revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UM EPISÓDIO COM SITUAÇÕES MULTIPLICATIVAS DE ISOMORFISMO DE MEDIDAS EM TAREFAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UM ESTUDO COM ALUNOS ALEMÃES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Marlí Schmitt Zanella[1]
Lilian Akemi Kato[2]

Resumo: Este trabalho objetivou investigar que teoremas em ação são mobilizados por alunos do quinto ano do Ensino Fundamental durante o desenvolvimento de situações multiplicativas de isomorfismo de medidas em tarefas de Modelagem Matemática. A abordagem metodológica da pesquisa foi de natureza qualitativa com caráter descritivo e interpretativo. Os dados recolhidos e descritos neste trabalho referem-se ao desenvolvimento da tarefa de Modelagem Matemática intitulada “Igreja de São Martin” com quatro alunos alemães da quarta série do Ensino Primário na Alemanha, correspondente ao quinto ano do Ensino Fundamental no Brasil, a qual tinha por objetivo identificar, relações entre produto contínuo e discreto, a partir do problema de determinar a altura da igreja utilizando uma criança como unidade de medida. Embasamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais para analisar e interpretar os dados recolhidos. Como resultados, destacamos que com base nos teoremas em ação, manifestados por esses alunos, foi possível identificarmos a forma pela qual os alunos progressivamente relacionam os dados, as informações pertinentes à situação e os conceitos matemáticos necessários para resolvê-la e, que o teorema em ação mobilizado está relacionado à propriedade associativa da multiplicação no conjunto dos números reais, ou seja, se **ab = c**, então **k(ab) = (ka)b = kc**, relacionado à ideia de proporção.
Palavras-chave: Situação multiplicativa. Isomorfismo de medidas. Modelagem Matemática. Anos iniciais do Ensino Fundamental.

AN EPISODE WITH MULTIPLATIVE SITUATIONS OF ISOMORPHISM OF MEASURE IN MATHEMATICAL MODELING TASKS: A STUDY WITH GERMAN STUDENTS OF ELEMENTARY EDUCATION

Abstract: This work aimed to investigate which theorems in action are mobilized by students of the fifth year of elementary school during the development of multiplicative situations of isomorphism of measure in Mathematical Modeling tasks. The methodological approach of the research was qualitative with a descriptive and interpretative nature. The data collected and described in this work refer to the development of Mathematical Modeling task entitled "St. Martin Church", which was carried out with four German students of the fourth grade of Elementary Education in Germany. However, in Brazil it corresponds to the fifth year of Elementary School. The objective was to identify relations between continuous and discrete product, from determining the height of the church using a child as a unit of measurement. We were based on the Conceptual Field Theory to analyze and interpret the collected data. As results, we highlight that based on the theorems in action, manifested

[1]Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá/UEM. E-mail: marlischmitt@gmail.com.
[2]Doutora em Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Maringá/UEM. E-mail: lilianakemikato@gmail.com.

by these students, it was possible to identify the way in which students progressively relate the data, the pertinent information to the situation and the mathematical concepts needed to solve it. Besides the theorem in mobilized action is related to the associative property of multiplication in the set of real numbers, that's to say, if $\mathbf{ab} = \mathbf{c}$, then $\mathbf{k(ab)} = \mathbf{(ka)b} = \mathbf{kc}$, related to the idea of proportion.
Keywords: Multiplicative situation. Isomorphism of measures. Mathematical Modeling. Early years of Elementary School.

Introdução

O debate sobre fenômenos didáticos tem ganhado destaque em pesquisas da Educação Matemática, em âmbito nacional, especialmente a partir da criação do Grupo de Trabalho Didática da Matemática (GT14) pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM. Neste GT, uma das teorias que tem apresentado contribuições para a pesquisa na Educação Matemática é a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), em que destaca que a aprendizagem do aluno está relacionada ao conhecimento que adquire no contexto escolar ou não, em diversas modalidades de aprendizagem e formação (VERGNAUD, 2009c).

Para este autor, o conhecimento é adaptação, e esta, por sua vez, é compreendida sob dois aspectos, a saber: o primeiro diz respeito à adaptação do sujeito às diferentes situações que vivencia, e o segundo aspecto refere-se à evolução da organização da ação desenvolvida em diferentes situações que o aluno se adapta.

É ao longo da experiência escolar, não escolar ou profissional, que o sujeito encontra um número significativo de situações, às quais deve se adaptar. Assim, se estamos interessados em elaborar situações de aprendizagem é necessário que sejam desenvolvidas atividades que privilegiem diferentes conceitos a partir de variadas situações. Além disso, "a análise da atividade em situação é um meio essencial para compreender os processos de aprendizagem" (VERGNAUD, 2009b, p.14).

No contexto das situações significativas para as quais o indivíduo necessita pôr em ação determinados conceitos para resolvê-las, apresentamos as tarefas de Modelagem Matemática como favorecedoras da interação entre os estudantes, provocando-os a resolver situações-problema advindas da sua realidade e a formular hipóteses que mobilizem conhecimentos matemáticos e extramatemáticos. Além disso, no processo de resolução de uma tarefa de Modelagem Matemática, o aluno deve posicionar-se ativamente na construção ou mobilização de conceitos matemáticos, o que requer organização, estruturação de dados relevantes para a situação e uma reflexão sobre quais caminhos tomar para resolver a tarefa. Com isto, o papel da Modelagem Matemática é, além da construção de modelos matemáticos, possibilitar ao estudante formas de compreender e avaliar se o modelo apresenta uma resposta coerente ao problema inicial e relacionar a Matemática ao contexto envolvido na situação problema.

Silva e Klüber (2014) alertam para a necessidade de modificações no ensino de Matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental em prol do desenvolvimento de um ensino menos transmissivo, no qual o professor preocupa-se, prioritariamente, com a quantidade de conteúdos apresentados de forma expositiva, por meio de processos mecânicos e, muitas vezes, desprovidos de significado para o aluno. Neste sentido, resgatar a importância da Matemática e suas relações com conhecimentos do cotidiano se faz necessário desde o início da vida escolar do educando.

Estas ideias corroboram com o exposto por Luna, Souza e Santiago (2009) quando afirmam que o ensino de Matemática, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, deve valorizar metodologias problematizadoras, que relacionem o conhecimento escolar com o contexto vivido pelo educando de modo a proporcionar uma base para o desenvolvimento pleno do cidadão e do profissional. Destacamos que estas são algumas das características presentes na Modelagem Matemática que, segundo Silva e Klüber (2014), podem representar mudanças para um modelo inovador nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, proporcionando ao aluno participar ativamente de seu desenvolvimento escolar.

Luna, Souza e Santiago (2009) destacam também que as atividades de Modelagem Matemática, propiciam o desenvolvimento de habilidades matemáticas, tais como a argumentação, a interpretação de problemas advindos de outras áreas, bem como, possibilitam a reflexão dos estudantes sobre o papel de modelos matemáticos na sociedade.

A identificação do desenvolvimento desses conceitos é um processo complexo, que não se limita a algumas observações, no entanto, segundo Vergnaud (1998) os teoremas em ação são mobilizados pelos alunos quando selecionam informações pertinentes e inferem consequências úteis para resolver uma situação problema. Assim, quando o aluno explicita um teorema em ação, este se converte em objeto de reflexão e se discute sua pertinência no processo de resolução da situação problema.

Com relação à TCC, Vergnaud (2009c) esclarece que a aprendizagem é proveniente da forma operatória do conhecimento, o que permite ao aluno ter êxito sobre a ação em determinada situação, denominada pelo autor como competência. Tal competência concerne também nos registros realizados durante uma atividade, seja ela escolar ou profissional. Os gestos, os registros, a tomada de decisão, a linguagem e o diálogo, o raciocínio científico e técnico, explícitos ou implícitos no desenvolvimento de uma atividade são meios de identificar ações dos alunos diante de uma determinada situação. Para Vergnaud (1993, p.25) "um conceito não assume sua significação em uma só classe de situações, e uma situação não é analisada por meio de um conceito único". Assim, este trabalho se propõe a tomar como objeto de pesquisa uma situação multiplicativa de isomorfismo de medidas, que possibilitou: (i) discutir conceitos matemáticos, além de abordar possíveis relações entre eles; (ii) mobilizar tratamentos algorítmicos e representações linguísticas e simbólicas, pertinentes à situação dada no contexto da Modelagem Matemática, por estudantes alemães do quinto ano do Ensino Fundamental.

