos compreendendo como problema toda tarefa apresentada aos estudantes, embora certos da restrição desse entendimento.

Alguns estudos (GLAESER, 1985; BORBA, 1993; NASCIMENTO, 2002) já identificaram e descreveram resistências à aprendizagem desses conceitos, de maneira particular, nas ações de estudantes escolarizados ou não na adição e subtração de números inteiros relativos. Todavia, ainda são escassas pesquisas que abordem os processos de aprendizagem envolvendo a multiplicação e a divisão nesse campo numérico.

Diante disso, buscamos compreender *quais são as principais dificuldades evidenciadas por adultos e adolescentes escolarizados em relação à multiplicação e à divisão de números inteiros e que aspectos específicos (modalidade de ensino, idade, atividade* *profissional) podem influenciar essa compreensão.*

A aceitação de medidas positivas e negativas como números inteiros

Estima-se que a origem dos números negativos tenha acontecido há mais de dois mil anos na China. Mas o seu entendimento, tal como o concebemos hoje, é bem recente. "A prática clandestina do cálculo dos números relativos antecedeu em 1.600 anos sua compreensão" (GLAESER, 1985, p.74).

Por volta de 250 d. C., Diofanto de Alexandria trouxe importantes contribuições para a álgebra e à teoria dos números. A ele atribui-se o primeiro tratamento com as regras de sinais (BOYER, 1996; GARBI, 2009). Essa abordagem vem à tona quando trata da teoria algébrica dos números em um dos seus trabalhos mais relevantes: *Aritmética*.

Nessa obra, ele se ocupou quase que totalmente da resolução de equações do primeiro e do segundo graus, inclusive, empregando artifícios engenhosos para desviar soluções estranhas ao conjunto dos números racionais positivos (EVES, 2004). A partir de um diagrama geométrico, considera, no desenvolvimento do produto $(a - b).(c - d)$, que a multiplicação de dois números negativos resulta em um número positivo. Para uma região de superfície conhecida, o desenvolvimento algébrico da expressão $(a - b).(c - d)$ exige que o produto $(- b).(- d)$ seja considerado como positivo. Em outras palavras, Diofanto tratou o produto de duas medidas negativas como uma medida positiva. "O que está *em falta* multiplicado pelo que está em *falta* dá o que é positivo; enquanto que o que está *em falta* multiplicado pelo que é positivo, dá o que está *em falta*." (DIOFANTO *apud* GLAESER, 1985, p.47, *grifo do autor*).

A compreensão de Diofanto foi um primeiro passo na aceitação e compreensão dos números negativos. Isso, entretanto, não significa que ele já tivesse percebido a existência desses números, haja vista a falta de método e empenho para desviá-los do seu caminho.

Outros matemáticos, tais como os italianos Scipione del Ferro (1465 – 1526), Nicolò Fontana (1500 – 1557) e Girolamo Cardano (1501 – 1576), algebristas de grande destaque no século XVI e que apresentaram muitas contribuições ao processo de resolução das equações algébricas do terceiro e quarto graus, também rejeitaram as raízes negativas, evitando a modelização de situações que apresentassem tais raízes (GLAESER, 1985).

A considerável lista de matemáticos que rejeitaram o uso de números negativos no tratamento algébrico fez Glaeser (1985) denominar esse fenômeno de *sintoma de evitação*. Stevin, matemático que também viveu no século XVI, admitia que números negativos pudessem representar as raízes e os coeficientes de equações, mas ainda se manteve preso à cardinalidade do número, isto é, o número para ele era a representação da quantidade de elementos de determinado objeto ou coisa. Essa concepção de que um número sempre deveria estar associado a algo real, a uma quantidade (cardinalidade), é apontada como o principal obstáculo ao desenvolvimento dos números relativos (GLAESER, 1985).

Glaeser (1985), analisando o desenvolvimento histórico do entendimento dos números inteiros pelos matemáticos, identifica os seguintes obstáculos epistemológicos à compreensão desses números:

1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas;
2. Dificuldade em dar um sentido às quantidades negativas isoladas;
3. Dificuldade em unificar a reta numérica;
4. Ambiguidade do zero absoluto e do zero como origem;
5. Oposição relativa à concretude que decorre espontaneamente nos números naturais;
6. Necessidade de um modelo unificador do campo aditivo para o multiplicativo.

O obstáculo *inaptidão para manipular quantidades isoladas* refere-se à rejeição de matemáticos, como Diofanto, a medidas negativas; nessa condição, o número não positivo (ou não número) era tratado como o que está em falta.

A *dificuldade em dar um sentido às quantidades negativas isoladas* é reconhecida em matemáticos como Stevin, que recorre a artifícios para que os “números negativos” sejam utilizados apenas como elementos intermediários, sem que tais representações sejam reconhecidas como número, mas apenas empregadas isoladamente para atender às necessidades da própria Matemática.

A principal identificação do obstáculo *dificuldade em unificar a reta numérica* é percebida na justaposição da reta numérica como duas semirretas opostas, condição que desconsidera o número com características dinâmicas.

A *ambiguidade do zero absoluto e do zero como origem* (ambiguidade dos dois zeros) está presente nos trabalhos de muitos matemáticos (ver Quadro 1), que, durante séculos, interpretaram o zero apenas como valor absoluto, abaixo do qual nada mais poderia existir.