Neste texto, apresentamos uma tarefa de Modelagem Matemática que abordou o conceito de isomorfismo de medidas da estrutura multiplicativa. Este conceito é representado por uma relação quaternária entre quatro quantidades, sendo, duas a duas medidas diferentes, e uma dessas quantidades corresponde ao valor unitário, que por sua vez, proporciona ao estudante o desenvolvimento de conceitos de multiplicação e divisão em diferentes níveis de complexidade.

Objetivamos investigar, neste trabalho, que teoremas em ação são mobilizados por alunos do quinto ano do Ensino Fundamental durante o desenvolvimento de situações multiplicativas de isomorfismo de medidas em tarefas de Modelagem Matemática. Para isto, apresentamos os referenciais teóricos acerca da TCC e da Modelagem Matemática, as opções metodológicas deste estudo, uma análise dos dados recolhidos e considerações acerca desta pesquisa.

Reflexões sobre a teoria dos campos conceituais e invariantes operatórios

A TCC configura-se como uma teoria cognitivista e pressupõe a conceitualização do real a partir do estudo de filiações e de rupturas entre conhecimentos. Neste processo se desenvolve a ideia de Campo Conceitual, que emerge a partir de um conjunto de situações com ampla variedade de conceitos, de procedimentos, de representações simbólicas e de invariantes. Isso significa que um conceito não se encontra isolado, por isso é necessário trabalhar os diferentes significados de um conceito por meio da variedade de situações. Com isto, não podemos tratar os conceitos por unidade ou de forma isolada, uma vez que o estudo de um conceito requer que sejam considerados diversos outros conceitos, situações, linguagem, símbolos, representações, propriedades e teoremas interligados.

O estudo da formação e do desenvolvimento de um conceito requer analisá-lo a partir de uma terna de conjuntos de situações – S, de invariantes – I, e de representações – Y, indicado por (S, I, Y), em que:

> S conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referência). I conjunto dos invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado). Y conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (VERGNAUD, 1993, p.8).

Os conjuntos de situações, de invariantes e de representações são conjuntos indissociáveis para a TCC, ou seja, é necessário considerar a ocorrência simultânea destes três conjuntos nas práticas escolares. Contudo, não podemos afirmar que há bijeção entre eles, ou seja, não se pode reduzir o significado ao significante, nem às situações, e vice-versa.

É a partir da variedade de conceitos em diversificadas situações que o campo conceitual é modelado. Vergnaud (1993, p.11) afirma que "existe grande variedade de situações num campo conceitual dado; as variáveis de situação são um meio de construir sistematicamente o conjunto das classes possíveis".

Segundo Vergnaud (1998, p.168), os conceitos de esquema, teorema em ação e conceito em ação ganham destaque em sua teoria, pois permitem caracterizar as principais diferenças cognitivas entre duas competências diferentes "ou entre duas situações, ou entre duas formas de lidar com a mesma situação, especialmente quando esses caminhos são desigualmente eficazes". O autor apresenta as seguintes definições sobre esquema, teorema e conceito em ação:

> 1. Um esquema é a organização invariante de comportamentos para uma determinada classe de situações;
> 2. Um teorema em ação é uma proposição que é considerada verdadeira;
> 3. Um conceito em ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria que é considerada relevante (VERGNAUD, 1998, p.168, tradução nossa).

Os invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) orientam o aluno para o reconhecimento dos elementos pertinentes da situação e a tomada da informação sobre a situação a tratar.

Para uma classe de situações, o aluno tem várias decisões a tomar. A forma como o aluno age frente a diferentes situações depende dos esquemas que ele possui e mobiliza ao resolvê-las. Assim, um esquema é a organização de uma classe de comportamentos distintos em função das peculiaridades de cada situação à qual se destina. Assim, compõem a parte epistemológica dos esquemas os invariantes operatórios, que têm função de identificar e reconhecer os objetos, suas propriedades e suas relações. Vergnaud (1998) afirma que os invariantes operatórios são mobilizados pelos alunos para selecionar informações pertinentes e inferir consequências úteis para ação, ou seja, têm função de conceitualização e de inferência. Quando conceitos e teoremas em ação são explicitados pelo aluno em ação, estes se convertem em objetos de reflexão e se discute sua validade, pois podem aproximar-se de conhecimentos científicos.

Um conceito em ação, conforme explicita Vergnaud (1998), é considerado como uma categoria pertinente na ação. A palavra categoria é utilizada para clarear o significado de objeto, de classe, de predicado, de condições. No entanto, a pertinência e a não pertinência tem significados diferentes de verdade e de falsidade. Não há sentido em dizer que os conceitos de triângulo, ou número, ou simetria ou operador escalar ou transformação são, em si mesmos, verdadeiros ou falsos. Estes são conceitos matemáticos pertinentes para caracterizar as representações e as ações do aluno nas tarefas matemáticas.

Os conceitos em ação não existem sem teoremas em ação, mas só têm sentido em proposições verdadeiras, por meio das quais podem exercer sua função. Ademais, os conceitos são instrumentos nocionais para resolver o problema, sem possuir a necessidade de serem explicitados pelo sujeito (VERGNAUD, 1993).

Já um teorema em ação pode ser verdadeiro ou falso. Para exemplificar esta afirmação considere as representações utilizadas em gestos e ações sobre o mundo físico, sobre o comportamento verbal ou a interação social. Estas representações podem ser verdadeiras ou falsas, precisas ou vagas, explícitas ou implícitas. De acordo com Vergnaud (1998, p.174), "há uma relação dialética entre conceitos em ação e teoremas em ação, os conceitos são ingredientes de teoremas, e teoremas são propriedades que dão conceitos aos seus conteúdos. Mas seria enganosa ideia de que um leva ao outro". Isso ocorre, pois os conceitos estão implícitos em teoremas em ação, mas não são explícitos para o sujeito que os mobiliza em uma situação.

Deste modo, um teorema em ação não é um verdadeiro teorema científico, nem mesmo o conceito em ação é um conceito científico. Para o autor discute-se a veracidade ou não destes invariantes se o fizermos cientificamente e de forma explícita, pois podem tornar-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos.

Portanto, os invariantes operatórios são percebidos no estudo das ações do aluno, que se constituem como fonte de dados para auxiliar o professor na compreensão da estratégia utilizada pelo aluno para resolver diferentes situações problemas, uma vez que a TCC valoriza os aspectos estruturais dos invariantes operatórios, analisando-os do ponto de vista dos próprios saberes constituídos. No Quadro 1, apresentamos exemplos de teorema e conceito em ação, com base nos pressupostos teóricos de Vergnaud (1998).

Quadro 1: Teorema e conceito em ação.

Teorema em ação	Conceito em ação
São teoremas em ação implícitos e têm validade local, ou seja, são verdadeiros para determinados conjuntos de situações.	São conceitos em ação implícitos, que se assumem pertinentes na ação.
"No conjunto dos números naturais a operação de multiplicação equivale à soma sucessiva de parcelas iguais, que sempre aumenta". Representação da proposição: Se a e b são números naturais diferentes de zero, então o produto entre eles é maior do que zero. Se a e $b \in \mathbb{N}^*$, então $a \times b > 0$. A afirmativa de que o produto sempre aumenta torna a proposição restrita a determinados conjuntos numéricos. Quando trabalhamos com o conjunto dos números inteiros ou o conjunto dos números racionais, por exemplo, verifica-se que o produto nem sempre aumenta, e nestes casos, a proposição passa ser considerada um teorema em ação falso.	"Define-se multiplicação como uma soma de parcelas iguais". Representação algébrica da proposição: $n \times a = \underbrace{a + a + a + a + \cdots + a}_{n\ parcelas\ iguais}$ A proposição representa um conceito em ação, pertinente à operação de multiplicação.

Fonte: Zanella (2016, p.45).

De acordo com Vergnaud (2013) expressamos nossos conhecimentos pelo o que dizemos sobre eles (forma predicativa) e também pelo o que fazemos em situação (forma operatória). A forma operatória do conhecimento permite agir na situação e possibilita, na maioria das vezes, a identificação de elementos cognitivos que os alunos mobilizam sobre a situação, pois descreve propriedades e relaciona objetos de pensamento do aluno.

A forma operatória se diferencia da forma predicativa em função da competência que o aluno pode manifestar em situação (durante a ação) e sobre o que ele pode dizer ou explicar sobre a situação.

Os conhecimentos prévios dos alunos aparecem durante a resolução de um problema e têm relação com os conhecimentos implícitos sobre determinado conceito ou objeto matemático, pois significa que podem resolver um problema proposto, sem, entretanto, saber explicar como se obteve tal resultado.

Para esta pesquisa, a TCC ofereceu contribuições para uma investigação acerca dos processos de resolução de tarefas de Modelagem Matemática de alunos do quinto ano do Ensino Fundamental, relacionadas à estrutura multiplicativa.

O Campo Conceitual da Estrutura Multiplicativa é o conjunto das situações cujo domínio requer uma ou várias multiplicações ou divisões e, além disso, compreende o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações como atividades matemáticas, tais como "proporção simples e múltipla, função n-linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, razão, número racional, múltiplo e divisor" (VERGNAUD, 1993, p.9).

Salienta-se que para este campo conceitual Vergnaud (1993) tipificou duas categorias que envolvem situações multiplicativas, o isomorfismo e o produto de medidas. Discorreremos sobre as situações multiplicativas de isomorfismo de medidas, que possuem centralidade nesta pesquisa.

Situações multiplicativas de isomorfismo de medidas

As situações multiplicativas de isomorfismo de medidas são representadas por uma relação quaternária entre quatro quantidades, sendo, duas a duas medidas diferentes, e uma dessas quantidades corresponde ao valor unitário. Nesta categoria há três tipos de problemas que envolvem conceitos de multiplicação e divisão em diferentes níveis de complexidade, a saber: (i) multiplicação, em que conhecemos o valor unitário e outras duas quantidades, em dois tipos de medidas; (ii) divisão, em que se busca o valor unitário (Divisão Partitiva) e (iii) divisão, em que se busca a quantidade de unidades (Divisão Quotitiva).

Vergnaud (2009b) destaca que esses três tipos de situações de isomorfismo de medidas podem ser subdivididos em outros subtipos, variando apenas o conjunto numérico (naturais, inteiros, racionais etc.), o caráter discreto ou contínuo das quantidades, bem como a busca pelo valor unitário ou a quantidade de unidades, ou seja, a forma da relação multiplicativa.

No Quadro 2 exemplificamos situações multiplicativas de isomorfismo de medidas que contemplam cada um dos três tipos de problemas apresentados por Vergnaud (2009b).

Quadro 2: Situações multiplicativas de isomorfismo de medidas.

<table>
<tr><th>Multiplicação</th><th>Divisão Partitiva (Partição)</th><th>Divisão Quotitiva (Quota)</th></tr>
<tr>
<td>Ana tem 4 pacotes de canetas. Em cada pacote há 3 canetas. Quantas canetas possui Ana?
<table>
<tr><td>Quantidade de pacotes de canetas</td><td>Quantidade de canetas</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>x</td></tr>
</table></td>
<td>Carlos pagou R$9,00 por 3 revistas. Quanto custa cada revista?
<table>
<tr><td>Quantidade de revistas</td><td>Valor pago (R$)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td></tr>
</table></td>
<td>João tem R$20,00 e quer comprar cadernos que custam R$5,00 cada um. Quantos cadernos poderá comprar João?
<table>
<tr><td>Quantidade de cadernos</td><td>Preço (R$)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>x</td><td>20</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Zanella (2013).

De acordo com Vergnaud (2012) a descrição e a análise dos avanços dos alunos nos processos de aprendizagem permitem considerar duas ferramentas essenciais e inter-relacionadas que perpassam pela ideia de situação.

Neste sentido, a compreensão das ideias associadas à multiplicação representam progressões no conhecimento dos alunos em termos do raciocínio multiplicativo, à medida que há tomada de decisões e de ações para resolver variadas situações. Tomando como base as concepções de Fosnot e Dolk (2001) o raciocínio multiplicativo está associado ao desenvolvimento de três domínios, denominados pelos autores de “grandes ideias”, “estratégias” e “modelos”. São identificadas como “grandes ideias” associadas ao raciocínio multiplicativo: (i) o entendimento de um grupo como unidade; (ii) a propriedade distributiva da multiplicação, em relação à adição e à subtração; (iii) a propriedade comutativa da multiplicação; (iv) os padrões de valor de posição associadas à multiplicação por dez e (v) a propriedade associativa da multiplicação.

As “grandes ideias” multiplicativas definidas por Fosnot e Dolk (2001) direcionam a aprendizagem do raciocínio multiplicativo por meio de estratégias associadas à multiplicação. De acordo com Fosnot (2007, p.14) “as estratégias podem ser observadas e são esquemas organizacionais que as crianças usam para resolver os problemas”. Neste aspecto, depreendem-se aproximações com a TCC, no que diz respeito às ações dos estudantes quando resolvem situações multiplicativas, especialmente ao mobilizarem teoremas e conceitos em ação a partir dos conhecimentos que dominam progressivamente (VERGNAUD, 1998).

As “grandes ideias” estão ligadas às estruturas da Matemática. No entanto, também são características de mudanças no raciocínio dos alunos, no que diz respeito à perspectiva, à lógica, às relações matemáticas desenvolvidas ou modificadas. Assim, as estratégias usadas pelos alunos quando resolvem situações multiplicativas estão relacionadas com as ideias que possuem sobre a multiplicação. Algumas estratégias de referência comumente utilizadas pelos alunos na resolução de situações multiplicativas envolvem: o uso de adição repetida, a contagem por salto, o uso de dobro e de metade, de múltiplos de cinco e de dez, o recurso de produto parcial, propriedades de multiplicação e fatoração e agrupamento flexível adequado aos números envolvidos (FOSNOT; DOLK, 2001).

Para esses autores os modelos construídos pelos alunos no início da aprendizagem de situações multiplicativas estão relacionados à sua interpretação sobre a situação que emerge da representação usada na ação, denominado pelos autores de modelos da situação, uma vez que “modelos são mapas mentais usados pelos matemáticos para organizar a sua atividade, resolver problemas ou explorar relações” (FOSNOT; DOLK, 2001, p.73). Embora um modelo possa organizar uma determinada tarefa, destaca-se que a interpretação que os alunos fazem sobre a tarefa pode seguir modelos distintos, ou seja, nem sempre recorrem aos modelos que emergem das tarefas. Neste aspecto, destacamos também aproximações com o referencial teórico abarcado pelas Tarefas de Modelagem Matemática, quando o autor indica que os modelos matemáticos produzidos pelos estudantes não são únicos ou iguais, pois as hipóteses e os dados considerados pertinentes pelo grupo, para a situação, determinam qual modelo é mais apropriado para estes dados.

Fosnot e Dolk (2001) também defendem que aqueles modelos que inicialmente eram modelos da situação passam por modelos de estratégias e transformam-se em modelos para pensar sobre relações numéricas. Estes autores explicam que a ideia da multiplicação como adição sucessiva de parcelas iguais está entre os primeiros modelos do raciocínio multiplicativo construídos pelos alunos. À medida que as ideias sobre a multiplicação vão evoluindo, os modelos construídos pelos alunos também evoluem. Isso também foi observado nas resoluções dos alunos participantes da pesquisa a partir das tarefas de Modelagem Matemática.

A modelagem matemática na educação matemática

De acordo com os objetivos a que este trabalho se propôs, as tarefas de Modelagem Matemática desenvolvidas com alunos alemães (da quarta série da Escola Primária) foram selecionadas e organizadas de modo que os seus encaminhamentos priorizassem identificar, nas ações dos estudantes, a mobilização de teoremas em ação segundo os pressupostos teóricos de Vergnaud (2009a; 2009b) e para isto a perspectiva adotada foi a do ciclo de Modelagem Matemática segundo Blum (2006), apresentado na Figura 1.