O obstáculo *oposição relativa à concretude que decorre espontaneamente nos números naturais* foi caracterizado como a longa dificuldade dos matemáticos de se distanciarem do sentido concreto e substancial dos números, para os quais a Matemática só existiria a partir do mundo real, sem abstrações.

A *necessidade de um modelo unificador do campo aditivo para o multiplicativo* caracteriza-se pela necessidade de trazer à tona um modelo aditivo eficiente também no campo multiplicativo, capaz de atender às propriedades destas duas operações.

Além de apresentar e descrever os obstáculos epistemológicos à compreensão dos números inteiros, Glaeser (1985) assinala qual(ais) dele(s) foi(foram) observado(s) entre alguns célebres matemáticos.

Quadro 1: Obstáculos de matemáticos à compreensão dos números inteiros (GLAESER, 1985).

NASC. – MORTE	OBSTÁCULOS / AUTORES	1	2	3	4	5	6
~325 - 409 d.C.	Diofantes	-					
1548 - 1620	Simon Stevin	+	-	-	-	-	-
1596 - 1650	René Descartes	+	?	-	?		
1698 - 1746	Colin Maclaurin	+	+	-	-	+	+
1707 - 1783	Leonard Euler	+	+	+	?	-	-
1717 - 1783	Jean D'Alembert	+	-	-	-	-	-
1753 - 1823	Lazare Carnot	+	-	-	-	-	-
1749 - 1827	Pierre de Laplace	+	+	+	?	-	?
1789 - 1857	Augustin Cauchy	+	+	-	-	+	?
1839 - 1873	Herman Hankel	+	+	+	+	+	+

Legenda: **+ obstáculo ultrapassado; - pesquisado, mas não ultrapassado; ? não há como informar pelos textos pesquisados; ☐ o autor/matemático não tentou ultrapassar o obstáculo.**

Fonte: Os autores.

Atribuir sentido aos números e à ideia de que de uma quantidade menor não se pode tirar uma quantidade maior, dentre outras, como apontou Glaeser (1985), mostra que os números naturais se apresentam como um obstáculo à aprendizagem dos números inteiros. A aceitação dos números inteiros relativos foi lenta e bastante polêmica. Ainda hoje, podemos perceber nuanças nesse campo numérico, se não na sua aceitação, mas na justificativa para as regras de sinais.

> Alguns livros de Matemática dizem que a regra de sinais é uma convenção, não um teorema. Isso precisa ser recebido com cuidado e bem entendido: ***trata-se de uma convenção que somos obrigados a estabelecer se quisermos que a propriedade distributiva do produto em relação à soma valha também para números negativos e essa é a essência da prova de Diofanto*** (GARBI, 2009, p.125, *grifo do autor*).

O entendimento dos matemáticos sobre os números negativos, considerados como números fictícios, aponta a dificuldade de compreensão desses números, principalmente pela resistência que aqueles matemáticos teriam em lhes atribuir um sentido, talvez por já conviverem com os números racionais e irracionais, que possuem aplicações mais imediatas e já conhecidas.

Dificuldades na aprendizagem dos números inteiros relativos

Na sala de aula, as dificuldades dos estudantes para a compreensão desses números não se distanciam daquelas enfrentadas pelos matemáticos ao longo de sua construção. A necessidade de atribuir sentido aos números e à ideia que de uma quantidade menor não se pode tirar uma quantidade maior, revela que os números naturais ainda se apresentam como um obstáculo à aprendizagem dos números inteiros.

> Pelo menos uma das dificuldades que os alunos encontram no aprendizado do conceito de número negativo guarda um paralelo muito forte com uma dificuldade encontrada pelos matemáticos no desenvolvimento histórico do conceito. Trata-se da dificuldade de entender o negativo no quadro de uma concepção *substancial* de número. Por essa concepção, que predominou até certo período do século XIX, o número era entendido como "coisa", como grandeza, como objeto dotado de substância (ASSIS NETO, 1995, p.3, *grifo do autor*).

No currículo escolar brasileiro, geralmente, o ensino dos números inteiros ocorre a partir do 7º ano ou da 3ª fase da EJA, ciclos correspondentes do Ensino Fundamental. Desde então, os estudantes têm contato com a chamada *regra de sinais* e são estimulados a aplicá-la na resolução de operações com números inteiros. Contudo, essa tem sido uma tarefa na qual os estudantes têm apresentado muitas dificuldades.

> A introdução desse novo campo numérico e das regras para operações com números positivos e negativos frequentemente resultam em dificuldades para os alunos, já que os números naturais até então eram os únicos utilizados em sala de aula (BORBA, 1998, p.121).

Outro problema que surge na aprendizagem dos números relativos é explicar que o sinal de menos não serve apenas para subtrair duas quantidades, mas que também é utilizado para indicar sinal de número. Nessa condição, inevitavelmente, o sinal de menos precisa ser aceito pelo estudante com outros significados (sinal de número, inversão, relação).

O entendimento dos números inteiros só se dá quando o estudante percebe a necessidade de ampliação do conjunto dos números naturais (TEIXEIRA, 1993), o que é válido apenas em algumas situações, como por exemplo, ordenar, contar e codificar objetos. Mas é insuficiente para garantir a ideia de elemento oposto ou a de fechamento da operação subtração.

Para Teixeira (1993), os números positivos e negativos não são caracterizados como números inteiros pelo seu valor absoluto, mas sim pela posição que ocupam em relação ao ponto de origem; por isso, esses números são tratados como relativos, ou seja, amplia-se a ideia construída no conjunto dos números naturais de que um número sempre representa uma quantidade.

Do mesmo modo que os problemas envolvendo números naturais guardam diferentes significados, os problemas que envolvem números inteiros também apresentam variados tipos, dentre eles: *medida*, *relação e transformação*. Por exemplo, se alguém possui R$ 5,00 na sua conta bancária e retira R$ 7,00, o seu saldo passa a ser uma dívida de R$ 2,00. Assim, o 5 é uma medida positiva, o 2 final uma medida negativa e o 7 representa uma transformação negativa (se fosse o caso de um depósito de R$ 7,00, teríamos uma transformação positiva). Ainda, o 7 pode ser entendido como uma relação, pois, independente do que a pessoa possuía, ela tinha 7 a menos do que antes, o que caracteriza uma relação negativa (BORBA, 2009).

Estudantes que ainda não receberam instrução formal nesse campo numérico demonstram compreender o significado de inteiro enquanto medida, mas a compreensão de inteiro enquanto relação requer um tempo maior. Para Borba (2009), mesmo antes da instrução formal no conjunto dos inteiros, os estudantes já possuem conhecimentos importantes sobre esse campo numérico, principalmente, quando a situação diz respeito a inteiro como medida, e não se faz necessário explicitar os números e as operações realizadas com os mesmos e os problemas em questão são diretos.

Os números negativos não podem ser entendidos da mesma forma que os números naturais foram concebidos e utilizados historicamente pelas diversas civilizações, já que estes números eram utilizados para indicar a quantidade de objetos, animais ou pessoas. No caso dos inteiros, a essência da sua compreensão requer o entendimento do funcionamento das regularidades dos conjuntos numéricos.

A facilidade na compreensão de situações que associam número ao seu significado pode estar relacionada ao desenvolvimento histórico da representação do número que, segundo Boyer (1996), deu-se em diferentes civilizações - maia, egípcia, hindu, romana, babilônica, chinesa, dentre outras - por meio da percepção de características entre as quantidades de objetos ou animais e as representações que faziam para representar essas quantidades.

A teoria dos campos conceituais

Neste estudo, utilizou-se a teoria dos campos conceituais (TCC) como referência à compreensão da construção do conhecimento e também à análise do problema ora proposto. Por isso, a seguir, apresentam-se os principais conceitos utilizados por essa teoria para explicar o processo de aquisição do conhecimento tecnológico e científico pelos indivíduos.

A teoria dos campos conceituais foi proposta por Gérard Vergnaud. A questão central dessa teoria é apresentar elementos que possibilitam o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas mobilizadas pelo sujeito diante de uma dada situação (VERGNAUD, 1996).

O objetivo da teoria é compreender como se dá a aprendizagem de um conceito. Para

Vergnaud (1996), um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se nos interessamos por sua aprendizagem e seu ensino. A TCC é uma teoria do campo da Psicologia, o que não a impede de ser utilizada no quadro da didática, apesar de não ser, ela mesma, uma perspectiva de ensino.

> Estamos, assim, diante de uma teoria psicológica, multidimensional e desenvolvimentista do conhecimento. Na realidade, esta é uma teoria cognitiva do sujeito em situação. Enquanto tal corresponde a uma abordagem psicológica do conhecimento que considera, ao mesmo tempo, o processo de desenvolvimento e de aprendizagem do indivíduo. Neste sentido, a atividade educativa é parte integrante do seu campo de estudo e, em particular, a atividade didática (MAIA, 2000, p.2).

Na busca por responder à questão *como se desenvolvem as competências?* Vergnaud avança em relação a Piaget, quando considera que o processo de conceitualização do real envolve aspectos intrassubjetivos e extrassubjetivos e notadamente reconhece a importância da mediação na construção dos conceitos, como propunha Vygotsky; por isso, destaca que a escolha das situações exerce papel fundamental na aprendizagem.

Essa teoria trata da conceitualização do real, o que, segundo o autor, assume importante papel na construção do conhecimento científico. Ao se preocupar com a necessidade de relacionar o conceito a uma dada situação, Vergnaud (1996) retoma Piaget no que se refere à função simbólica e propõe que um conceito é formado por três dimensões: um conjunto de situações (S), que dão sentido ao conceito (a referência); um conjunto de invariantes operatórios, onde se assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado) e o conjunto de representações simbólicas utilizadas, tanto na apresentação quanto na resolução do problema (o significante).

Nessa proposta, a construção do saber ocorre a partir de situações e problemas já conhecidos pelos estudantes. Por outro lado, os conceitos têm um domínio de validade delimitado em função da experiência e do desenvolvimento cognitivo de quem aprende. Diante de um determinado problema, o estudante mobiliza os conhecimentos de que já dispõe para resolver a situação. A capacidade operatória do indivíduo, ao trazer à tona o que já conhece frente à situação, é denominada de competência (VERGNAUD, 1996).