O contexto da sala de aula de Matemática e as formas pelas quais as tarefas têm sido usadas pelos professores permite identificá-las como um subconjunto de todas as atividades desenvolvidas, tanto pelo professor quanto pelos alunos, a qual é destinada a promover uma ideia matemática (STEIN; SMITH, 2009).

De acordo com Watson et al. (2013) uma tarefa é um meio usado pelo professor explicitar a matemática ao estudante, como também, um meio pelo qual os estudantes decidem resolver por conta própria uma situação matemática. Neste caso, uma tarefa compreende desde a construção de representações de objetos matemáticos, a exemplificação de definições, a resolução de problemas simples ou complexos, a tomada de decisão entre duas ou mais possibilidades, a realização de uma investigação, o desenvolvimento de projetos e também a Modelagem Matemática.

Além disso, uma tarefa possibilita a mobilização de um conjunto de problemas relacionados a um determinado conceito e desta forma se constitui como a base para a aprendizagem dos alunos (STEIN; SMITH, 2009), em que diferenciam três aspectos a ser considerados em uma tarefa, a saber: (i) como ela é concebida e apresentada no currículo, nos livros didáticos e nos mais diversos materiais de instrução; (ii) como ela é exposta ou expressa pelo professor e (iii) como ela é implementada pelo aluno em sala de aula, isto é, o modo como o discente trabalha efetivamente com e sobre a tarefa proposta a ele. Para Stein e Smith (2009), as três fases, em particular a terceira, são consideradas como influências significativas sobre o que os alunos de fato aprendem.

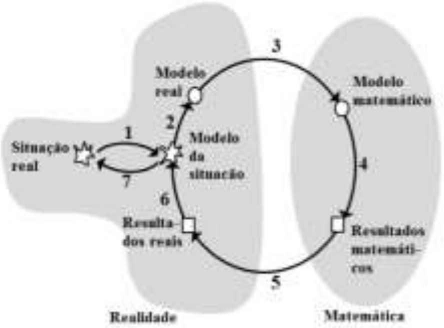
Além destas três fases, Chapman (2013) ressalta como fundamental o conhecimento matemático que o professor deve ter das tarefas para ensinar, uma vez que tal conhecimento possibilitará a ele: (i) a seleção e elaboração de tarefas matemáticas que promovam o conhecimento matemático do aluno; (ii) a criação de um contexto que promova a curiosidade, o interesse e a discussão de ideias matemáticas dos discentes e (iii) a otimização das potencialidades de cada uma das tarefas de aprendizagem propostas.

Canavarro e Santos (2012, p.102) refletem que “as tarefas são um elemento fundamental que muito marcam as possibilidades de aprendizagem matemática dos alunos”, pois, selecionar e elaborar tarefas apropriadas e realizar seu desenvolvimento em sala de aula com os alunos gera inúmeros desafios ao professor, uma vez que, para estas autoras, tais fatores são componentes substanciais à prática pedagógica.

Na perspectiva de Blum (2006), o termo “tarefa de Modelagem Matemática” significa resolver problemas advindos do mundo real com o auxílio de modelos matemáticos. Esses problemas possuem uma situação inicial (problemática) como ponto de partida, em que são utilizados procedimentos e diversificadas estratégias de ação para desenvolver um modelo real, a partir de dados reais e simplificações para que, por meio do processo de matematização, se possa desenvolver um modelo matemático. Para que isso ocorra, o aluno deve realizar uma investigação para, na sequência, utilizar conceitos matemáticos e trabalhar matematicamente para desenvolver resultados matemáticos.

Este é um processo espiral e, muitas vezes, não sequencial, pois a partir de uma interpretação do resultado matemático o estudante pode retornar ao problema inicial e reorganizar ações, ou até mesmo a partir da matematização, reorganizar ações que possam modificar um resultado matemático diferente daquele admitido anteriormente, que reinterpretado e validado retorna ao problema inicial com resultados reais. Essas são características da perspectiva de Modelagem Matemática de Blum (2006), representada na Figura 1.

Figura 1: Modelagem Matemática na perspectiva de Blum (2006).



1. Entender a situação
2. Simplificar/estruturar
3. Matematização
4. Trabalhar matematicamente
5. Interpretar
6. Validar
7. Apresentar/expor

Fonte: Blum (2006, p.9, tradução dos autores).

Blum e Leiβ (2005) destacam que os procedimentos de resolução de uma tarefa de Modelagem Matemática não estão pré-definidos, assim como a solução não é conhecida previamente. Além disso, alguns critérios são estabelecidos para caracterizar tarefas de Modelagem Matemática, a saber: (i) são abertas; (ii) são mais complexas do que tarefas de resolução de problemas; (iii) são realísticas e autênticas (provenientes de dados reais) e (iv) a resolução ocorre por meio da execução do processo do ciclo de Modelagem Matemática.

Blum e Ferri (2009) compreendem por tarefas de Modelagem Matemática aquelas tarefas que requerem traduções substanciais entre a realidade e a Matemática. Segundo Blum (2006), uma tarefa de Modelagem é uma tarefa matemática não rotineira, pois solicita ao aluno uma interpretação matemática de uma situação do mundo real e, desta forma, o aluno tem a possibilidade de formular uma descrição matemática ou um procedimento para desenvolver uma estratégia ao invés de fornecer apenas um número como resposta, obtido por um procedimento único. Além disso, os alunos podem desenvolver um modelo que descreve uma situação da vida real.

Neste sentido, o modelo desenvolvido não é, necessariamente, algo novo, pois os alunos mobilizam conhecimentos matemáticos de sua estrutura cognitiva para desenvolver o processo de Modelagem Matemática e fornecer uma resposta à situação problema inicial. Estes modelos podem incentivá-los a resolver, descrever, simplificar, revisar e refinar suas ideias (validar), bem como, utilizar uma variedade de meios de representações para explicar as estratégias utilizadas.

Uma das vantagens de se desenvolver tarefas de Modelagem Matemática na sala de aula é a possibilidade dos alunos descreverem as estratégias de resolução que podem revelar, explicitamente, como os alunos pensam em uma dada situação (BLUM; FERRI, 2009).

O processo de desenvolvimento de modelos suficientemente úteis para resolver uma tarefa de Modelagem Matemática, em qualquer nível de ensino, geralmente envolve um processo cíclico e iterativo, entre problema inicial, simplificação, matematização, interpretação e validação do modelo obtido para a situação inicial. Ademais, as escolhas numéricas, as hipóteses e as aproximações que os alunos fazem estão presentes em todo o processo de resolução de tarefas de Modelagem Matemática.

Percurso metodológico

A abordagem da pesquisa desenvolvida é de natureza qualitativa, com foco nas informações descritivas que primam pelo significado dado às ações analisadas, que foram obtidas por meio dos registros escritos e dos registros orais transcritos de gravações de áudio. Nesta abordagem, consideramos a característica flexiva da pesquisa qualitativa que permitiu ao pesquisador avaliar os dados coletados à luz da fundamentação teórica adotada, à medida que se tornou necessário (LUDKE; ANDRÉ, 1986). Com isso, descrição dos dados e registros obtidos durante a investigação foram utilizados para ilustrar e substanciar as análises a partir da Teoria dos Campos Conceituais. O enfoque dado à fase da recolha dos dados caracteriza-se pela modalidade descritiva e interpretativa, onde se procurou observar, registrar, analisar, interpretar e correlacionar fatos, fenômenos ou ações dos sujeitos envolvidos durante a resolução de tarefas de Modelagem Matemática sem manipulá-los.

O desenvolvimento desta pesquisa ocorreu em 2015 e participaram 20 alunos da quarta série da Escola Primária alemã, correspondente ao quinto ano do Ensino Fundamental no Brasil, dos quais destacamos neste trabalho, o desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem Matemática envolvendo isomorfismo de medidas por um grupo de 4 alunos. A realização desta pesquisa ocorreu na Alemanha no período em que a primeira autora deste artigo desenvolveu seu estágio de doutorado naquele país.

A resolução da tarefa teve duração de 90 minutos, em que um grupo de estudantes, denominado Grupo A, desenvolveu a tarefa de Modelagem Matemática denominada "Igreja de São Martin". Assim, os integrantes deste grupo foram nomeados por A1, A2, A3 e A4. Ressaltamos que apresentamos aqui um recorte de uma pesquisa mais ampla, mas para fins desta análise, utilizamos somente os dados provenientes do Grupo A.