As competências podem ser compreendidas como sendo uma combinação de esquemas, que é a forma como o estudante organiza seus invariantes de ação diante de uma classe de situações. Por isso, o autor defende que, analisando-se as condutas que os estudantes empregam na solução de tarefas (os problemas), é que se pode verificar sua competência em determinado campo do conhecimento.

“Chamemos <<esquema>> à *organização invariante da conduta para uma dada classe de situações*. É nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos-em-acto do sujeito” (VERGNAUD, 1996, p.157, *grifo do auto*r). Às formas operacionais de organização dos conhecimentos implícitos ou explícitos em esquemas, Vergnaud (1996) chama de invariantes operatórios. Segundo o autor, há dois tipos de invariantes operatórios: o conceito em ação e o teorema em ação. Na atividade, o teorema em ação e o conceito em ação são indissociáveis, no entanto, o primeiro representa uma proposição que pode ser verdadeira ou não sobre o real, à medida que o conceito em ação pode ser indicado como uma categoria de pensamento pertinente à resolução de cada etapa da tarefa proposta e que dispensa julgamentos.

Vergnaud (1996) não concebe o ensino e a aprendizagem de um conceito de modo isolado, fragmentado: para ele uma situação, por mais simples que possa parecer, sempre envolve diversos conceitos, do mesmo modo que um conceito nunca é tratado por um só tipo de situação; um conceito sempre engloba diversas situações. É essa compreensão que o leva ao entendimento de *campo conceitual* como um conjunto de relações entre *conceitos*, *situações*, *formas de representação e respostas dos sujeitos* diante de uma classe de problemas.

Como pontuado, a questão tratada neste estudo refere-se à multiplicação e à divisão de números inteiros, por isso, situaremos alguns pontos do campo conceitual das estruturas multiplicativas, o qual é constituído por todas as situações que podem ser analisadas ou resolvidas como proporções simples e múltiplas, onde se aplicam as operações de multiplicação, de divisão ou a combinação destas. Essas situações podem envolver conceitos como os de funções lineares e não lineares, números racionais, proporções, espaços vetoriais, análise dimensional, multiplicação e divisão.

Nunes e Bryant (1997) defendem que a criança, ao estudar o campo multiplicativo, deve entender novos conceitos e mobilizar outros invariantes, como os que envolvem a multiplicação e a divisão, ampliando, portanto, os conceitos de adição e subtração. A ideia de multiplicar e dividir não se reduz às ações de unir e separar, o que não impede que o cálculo da multiplicação possa ser feito como uma adição de parcelas repetidas, desde que essa não seja a única estratégia empregada.

A operação, seja ela de multiplicação, de divisão, ou uma combinação das duas, não é o que determina o grau de dificuldade para resolver uma ou outra situação, mas sim a sua estrutura, que pode variar em aspectos como: significado, natureza dos números envolvidos ou a posição do elemento desconhecido.

O acesso à parte implícita do conhecimento mobilizado pelos estudantes diante de uma situação é o que justifica a escolha dessa teoria. É nossa intenção conhecer os esquemas mobilizados pelos participantes diante de situações que tratam da multiplicação e da divisão de números inteiros.

Método

Nesta pesquisa, a coleta dos dados foi realizada por meio de entrevistas clínicas, com o objetivo de "estudar os motivos, os sentimentos e a conduta das pessoas" (MARCONI; LAKATOS, 2010, p.180). As questões propostas foram elaboradas à luz da teoria dos campos conceituais, buscando diversificar a natureza das situações e as formas de representação das mesmas.

A pesquisa contou com a participação de 32 estudantes, sendo metade da 4ª fase da Educação de Jovens e Adultos e a outra metade do 8º ano, que pertencem ao mesmo ciclo do Ensino Fundamental. A escolha dos participantes foi feita após apresentação da proposta em sala de aula, quando foram identificados os interessados em participar do estudo. Os estudantes foram distribuídos em quatro grupos, quais sejam: *adultos na 4ª fase da EJA; adolescentes na 4ª fase da EJA; adolescentes no 8º ano do Ensino Fundamental* e *adultos no 8º ano do Ensino Fundamental.*

Essa organização dos participantes foi feita em função do interesse em controlar as variáveis: *modalidade de ensino*, *faixa etária* e *atividade profissional.* As questões foram apresentadas aos estudantes individualmente, por meio de entrevistas clínicas, usando elementos do método clínico-piagetiano. Em seguida, foi solicitado que justificassem as

revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

respostas dadas a cada uma das questões.

Quadro 2: Questões propostas aos estudantes.

01. Resolva as multiplicações:

a) 4.11
b) 5 . (- 4)
c) (- 36).(- 12)
d) (- 15).13
e) (+ 48). (+ 8)
f) (- 18). (+ 3)
g) (+ 11).(+ 4)

02. Resolva as divisões:

a) 36 : 12
b) (+ 391): (+ 17)
c) 195: (- 13)
d) (- 450): (- 9)
e) (- 480): (+ 6)
f) (+ 36): (+ 12)

03. João é aluno da 3ª fase da EJA e o seu neto Talyson estuda o 7º ano. Eles estão brincando de adivinhar números inteiros. O esquema abaixo mostra os números pensados (N) no decorrer da brincadeira.

a) N → x 8 → 384
b) - 480 → : N → - 80
c) - 36 → x (- 12) → N
d) N → : (- 13) → + 15

Descubra, em cada caso, quais foram esses números, substituindo a letra **N** por esses números.

Fonte: Os autores.

Na análise das respostas, foram selecionados apenas os protocolos mais representativos dos esquemas mobilizados pelos estudantes, que foram tratados em toda a análise exposta adiante. Um estudo mais detalhado dos esquemas mobilizados por todos os participantes pode ser encontrado em Landim (2012). Neste texto, elegemos como mais representativos os protocolos que trazem à tona os principais esquemas empregados pela maioria dos participantes, os quais receberam nomes fictícios.

Resultados

Na análise dos dados, partimos da frequência de acertos nos itens propostos. Posteriormente, fez-se uma análise qualitativa das respostas apresentadas pelos participantes, identificando as estratégias utilizadas e a relação entre essas estratégias e os obstáculos epistemológicos descritos por Glaeser (1985). Mais uma vez, o critério utilizado para selecionar as respostas baseou-se no tipo de esquema e invariantes mobilizados pelos estudantes, independente da resposta final estar ou não correta.

Cumpre observar que, para a compreensão das respostas dos estudantes, foi feita uma análise qualitativa que se valeu, em alguns momentos, de dados de natureza quantitativa com a indicação da frequência e do percentual de acertos em cada um dos itens, inclusive, sublinhando o grupo ao qual o estudante pertence. Em seguida, analisamos os tipos de respostas apresentadas a partir dos casos escolhidos como representativos dos esquemas mais empregados pelos estudantes.

Frequência de acertos

O Quadro 3 apresenta a frequência de acertos dos participantes nas situações propostas.

Quadro 3: Frequência de Acertos por Questão e Grupo

NATUREZA DOS GRUPOS		Adultos na EJA	Adolescentes na EJA	Adolescentes no Ens.Fund.	Adultos no Ens.Fund.	TOTAL	% DE ACERTOS
QUESTAO	QTDE. DE PARTICIPANTES	8	8	8	8	32	
1. Resolva as multiplicações	a) 4.11	8	7	7	7	29	91%
	b) 5.(- 4)	5	5	5	4	19	59%
	c) (- 36).(- 12)	2	2	3	1	8	25%
	d) (- 15).13	4	3	2	2	11	34%
	e) (+ 48).(+ 8)	4	3	2	0	9	28%
	f) (- 18).(+ 3)	5	2	4	2	13	41%
	g) (+ 11).(+ 4)	4	3	6	5	18	56%
2. Resolva as divisões	a) 36 : 12	6	7	6	7	26	81%
	b) (+ 391) : (+ 17)	3	3	4	3	10	31%
	c) (+ 195) : (- 13)	4	4	3	1	12	38%
	d) (- 450) : (- 9)	1	3	4	2	10	31%
	e) (- 480) : (+ 6)	3	2	4	2	11	34%
	f) (+ 36) : (+ 12)	5	4	5	4	18	56%
3. João é aluno da 3ª fase da EJA e o seu neto, Talyson, estuda no 7º ano. Eles estão brincando de adivinhar números inteiros. O esquema mostra os números pensados (N) no decorrer da brincadeira. Descubra, em cada caso, quais foram esses números, substituindo a letra N por esses números.	a) N → x 8 → 384	6	6	6	3	21	66%
	b) - 480 → : N → - 80	1	3	2	0	6	19%
	c) - 36 → x (- 12) → N	4	5	1	2	12	38%
	d) N → : (- 13) → + 15	1	1	0	1	3	9%
6 ou mais acertos (≥75%)	4 ou 5 acertos (> 50% e < 75%)	Menos de 4 acertos (< 50%)					

Fonte: Os autores.

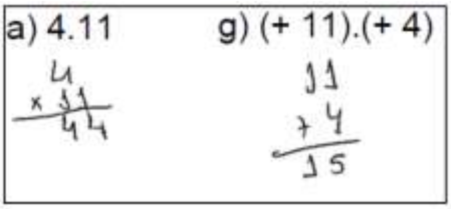
Ao observar o Quadro 3, percebemos que as questões que tratam da operação divisão, por exemplo, tiveram uma frequência de acertos menor em relação às questões de multiplicação. Na Questão 3, que exigia a interpretação de uma situação menos convencional, os estudantes apresentaram desempenho inferior em relação às Questões 1 e 2, onde poderiam empregar algoritmos da multiplicação ou da divisão. Ademais, a ausência de um dos fatores, no caso da multiplicação, e do divisor ou dividendo, na divisão, parece ter se apresentado como embaraços ao desempenho dos estudantes.

Nos itens *a* e *g* e *b* e *f* da Questão 1, e, *a* e *f* e *b* e *e* da Questão 2, percebe-se que a presença ou não de parênteses, a existência ou ausência do sinal de número e a grandeza dos números, parecem ter contribuído para que os estudantes apresentassem desempenhos diferentes. Essa percepção ocorre de modo mais incisivo na seção seguinte, quando são analisados os esquemas elaborados pelos participantes na resolução das questões e nas justificativas que eles apresentam às suas ações.

Análise dos tipos de respostas

Nesta seção, faz-se uma análise dos tipos de respostas consideradas mais representativas. A análise foi feita a partir da observação das resoluções e justificativas dadas pelos participantes. Ademais, interessou verificar os casos nos quais o estudante acertava um item sem o uso de parênteses ou sem o sinal de número, por exemplo, e errava o item correspondente, com a presença desses elementos.