A tarefa de modelagem matemática

Nesta seção são apresentados os dados recolhidos a partir do desenvolvimento da tarefa de Modelagem Matemática, denominada "Igreja de São Martin" ou "Igreja de Martin", localizada em Kassel. Esta tarefa foi adaptada de Blum e Ferri (2009), mantendo-se o objetivo da problemática original, mas considerada em outro contexto, de modo a privilegiar a realidade dos estudantes.

A pesquisadora iniciou a aula com alguns questionamentos em relação à Igreja de Martin, como por exemplo: "Quem aqui conhece ou já visitou a Igreja de Martin?", "Onde ela está localizada?", "Aqui, eu tenho uma imagem desta Igreja, o que vemos?". Após uma discussão inicial foi entregue a cada um dos grupos uma fita métrica e uma folha contendo o enunciado da tarefa, como mostra o Quadro 3.

Quadro 3: Ficha com informações da primeira tarefa de Modelagem Matemática.

Igreja de São Martin em Kassel

Quantas crianças de seu grupo são necessárias para que, uma sobre as outras, atinjam a altura aproximada da Torre da Igreja Martin em Kassel?

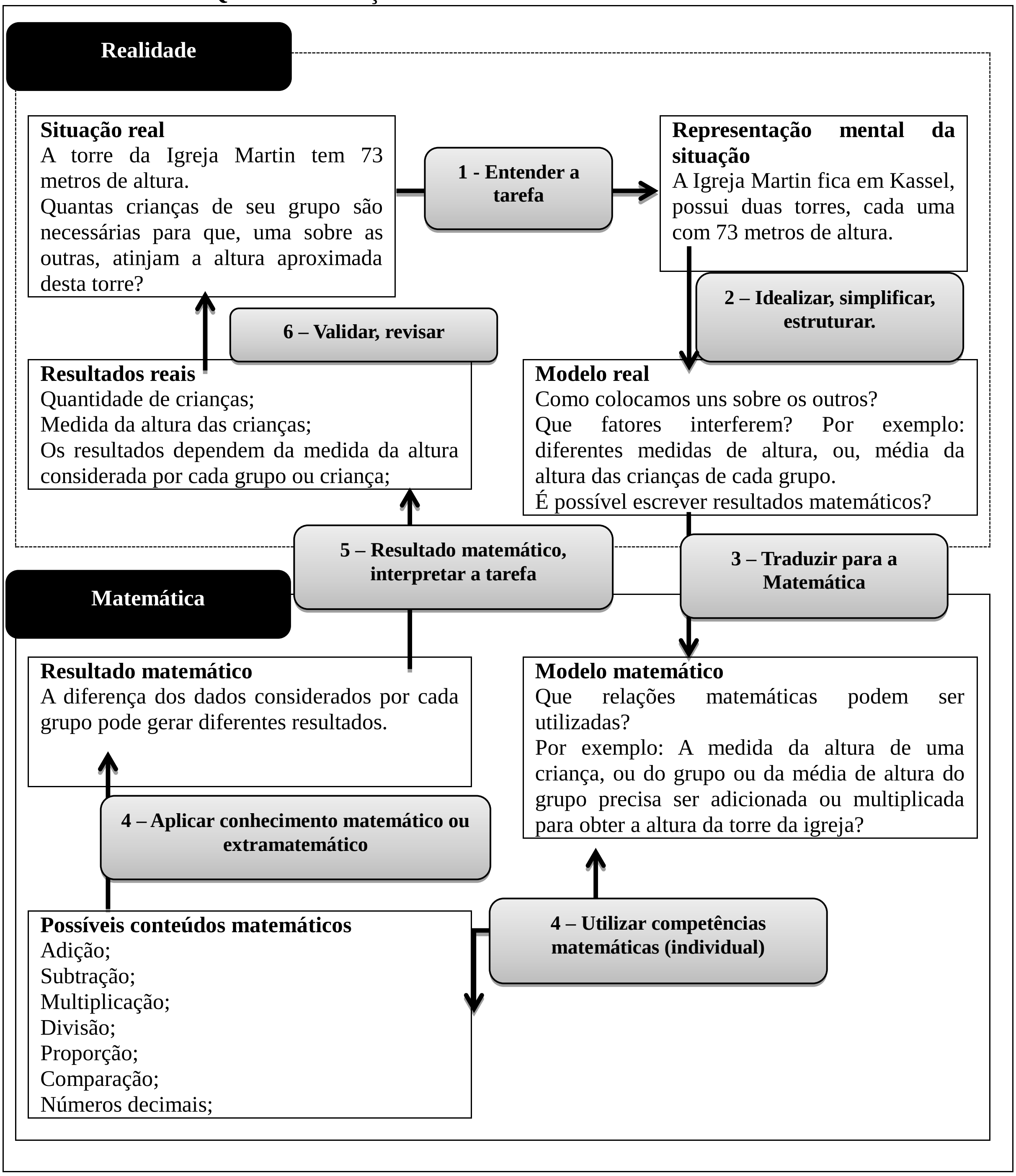
Fonte[3]: Adaptado de Blum e Ferri (2009).

De acordo com Blum (2006) uma tarefa de Modelagem Matemática é caracterizada a partir das relações existentes entre a realidade e a Matemática em cada situação. O Quadro 4 exemplifica essas relações, a partir da problemática proposta na tarefa “Igreja de Martin” de Kassel.

Entre essas relações identificamos os seis passos que ocorrem durante o desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem Matemática em sala de aula a partir da resolução do grupo nesta pesquisa, a saber: 1) Entender a tarefa; 2) Idealizar, simplificar, estruturar os dados da tarefa; 3) Traduzir para a Matemática (matematizar); 4) Utilizar competências Matemáticas (matematização); Aplicar conhecimentos matemático e extramatemático; 5) Interpretar o resultado matemático e 6) Validar, revisar.

[3] Tarefa adaptada de Blum e Ferri (2009). Imagem da Igreja Martin em Kassel, Alemanha. Acesso à imagem em 23.03.2015. Disponível: <http://www.zukunftskirche.de/img_galerie/martinskirche_fischer.jpg>.

Quadro 4: Relações entre a realidade e a Matemática na tarefa.



Fonte: Adaptado de Blum (2006).

Após o diálogo inicial com os estudantes e a entrega dos materiais, o grupo se organizou para iniciar o desenvolvimento da tarefa. Na sequência, apresentamos uma descrição das resoluções elaboradas pelo grupo A, constituído pelos estudantes A1, A2, A3 e

A4. Na sequência é apresentado o excerto do diálogo inicial entre os integrantes do grupo em que é possível observar como entenderam a tarefa e quais dados foram considerados pertinentes pelos estudantes:

> *A2: Vamos anotar os dados. Uma torre mede cerca de 73 metros. Duas torres, precisamos calcular.*
> *A2; A4: São 146 metros.*
> *A3: Soma, para ver se está correto* (O estudante A2 anota na folha: 73+73=146 metros).
> *A4: Mas essa medida* (indica 73 metros) *é para as duas torres juntas ou cada uma das torres?*
> *A2: Cada uma. Ou também, as duas torres juntas medem 73 metros.*
> *A2: Mas quantas crianças do nosso grupo são necessárias?*
> *A3: Se for 73 metros para as duas torres*? (os estudantes realizam esse cálculo, e anotam o resultado na folha, "cada torre terá 36,5 metros", mas não discutem usar essa possibilidade).
> *A4: Eu tenho, aproximadamente, 1 metro e 49 centímetros.*
> *A1: Eu tenho 1 metro e 45.*
> *A2: Sim, uma criança tem, aproximadamente, 1 metro e meio.*
> *A1: Mas nós precisamos da altura de todos ou de uma criança?*
> *A2: Nós precisamos saber a altura de uma criança, aproximadamente.*
> *A4: Sim, eu acredito que uma criança apenas.*
> *A2: Sim, uma criança tem, aproximadamente, 1 metro e meio.*
> *A4: Sim, vamos considerar que cada um tem 1 metro e meio?*
> *A2: Certo, cada um pode se medir e aí, precisamos calcular, mas na média, cada um vai ter um metro e cinquenta.*
> *A4: Sim, mas como você sabe? Que altura cada um tem?*
> *A2: Aproximadamente, cada um de nós, tem quase um e cinquenta. Talvez ele tenha 10 centímetros a menos (referindo-se a A1), então tira 10 centímetros, mas eu, você (A4) e ele (A3) temos mais do que essa diferença. Mas isto é igual, é uniforme.*
> *A3: É um pensamento. É uma boa estratégia.*
> *A2: Então vamos adotar a medida de um metro e cinquenta.*

A partir desse excerto pode-se depreender como os estudantes buscaram interpretar e compreender o problema e identificaram as quantidades pertinentes à situação real para criar um modelo matemático.