Figura 1: Resolução de Clarice, 22 anos, 8º ano do Ensino Fundamental - Questão 1, itens *a* e *g*.



Fonte: Os autores.

A compreensão de Clarice nessas duas situações parece indicar que, como proposto por Glaeser (1985), os diferentes significados dos sinais, muitas vezes, apresentam-se como um obstáculo à aprendizagem dos números inteiros. No item *g* (Questão 1), a presença dos parênteses parece não ter sido compreendida pela estudante, que resolve a situação utilizando algoritmos da adição de números naturais.

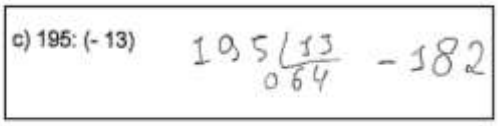
> *Experimentador:* Por que deu 15?
> *Clarice:* 11 mais 4.
> *Experimentador:* E esse pontinho o que significa?
> *Clarice:* É pra usar a regra da multiplicação no jogo de sinal.

A estudante aparentava não dispor de esquemas outros, como o cálculo relacional de sistemas de operações inversas com valores relativos, os que provavelmente lhe proporcionariam soluções corretas. Por outro lado, demonstrou ter cristalizado conceitos anteriores e pareceu empregar o seguinte teorema em ação: *os sinais + e - têm apenas o significado de operação*.

Nos casos que exigiam do estudante o cálculo do quociente entre dois números inteiros, também prevaleceu a ideia de que os sinais + e - têm apenas o significado de operação, como pode ser observado no item *a* da Questão 2, quando 81% dos participantes obtiveram êxito, enquanto no item *f* da mesma tarefa, o percentual de acertos foi de apenas 56% (ver Quadro 3). Essa significativa redução no percentual de acertos, em itens com os mesmos valores numéricos e na mesma operação, parece indicar, nos termos da teoria de Vergnaud (1996), certo apego dos estudantes aos procedimentos empregados no campo dos números naturais; resistência que doravante vamos denominar de esquema *algoritmo*.

Da mesma forma, quando apenas um dos fatores tem sinal de número, os estudantes parecem mobilizar esquemas semelhantes aos das situações nas quais os dois fatores têm sinal de número; mais uma vez, indicando certa resistência a avançarem em relação ao esquema *algoritmo*.

Figura 2: Resolução de Potira, 22 anos, 4ª fase da EJA, Questão 1, item *c*.



Fonte: Os autores.

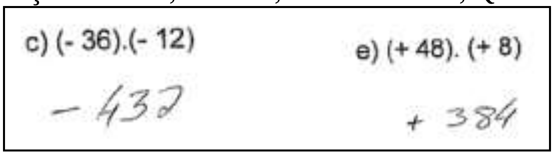
Nos esquemas mobilizados pela estudante, ela agia como se não reconhecesse o sinal de número, por isso, desenvolveu duas operações (divisão e subtração). A estudante parecia dispor apenas do esquema *algoritmo*, o que a impediu de avançar do conjunto dos números naturais ao conjunto dos números inteiros. O fato é que esse progresso exigiria outros esquemas.

> *Experimentador:* Você apresentou duas respostas, por quê?
> *Potira:* É duas contas, uma de dividir e outra de menos.
> *Experimentador:* Você pode explicar por que o resultado da divisão deu 64?
> *Potira:* 1 dividido por 1 dá 0; 9 dividido por 3 dá 6; 5 dividido por 3 é 4.
> *Experimentador:* E por que a conta de menos?
> *Potira:* Num tem menos aqui também.
> *Experimentador:* E por que o 182 ficou negativo?
> *Potira:* Porque mais com menos dá menos.

Embora apresentasse dificuldades no algoritmo da divisão, a estudante revelou que o seu entendimento, nesse tipo de situação, é marcado fortemente pela influência do sinal de número como sinal de operação, o que aproxima a sua compreensão dos obstáculos epistemológicos apontadas por Glaeser (1985) e reforça o uso do esquema *algoritmo*.

Quando os dois fatores eram números inteiros positivos acompanhados do sinal de +, a frequência de acertos dos estudantes era maior do que os itens nos quais os fatores eram números inteiros negativos (ver Quadro 3). Nesses casos, alguns dos estudantes acertaram o valor absoluto do produto indicado, mas erraram na multiplicação dos sinais, principalmente em função do uso generalizado do teorema em ação "*sinais iguais repete o sinal"*, o que não se aplica na multiplicação e na divisão de números inteiros.

Figura 3: Resolução de Roni, 27 anos, 4ª fase da EJA, Questão 1, itens *c* e *e*.



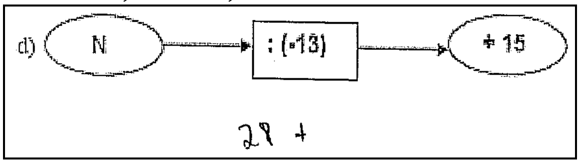
Fonte: Os autores

> *Experimentador:* E por que o sinal de menos?
> *Roni:* É porque fica o sinal de dentro do parêntese.
> *Experimentador:* Qual sinal, temos dois parênteses?
> *Roni:* O do número maior.

A resposta dada pelo estudante – ao justificar o item *c* - parece revelar a aplicação do teorema em ação "*utilização do sinal do maior número*", teorema bastante utilizado também por outros participantes. Como se nota, o argumento é o mesmo frequentemente utilizado na sala de aula na adição ou na subtração de dois números inteiros. A compreensão do campo de validade de cada conceito tem se apresentado como uma dificuldade relevante dos estudantes, que recorrem a estratégias próprias dos números naturais ou empregam no campo multiplicativo com números relativos o que era adequado apenas no campo aditivo.

O tipo de situação parece também ter sido um elemento determinante no desempenho dos estudantes. Nas Questões 1 e 2, os participantes apresentaram resultados mais satisfatórios do que na Questão 3, quando, na maioria dos itens, o valor desconhecido deixou de ser o resultado da operação e passou a ser um dos termos. Também, nesses itens, o sinal de número foi compreendido como sinal de operação.

Figura 4: Resolução de Clarice, 22 anos, 8º ano do Ensino Fundamental, Questão 3, item *d*.



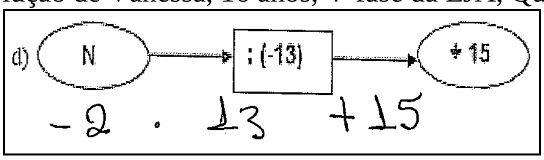
Fonte: Os autores

Nesse item, Clarice agiu de forma análoga ao esquema mobilizado por ela nos itens *a* e *g* da Questão 1. Ela pareceu estar presa ao teorema "*os sinais + e - têm apenas o significado de operação*".

> *Experimentador:* Por que o resultado deu 28?
> *Clarice:* Porque é 13 mais 15.
> *Experimentador:* Por que você entendeu que essa é uma conta de mais?
> *Clarice:* Porque mais com menos dá mais.
> *Experimentador:* E o 28 é positivo ou é negativo?
> *Clarice:* É positivo.
> *Experimentador:* Positivo, por quê?
> *Clarice:* Porque é mais com menos aí dá mais.

À semelhança da resposta de Clarice, outros estudantes efetuaram a adição entre os módulos dos números inteiros *– 13* e *+ 15*, desenvolvendo em seguida a operação entre os sinais (indicando que o valor de *N* é *– 28*). Esses estudantes reforçam o entendimento de que eles pareciam dispor de um só invariante para resolver as questões propostas: esquema *algoritmo*. É o caso de Vanessa que, embora tenha apresentado um resultado diferente daquele indicado por Clarice, também revelou o seu apego às operações no conjunto dos números naturais e a sua resistência à compreensão dos números inteiros.

Figura 5: Resolução de Vanessa, 16 anos, 4ª fase da EJA, Questão 3, item *d*.



Fonte: Os autores.

A justificativa da estudante evoca o teorema em ação "*os sinais + e - têm apenas o significado de operação*".

> *Experimentador:* Por quê - 2?
> *Vanessa:* Porque num tem que ser um número que o resultado dê 15, aí eu

> fiz 15 – 13.
> *Experimentador:* Por que 15 – 13?
> *Vanessa:* Por que o 15 é maior, num é o maior menos o menor?
> *Experimentador:* E o sinal por que ficou negativo?
> *Vanessa:* Porque menos com mais dá menos.

A resolução e as justificativas apresentadas por Clarice e Vanessa sublinham a importância de o professor compreender os esquemas mobilizados pelos estudantes na resolução de uma classe de problemas. O apego ao algoritmo das operações envolvendo números naturais parece aproximar as dificuldades dos estudantes daquelas identificadas dentre os matemáticos, pelo menos em dois dos obstáculos estudados por Glaeser (1985): *dificuldade em dar sentido às quantidades negativas isoladas* e *oposição relativa à concretude que decorre espontaneamente nos números naturais*.

Na sala de aula, essas indicações ensejam ao professor planejar estratégias capazes de auxiliar a construção do conhecimento por parte dos estudantes. No caso da aprendizagem dos números inteiros, parece evidente que o sinal de número, em diferentes formas de representação da situação, é compreendido pelos participantes como sinal de operação. Tal entendimento faz com que os estudantes permaneçam apegados às operações multiplicação e divisão no conjunto dos números naturais e utilizem o sinal de número apenas no que chamam de "*jogo de sinal*".

Essa compreensão dos participantes, muitas vezes, é permeada por conceitos e teoremas matemáticos verdadeiros no campo dos números naturais, o que possivelmente pode ser uma dificuldade dos estudantes de, assim como os matemáticos, perceberem o número negativo no quadro de uma concepção substancial de número (ASSIS NETO, 1995).

Ao observar as especificidades entre os participantes dos quatro grupos, não foram identificadas diferenças importantes, o que parece revelar que, na multiplicação e divisão de números inteiros, as atividades profissionais e a modalidade de ensino não apresentaram influências relevantes na compreensão desses conceitos por parte dos estudantes. É possível que a apresentação de tarefas próprias do padrão escolar tenha afastado comportamentos que poderiam vir à tona em função do perfil de cada grupo.