Este grupo mobilizou quatro ações para a resolução desta tarefa. No entanto, as três primeiras ações registradas não foram utilizadas no processo de resolução da tarefa. As negociações do grupo foram registradas por meio de áudio e apresentadas no Quadro 5, que descreve apenas as três primeiras ações mobilizadas pelo Grupo A.

Quadro 5: Protocolo do grupo A para as três primeiras ações da tarefa.

(a) 1ª ação – Representação da composição de medidas (medida da altura dos alunos).	(b) 2ª ação – Multiplicação das medidas de altura entre a torre (73 m) e uma criança (1,50 m), obtendo 109,50 metros.	(c) 3ª ação – Representação da divisão entre medidas de altura da torre (73m) e uma criança (1,5 m).
1,50 +1,50 +1,50 +1,50 +1,50 +1,50	73·1,50 73 0 365 + 00 1095 0	~~73:150~~ ~~73~~ 73: 150=

Fonte: Protocolo produzido pelo Grupo A.

Destacamos que estas ações representam, no ciclo de Modelagem Matemática, o desenvolvimento da matematização e o trabalhar matematicamente, ou seja, o grupo iniciou o processo para estabelecer um modelo matemático com os dados obtidos, mas o desenvolvimento de tais ações foi sendo descartado à medida que, por meio das discussões, foram percebendo incoerências nesses procedimentos, em relação ao problema solicitado, conforme se descreve a seguir.

Na primeira ação fez-se a composição das medidas da altura de seis estudantes, embora, para resolução, o grupo utilizou a medida da altura de apenas um estudante (ver Quadro 5, item (a)). Quando foram questionados sobre essa ação, o aluno A2 explicou que eles não iriam seguir com este raciocínio, pois era importante para o grupo a medida 1,5m, e assim, consideraram que 1,5m era a média das alturas das crianças, e sendo a média, não importava trabalhar com a medida de uma, duas ou três crianças, como mostra o diálogo.

> *Pesq.: Por que vocês anotaram esses valores?* (referindo-se a adição de 6 parcelas de 1,50 m).
> *A2: Não vamos seguir com esta estratégia.*
> *Pesq.: Por que não?*
> *A2: Tanto faz, trabalhar com a medida de 1,50 m ou 6 alturas de 1,50 m. Por que nós só precisamos da altura de uma criança. Assim, a gente consegue o número de crianças para atingir a altura da igreja.*
> *A4: Não faz diferença trabalhar com 1 medida ou com 6 medidas iguais, pois apenas a medida de uma criança já basta.*

A segunda ação adotada pelo grupo foi representada pela multiplicação entre a medida da altura da torre (73 m) e a medida, adotada por eles, para a altura de uma criança (1,50 m). Com isto, o grupo obteve o produto de 109,50 metros, como ilustrado no Quadro 5, item (b).

No diálogo a seguir é possível identificar uma justificativa dada pelo estudante A4 e aceita pelo grupo para não continuarem a resolução da tarefa com a segunda ação.

> *A2: Isso está errado!* (referindo-se ao produto de 73 por 1,5).
> *A3: Por que está errado?*
> *A2: Veja, o resultado é maior do que a altura da torre. Isso não pode acontecer!*
> *A4: Sim. Tem que diminuir. Então, vamos dividir!*
> *A2: Pois se a gente dividir, teremos o número de crianças. Estamos procurando um número e não uma medida.*

O grupo não utilizou esse resultado, justificando que o produto obtido é maior do que a altura da torre da Igreja e, em função disso, decidiram dividir, na busca de obter um número menor do que a medida da torre. Neste raciocínio identifica-se a mobilização de um teorema em ação, que representa implicitamente a ideia de que a quantidade de vezes que um número “a” cabe em “b” deve ser menor do que ou igual a “b”, uma vez que justificam que “[...] *o resultado é maior do que a altura da torre. Isso não pode acontecer!*”. Por outro lado, a mobilização deste teorema em ação está imbuída de outra ideia relacionada ao conceito em ação de que “o produto aumenta” e o “quociente diminui”, por isso afirmam que “*Sim. Tem que diminuir. Então, vamos dividir!*”.

Ademais, a multiplicação entre as medidas de duas alturas (altura da torre e altura de uma criança) é um procedimento que não tem sentido lógico para a resolução da tarefa, pois quando se multiplica duas medidas em metros a unidade de medida que se obtém é o metro quadrado, que representa um número associado a uma superfície. O que ocorre é que os alunos não multiplicaram duas medidas quaisquer, mas duas medidas que representam a altura de uma criança e da torre da igreja e, este novo resultado não faz sentido para a problemática da tarefa. Embora os alunos do grupo não tenham colocado estas questões no momento de explicitação da resolução aos demais alunos, este tipo de questionamento também fez parte do processo de interpretação da tarefa. Independentemente desta compreensão, pelos estudantes, eles desistiram dessa ação.

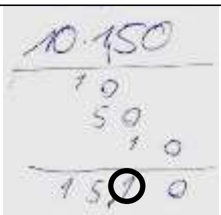
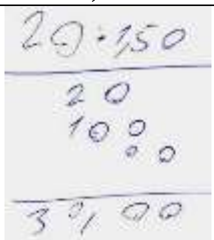
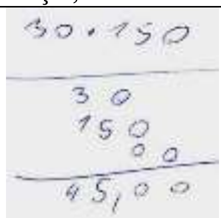
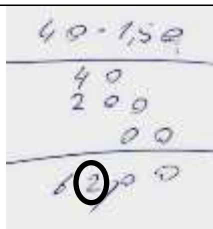
A terceira ação adotada indica o cálculo relacional de divisão entre a medida da altura da torre pela medida da altura de uma criança, como representado no Quadro 5, item (c), sugerido pelo estudante A4, como mostra o excerto do diálogo anterior. A justificativa de A4 para esta ação é bastante interessante, “*Estamos procurando um número e não uma medida*”, pois de fato, ao dividirmos metro por metro, obtemos como resposta um número que é adimensional e, no caso, representa a quantidade de crianças de 1,50 metro para atingir a altura da igreja. Entretanto, o grupo não desenvolveu a resolução da tarefa a partir desta estratégia, apenas indicou-a, não porque não aceitaram ou não entenderam a ação, mas porque não sabiam resolver a divisão com números decimais, como mostra o diálogo a seguir:

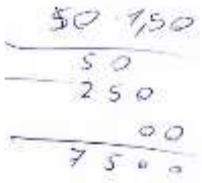
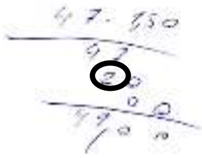
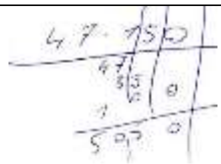
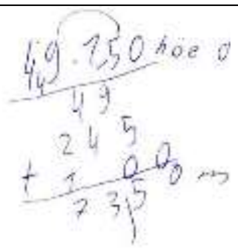
> *A4: Vamos dividir a altura da torre por um metro e meio.*
> O estudante A2 registra a operação de divisão entre 73 e 150 (Quadro 5 item (c)).
> *A2: Eu não sei fazer!*
> *A1: O correto é 1,5 e não 150!*
> *A4: Mas não sabemos dividir com a vírgula! (*Referindo-se à medida da altura de uma criança, equivalente a 1,5 m).

Nesta ação o grupo recorreu à conversão de medidas em metros para centímetros que, de acordo com Gonçalves (2008), representa o teorema em ação de correspondência entre partes. Esta tentativa não ocorreu de forma coerente, uma vez que apenas uma das medidas foi convertida e por isso o grupo não conseguiu resolver a divisão proposta na terceira ação.