Há indicativos do esforço dos participantes para empregar em todas as tarefas regras habituais da abordagem dos números inteiros na classe, isto é, os teoremas em ação que revelam parecem constituídos de conceitos próprios dos campos aditivo e multiplicativo dos números inteiros e de procedimentos adotados no tratamento dos números relativos na escola. A recorrente questão dos estudantes sobre *menos com menos ser menos ou ser mais,* demonstra, desde a linguagem empregada, os embaraços existentes na aprendizagem desses conceitos e impõe que o ensino seja ordenado pela conceitualização e não pelo uso de regras com pouco valor à compreensão.

Considerações Finais

Esta pesquisa nasce do cotidiano da sala de aula, da observação de estudantes adolescentes e adultos *em situação*. Para o professor, vivenciar situações que o fazem refletir sobre as ações e questões levantadas cotidianamente pelos estudantes, como a questão, *"professor, menos com menos é menos ou é mais?"*, é muito relevante à ação docente.

Quando em situação, a ação dos estudantes indica a existência de muitas dificuldades na compreensão do conceito dos números inteiros relativos. Os participantes resolveram mais facilmente as situações de cálculo numérico, nas quais os termos da multiplicação ou da divisão não possuem sinal de número.

O distanciamento no índice de acertos dos estudantes, nas questões sem sinal de número e nos cálculos onde os termos possuem sinal, indica que a forma de representação das operações multiplicação e divisão de números inteiros, no que se refere à presença ou não do sinal de número, influenciou na compreensão dos participantes.

Com relação ao desempenho dos estudantes de cada um dos quatro grupos, eram esperadas condutas específicas ao perfil dos participantes, como por exemplo, o emprego de estratégias vinculadas às práticas profissionais pelos estudantes da EJA. No entanto não foram identificadas diferenças importantes no índice de desempenho de cada grupo (ver Quadro 3). O fato é que o tratamento dado aos números inteiros na sala de aula parece fortemente marcado por um emaranhado de regras e procedimentos que embaraça o processo de conceitualização e encoraja a repetição de padrões estranhos à compreensão dos estudantes.

Os resultados indicam que os estudantes ainda apresentam muitas resistências nas resoluções das situações envolvendo a multiplicação e a divisão de números inteiros. Todavia, como a aquisição das competências dentro de um campo conceitual é uma ação processual e que requer muitas rupturas e filiações (VERGANUD, 1996), compreende-se que é necessário que os estudantes percebam a importância de ampliação do conjunto dos números naturais, para que possam desenvolver outros esquemas, mais específicos do conjunto dos números relativos. O principal esquema mobilizado pelos participantes - esquema *algoritmo* - aponta que eles ainda não dispõem de esquemas próprios dos números inteiros.

Esses resultados nos ensinam que ainda se faz necessário o desenvolvimento de outras investigações comprometidas com a conceitualização e valorizando as habilidades das quais os estudantes já dispõem na multiplicação e na divisão de números inteiros. Além do quê, ainda são necessários esforços que encorajem uma abordagem menos procedimental desses conceitos na classe, sobretudo com os estudantes da EJA, que devem ter as suas características capitalizadas no processo de aprendizagem. O ensino de Matemática pautado na preocupação com a memorização e a repetição de regras sem sentido para os estudantes mostrou-se dispendioso, abrindo caminho para o surgimento de teoremas em ação que não são válidos no conjunto dos números inteiros.

Referências

ASSIS NETO, Fernando Raul. Duas ou três coisas sobre o "menos vezes menos dá mais". In: SEMANA DE ESTUDOS EM PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1995, Recife. **Anais....** Recife: UFPE, 1995. p.1 - 11.

BORBA, Rute. **O ensino de números relativos:** contextos, regras e representações. 1993. 164 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1993.

______. O ensino e a compreensão de números relativos. In: SCHLIEMANN, Analúcia; CARRAHER, David. **A compreensão de conceitos aritméticos:** ensino e pesquisa. 2. ed. Campinas: Papirus, 1998. p.121-151.

______. O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números relativos. In: BORBA, Rute; GUIMARÃES, Gilda (Org.). **A pesquisa em Educação Matemática:** repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p.58-102.

BOYER, Carl. **História da Matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1996. 496 p. Tradução de Elza F. Gomide.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2004. 844 p. Tradução de Higyno H. Domingues.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 468 p.

GLAESER, Georges. Epistemologia dos números relativos. **GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 17, p.29-124, jan./dez. 1985.

LANDIM, Evanilson. **Menos com menos é menos ou é mais:** resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos do ensino regular e da educação de jovens e adultos. 2012. 207 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

MAIA, Lícia de Souza Leão. A teoria dos campos conceituais: um novo olhar para a formação do professor. **GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 36, p.37-48, fev. 2000.

MARCONI, Maria de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica.** 7. ed. São Paulo: Atlas, 2010. 297 p.

MEDEIROS, Cleide Farias de. Por uma educação matemática com intersubjetividade. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Educação Matemática.** 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005. p.13-44.

NASCIMENTO, Ross Alves do. **Um estudo sobre obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos:** explorando a reta numérica dinâmica. 2002. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artmed, 1997. 246 p.

TEIXEIRA, Leny Rodrigues Martins. Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades. **Pró-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1[10], p.60-72, mar. 1993.

VERGNAUD, Gerárd. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p.155-191.

Recebido em: 28 de fevereiro de 2018
Aprovado em: 28 de maio de 2018