A quarta ação adotada pelo grupo foi denominada “experimentação” pelos alunos, pois fizeram alguns testes para determinar a medida da altura da igreja a partir de medida de algumas crianças como, por exemplo, com a medida da altura de uma criança, definida pelo grupo como 1,50 m, alguns cálculos relacionais foram apresentados, e os integrantes do grupo consideraram agrupamentos em dezenas de crianças para a obtenção do resultado. No Quadro 6 ilustra-se o cálculo relacional desenvolvido pelo grupo na quarta ação.

Quadro 6: Protocolo produzido pelo Grupo A para quarta ação da tarefa.

4ª ação: Isomorfismo de medidas			
(a) Multiplicação da medida da altura de uma criança (1,50 m) por grupo de 10 crianças, obtendo 15,10 metros.	(b) Multiplicação da medida da altura de uma criança (1,50 m) por grupo de 20 crianças, obtendo 30,00 metros.	(c) Multiplicação da medida da altura de uma criança (1,50 m) por grupo de 30 crianças, obtendo 45m.	(d) Multiplicação da medida da altura de uma criança (1,50 m) por grupo de 40 crianças, obtendo 62,00 metros.
 Neste caso há um erro ao multiplicar 0x10 = 10. O			 Há um erro no final do

correto é $0 \cdot 10 = 0$. E com isto, ao finalizar o algoritmo, o valor de $10 \cdot 1{,}5 = 15{,}10$. Este erro é procedente da multiplicação anterior.			cálculo, quando o 2 é adicionado a zero, resultando 62,00, quando o correto seria 60,00, ou seja, “algarismo 2 no lugar do algarismo zero”
(e) Multiplicação da medida da altura de uma criança (1,50 m) por grupo de 50 crianças, obtendo 75,00 metros.	(f) Multiplicação da medida da altura de uma criança (1,50 m) pelo grupo de 47 crianças. Há equívocos nos cálculos apresentados. Os alunos afirmaram que havia erro no cálculo, em comparação com o item (e), mas não identificaram qual erro cometeram.		(g) Multiplicação da medida da altura de uma criança (1,50 m) pelo grupo de 49 crianças, obtendo 73,50 metros.
	 Na multiplicação de 5 por 47 os alunos escreveram 20 (5x4). Isto indica que eles esqueceram de mulplicar primeiramente pelo 7.	 1ª linha: $1 \cdot 47 = 47$ 2ª linha: $5 \cdot 47 = 35$ O correto seria: 235 (não ultiplicaram 5 pelo 4) 3ª linha: $0 \cdot 47 = 00$	

Fonte: Protocolo produzido pelo Grupo A.

A conclusão obtida pelo grupo é que seriam necessárias 49 crianças, com medida de 1,50 m de altura para atingir a medida da altura da torre da Igreja de São Martin em Kassel. Destacamos que os procedimentos desenvolvidos nessas quatro ações do grupo representam, no ciclo de Modelagem Matemática, o desenvolvimento da matematização e o trabalhar matematicamente, ou seja, o grupo estabeleceu um modelo matemático para resolver a problemática, a partir de dados reais considerados pertinentes. Além disso, interpretaram os resultados obtidos em contexto extramatemático.

Para a etapa de validação e exposição, o estudante A4 foi escolhido pelo grupo para apresentar o desenvolvimento desta tarefa. Durante sua explanação, os estudantes dos outros grupos também poderiam fazer questionamentos ou solicitar outras explicações, caso não tivessem entendido. Desta forma, o estudante D3 questionou o grupo A sobre o primeiro resultado descrito a partir do agrupamento da medida da altura de dez crianças:

D3 – Você pode explicar como 10 vezes 1,50 pode dar 15 metros e 10?
A4 – Nós fizemos a multiplicação. Aqui está (indica o registro na folha).
D3 – Mas 10 vezes 1,50 dá 15 metros. Isso está errado.
A4 – Ah, é verdade. Está errado. Mas nós não utilizamos esse resultado. Foi uma

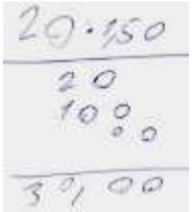
conta, parte da nossa experimentação. Um teste. Mas ele não participou do resultado final.

Outros estudantes também indicaram que havia equívoco em outros cálculos, como 40 vezes 1,50 m, em que obtiveram 62 metros (item (d) da 4ª ação). O grupo verificou que tais equívocos aconteceram, mas que não influenciaram na resolução da tarefa. O aluno equivocou-se no posicionamento dos números e acabou somando o “2” na unidade e na dezena. No entanto, isto foi falta de atenção, pois não se repetiu em todos os casos de multiplicação desenvolvidos por este estudante. Identificaram também que tais equívocos ocorreram devido ao posicionamento dos números no cálculo relacional ou por equívocos no cálculo, como no Quadro 6, item (d).

Considerando o relato do desenvolvimento desta tarefa de Modelagem, pelo grupo de estudantes da quarta série da escola alemã, e com base nos apontamentos de Vergnaud (1998), podemos indicar a mobilização dos seguintes teoremas em ação, conforme ilustrados no Quadro 7.

Quadro 7: Indicativos da mobilização de teoremas em ação pelo grupo A na tarefa.

Teorema em ação	**Protocolo do Grupo A - Indicativos da mobilização de teorema em ação**	**Comentário**
Se $a, b \in \mathbb{N}^*$ então $a \cdot b > a$ quando $b > 1$ ou $a \cdot b > b$ quando $a > 1$.	<u>Primeira ação</u> *A2: Isso está errado!* (referindo-se ao produto de 73 por 1,5). *A3: Por que está errado?* *A2: Veja, o resultado é maior do que a altura da torre. Isso não pode acontecer!* *A4: Sim. Tem que diminuir. Então, vamos dividir!*	Os alunos mobilizaram a ideia de que a quantidade de vezes que 1,5 cabe em 73 tem que ser menor do que 73 e, por isso, a multiplicação não serve visto que, para eles, na multiplicação de números naturais o produto é maior do que as parcelas.
Correspondência entre partes. Se $1m = 100cm$, então $1{,}5m = 150cm$. Se $x = 10^n$, então $kx = k10^n$	<u>Terceira ação</u> 	Os alunos mobilizaram a ideia de correspondência entre as partes, de decimal para inteiros. No entanto, converteram apenas uma medida, quando deveriam ter convertido todas as medidas.
Se $20 \cdot 1{,}5 = 30{,}00$,	<u>Quarta ação</u>	Os alunos apresentaram a

então $50 \cdot 1{,}5 = 75{,}00$. Se $a \cdot b = c$, então $k(ab) = (ka)b = kc$ Para todo $k \in \mathbb{R}$.	"Multiplicar a altura de uma criança (1,50m) por agrupamento de dezenas".  	resolução desta atividade a partir da multiplicação da medida da altura de uma criança por 10, que representa agrupamento por 10 e, descreve a mobilização da seguinte ideia: "quando multiplicamos por 10 basta acrescentar um zero à direita do último algarismo".

Fonte: Protocolo produzido pelo Grupo A.

Considerações

Com relação aos indicativos da ocorrência dos teoremas em ação, mobilizados na tarefa de Modelagem Matemática, destacamos que estes não são considerados um verdadeiro teorema científico, nem mesmo o conceito em ação é um conceito científico (VERGNAUD, 1998). No entanto, os teoremas em ação são explicitados no estudo das ações do aluno, que se constituem como fontes de dados para auxiliar o pesquisador ou o professor na compreensão da estratégia utilizada pelo aluno para resolver diferentes situações problemas. Além disso, os teoremas em ação expressam a forma pelo qual os alunos progressivamente relacionam os dados e as informações pertinentes à situação aos conceitos matemáticos necessários para resolvê-la.

Embora a tarefa de Modelagem Matemática contemplasse conceitos do isomorfismo de medidas outras questões e conceitos foram utilizados pelos alunos, entre eles destacamos: (i) a ideia de estimativa mobilizada pelos alunos durante o desenvolvimento da tarefa e (ii) estimativa de quantidades em diferentes unidades de medidas e suas relações, como por exemplo, o contínuo (altura de uma criança) e o discreto (quantidade de crianças) envolvidos na tarefa.

Destacamos também que os teoremas em ação identificados são, na maioria dos casos, usados como estrutura de controle. Isto significa dizer que os alunos modificaram ações na resolução de uma tarefa em função da estrutura de controle considerada pertinente. Nesta tarefa os alunos reorganizaram ações, pois as primeiras ações não foram consideradas pelo grupo para resolver a tarefa, eles realizaram novas ações, por meio de multiplicações sucessivas, para resolver a problemática.

Deste referencial teórico e dos dados recolhidos nesta pesquisa depreende-se a importância à diversidade de situações problemas propostas aos alunos por meio de situações multiplicativas de isomorfismo de medidas com enunciados significativos, que em nossa pesquisa mostrou-se como um desafio aos estudantes.

Quando o aluno se depara com várias situações também mobiliza vários conceitos, pois cada conceito também é formado por diversificadas situações. O ensino de Matemática não se afasta do "cálculo" a não ser para a ele melhor retornar, sob a forma do "cálculo relacional" (VERGNAUD, 2009b). Por trás de "$73 \div 1{,}50$" há complexidades de raciocínios envolvidos, uma vez que são as situações que dão sentido ao conceito, além do significado que cada algarismo representa no algoritmo da divisão.

A tarefa "Igreja de São Martin" proporcionou aos participantes a mobilização de percepções e ações para obter êxito na resolução da situação, o que para Vergnaud (2012) constitui um importante passo nos processos de ensino e de aprendizagem, pois estas percepções e ações evoluem sempre que o estudante enfrenta novas situações. Destacamos que a abordagem de uma situação multiplicativa por meio da Modelagem Matemática proporcionou aos estudantes mobilizar diferentes ideias associadas à multiplicação, tal como, o entendimento de um grupo como unidade, neste caso, o grupo adotou como unidade a medida da altura de um estudante e os padrões de valor de posição associadas à multiplicação por dez que realizaram para resolver a situação. Talvez o uso de um exercício tradicional, do tipo calcule, não teria proporcionado ao grupo o envolvimento com a tarefa, em que levantaram hipóteses e negociaram os dados necessários e pertinentes para resolver a situação.

Destacamos que o principal teorema em ação identificado, em que se considera que, se $a \cdot b = c$, então $k(ab) = (ka)b = kc$, para todo $k \in \mathbb{R}$, está relacionado a ideia de multiplicação mobilizada pelos estudantes, pois os indícios apresentados na resolução da situação parece não ter relação com a ideia de partição.

A partir dos dados considerados pelo grupo na resolução desta tarefa, indicamos, a partir do isomorfismo de medidas, o cálculo relacional correspondente à resolução que o grupo poderia adotar, a partir da primeira estratégia indicada por eles no Quadro 5, item (c), em que se considera:

Quantidade de crianças		Medida da altura (m)
1	$\longrightarrow$	1,5
x	$\longrightarrow$	73

De acordo com Fosnot e Dolk (2001) a conexão entre a divisão e a multiplicação nem sempre é um processo fácil, pelo contrário, é um processo complexo que envolve a conceitualização do significado de ambos (VERGNAUD, 1998). Neste aspecto, ao revisitarmos situações de multiplicação, partição e quota, tais como as apresentadas no Quadro 2 deste texto, ressaltamos que as estratégias envolvidas para a resolução destas situações são diferentes, embora sejam pertencentes à estrutura multiplicativa. As situações de multiplicação envolvem uma multiplicação direta entre as quantidades. As situações de partição podem ser resolvidas pelos estudantes a partir da adição de n-vezes uma mesma quantidade, até se obter o valor total. No caso deste estudo, esta foi a ideia mobilizada pelo grupo, pois relacionaram a ideia de adicionar n-vezes a medida da altura de uma criança (1,5m) até se obter o valor total, ou próximo dele, a medida da altura da catedral (73m). As situações de quota envolvem um processo de divisão entre unidades da mesma quantidade, que para os estudantes da nossa pesquisa, ainda não parece estar conceitualmente formalizado, pois como mostramos no Quadro 5, item c, os estudantes sinalizaram esta estratégia, a divisão entre 73m por 1,5m, mas não são capazes de desenvolver esta resolução, e por esse motivo, adotaram outra estratégia para resolver a situação.

Destacamos que neste tipo de tarefa, as ideias associadas às situações multiplicativas de isomorfismo de medidas representam progressões no conhecimento dos estudantes em termos do raciocínio desenvolvido, à medida que há tomada de decisões e o desenvolvimento de ações para resolver variadas situações multiplicativas.

Desta forma, ressaltamos que as diferentes situações têm por referência um objeto de conhecimento que deverá ser conceitualizado, e esta conceitualização pode ocorrer por meio dos significantes (representações externalizadas) e dos significados caracterizados pelos teoremas em ação colocados em ação durante a resolução de situações multiplicativas de isomorfismo de medidas advindas das tarefas de Modelagem Matemática desenvolvidas neste estudo.

Referências

BLUM, W.; LEISS, D. How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example “Sugarloaf”. **In.: ICTMA 12 proceedings**, pp.222–231, 2005.

BLUM, W. Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer. In: **Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis** (Hrsg.: BÜCHTER, A. et al.). Franzbecker, Hildesheim, s. 8-23, 2006.

BLUM, W.; FERRI, R. B. Mathematical Modelling: can it be taught and learnt? **In.: Journal of Mathematical Modelling and Aplication,** Blumenau, v.1, n.12, p.45-58, 2009.

CANAVARRO, A. P.; SANTOS, L. Explorar Tarefas Matemáticas. In: CANAVARRO, A. P. et al. (Ed.), **Investigação em Educação Matemática 2012:** Práticas de Ensino da Matemática. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, p.99-104, 2012.

CHAPMAN, O. Mathematical-task knowledge for teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 16(1), p.1-6, 2013.

FOSNOT, C. T.; DOLK, M.; **Young Mathematicians at work:** Constructing Multiplication and Division. Portsmouth: Heinemann, 2001.

FOSNOT, C. T. **Investigating Multiplication and Division:** Grades 3 – 5. Portsmouth: Heinemann, 2007.

GONÇALVES, H. A.; **Educação matemática e cálculo mental:** uma análise de invariantes operatórios a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Tese. Programa de Pós Graduação em Educação da Universidade Federal Fluminense. Niterói, 2008.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E.G.; SANTIAGO, A. R. C. M. A Modelagem Matemática nas Séries Iniciais: o germém da criticidade. **Alexandria (UFSC),** v.2, p.135-157, 2009.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

SILVA, V.; KLÜBER, T. E. Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Reflexões e apologia aos seus usos. In: ALENCAR, E. S.;

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. **Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão:** da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). Educação e Matemática: Associação de Professores de Matemática – Portugal, nº 105, p.22-28, 2009.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1993, UFRJ**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão – Instituto de Matemática – UFRJ, 1993, p.1-26.

__________. **A comprehensive theory of representation for mathematics education.** In.: Journal of mathematical behavior, 17 (2), 1998, p.167-181.

__________. The Theory of Conceptual Fields. In: **Human Development.** v. 52, nº 2. Printed in Switzerland: Karger, 2009a, p.83-94. Acesso on line: < http://www.karger.com/hde>.

__________. **A Criança, a Matemática e a Realidade:** Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009b.

__________. O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Orgs.). **A Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Curitiba: Editora CRV, 2009c.

__________. **Les competences, Bravo! Mais encore? Reflexions critiques pour avancer**. 2012. Disponível em: <http://pedagopsy.eu/competences_vergnaud.html>

__________. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? **In.: Infancia y Aprendizaje**, 36 (2), 2013, p.131-145.

WATSON, A. et al. Introduction. In: MARGOLINAS, C. (Ed.), Task Design in Mathematics Education. **Proceedings of ICMI Study 22**. Vol. 1. Oxford – UK, p.9-15, 2013.

ZANELLA, M. S. **Um estudo teórico sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária.** Dissertação. Programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2013.

__________. **Tarefas de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:** um estudo com alunos alemães e brasileiros. 2016. (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.

Recebido em: 19 de dezembro de 2017
Aprovado em: 28 de abril de 2018