revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

RELAÇÕES ENTRE O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO E O RACIOCÍNIO PROBABILÍSTICO NA EJA

Ewellen Tenorio de Lima[1]
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba[2]

Resumo: No presente texto, são discutidos os resultados de um estudo piloto de uma pesquisa de mestrado que buscou investigar as contribuições que a exploração de problemas combinatórios pode trazer para o raciocínio probabilístico e vice-versa. À luz da Teoria dos Campos Conceituais, foram consideradas, na construção do instrumento de coleta e no desenvolvimento do estudo, as diferentes situações que atribuem sentido à Combinatória e à Probabilidade, bem como as relações entre os conceitos de tais áreas da Matemática. A coleta de dados consistiu na proposição de oito problemas combinatórios (divididos em quatro blocos: *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*) revisitados sob o olhar da Probabilidade a partir de 20 problemas (cinco referentes a cada bloco combinatório), em contexto de entrevistas clínicas individuais. Participaram do estudo oito estudantes da Educação de Jovens e Adultos, cursando os Módulos I, II, III e IV (equivalentes aos Anos Iniciais e Anos Finais do Ensino Fundamental). A partir dos dados analisados, perceberam-se contribuições que surgem da resolução de problemas que relacionam Combinatória e Probabilidade, sendo o desempenho dos participantes diretamente influenciado pela escolaridade e pela idade dos mesmos. Defende-se, assim, que a articulação entre Combinatória e Probabilidade pode beneficiar o desenvolvimento de ambos os raciocínios em questão na EJA.
Palavras-chave: Combinatória. Probabilidade. Educação de Jovens e Adultos.

RELATIONS BETWEEN COMBINATORIAL REASONING AND PROBABILISTIC REASONING IN YOUTH AND ADULT EDUCATION

Abstract: In the present text, the results of a pilot study, of a master's research that seeks to investigate the contributions that the exploration of combinatorial problems brings to probabilistic reasoning, and vice versa, are discussed. Based on the Theory of Conceptual Fields, were considered, in the construction of the data collection instrument and in the development of the study, the different situations that give meaning to Combinatorics and Probability, as well as the relations between these areas of Mathematics. Data collection consisted of the proposition of eight combinatorial problems (divided into four blocks: *Cartesian product*, *arrangement*, *permutation* and *combination*) revisited under the view of Probability from 20 problems (five referring to each combinatorial block), in the context of individual clinical interviews. Eight students from Youth and Adult Education attending periods equivalent to elementary and middle school participated in the study. From the study developed, interesting contributions arise from the resolution of problems that allow a relation between Combinatorics and Probability, being the performance of the participants directly influenced by schooling and age. It is argued, therefore, that the articulation of Combinatorics and Probability can benefit the development of these forms of reasoning in students of Youth and Adult Education.
Keywords: Combinatorics. Probability. Youth and Adult Education.

[1]Doutoranda em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. E-mail: ewellentlima@gmail.com

[2]Doutora em Psicologia Cognitiva pela Oxford Brookes University. Docente do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. E-mail: resrborba@gmail.com

Introdução

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) surgiu da demanda de Educação Básica voltada a um público alvo com características e experiências diferenciadas daquelas dos estudantes do Ensino Regular. Fonseca (2007) destaca que o grande traço definidor de caracterização de estudantes da EJA não está relacionado à faixa etária da qual fazem parte e sim às condições socioculturais desse grupo. Isso se refere, principalmente, à falta de acesso à escolarização em idade regular ou a um histórico de fracasso escolar.

Nota-se, cada vez mais, a presença de estudantes muito jovens em salas de aula da EJA. Assim, atualmente o público de estudantes dessa modalidade de ensino é composto por vários grupos de jovens e adultos. Dentre esses grupos, tem-se: o grupo que tem seu primeiro contato com a escola em busca de escolarização tardia; o grupo composto por aqueles que, por razões diversas, interromperam seus estudos e retornam à escola; e o grupo que migra do Ensino Regular para a EJA, seja por um histórico de reprovações, pelo desejo de concluir seus estudos mais rapidamente, pelo ingresso no mercado de trabalho, por causa do nascimento de filhos, entre outros motivos.

É inegável que o jovem e o adulto possuem experiências e conhecimento de mundo diferenciados daqueles possuídos pelas crianças. Dessa forma, é importante que a escola ofereça condições para que as diferentes habilidades e dificuldades desses estudantes sejam exploradas, utilizando os conhecimentos prévios e habilidades adquiridas anteriormente, dentro e fora da escola, como ponto de partida para que a aprendizagem desses estudantes seja ampliada (OLIVEIRA, 1999).

Os conhecimentos prévios e habilidades desenvolvidas ao longo da vida dos estudantes da EJA influenciam seu contato com a Matemática escolar. Por vezes, a relação é de utilitarismo, dada a busca em compreender como o conhecimento matemático a ser aprendido na escola pode contribuir para sua vida também fora da instituição escolar. Contudo, é importante destacar a relação do jovem e do adulto com o papel formativo da escola e o *status* atribuído pelos mesmos aos conhecimentos escolares, muitas vezes considerados superiores aos adquiridos e utilizados fora do ambiente escolar (FONSECA, 2007; JANUARIO; FREITAS; LIMA, 2014).

Dessa forma, dadas as características dos estudantes da EJA, bem como as experiências vividas pelos mesmos, é necessário que a educação a eles voltada seja adequada às necessidades do público ao qual atende (BRASIL, 1996). Assim, se faz importante o desenvolvimento de pesquisas que investiguem os conhecimentos possuídos por esses estudantes e os conteúdos que devem ser ensinados nessa modalidade de ensino, levando em consideração os conhecimentos construídos em suas práticas escolares anteriores e práticas cotidianas além do ambiente escolar.

O presente estudo buscou trazer contribuições nesse sentido, a partir do levantamento de conhecimentos referentes, em especial, a conceitos da Combinatória e da Probabilidade, mobilizados por estudantes jovens e adultos cursando os Módulos I, II, III e IV (equivalentes aos Anos Iniciais e Anos Finais do Ensino Fundamental) durante a resolução de problemas. Além disso, buscou-se evidenciar as relações que se estabelecem entre o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico de estudantes da EJA quando é proposta uma articulação entre problemas relativos aos mesmos, analisando a influência da escolarização, da idade e das representações simbólicas e estratégias utilizadas no desempenho desses estudantes. A partir disso, objetivou-se analisar as contribuições que o raciocínio combinatório pode proporcionar ao desenvolvimento do raciocínio probabilístico e vice-versa.

Conhecimentos referentes à Combinatória e à Probabilidade se apresentam como úteis ferramentas de raciocínio, proporcionando novas formas de relacionar conjuntos de elementos, de pensar sobre proporções, de compreender eventos do dia-a-dia, etc. (FISCHBEIN, 1975; BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). É válido ressaltar que o trabalho com tais raciocínios parece ganhar, ainda, pouca atenção nas salas de aula da EJA, principalmente ao se tratar dos módulos equivalentes ao Ensino Fundamental, embora estes sejam raciocínios fundamentais para a ampla compreensão das estruturas multiplicativas por parte dos estudantes. Além de destacar a importância do ensino dessas duas áreas da Matemática, buscou-se investigar as contribuições que podem surgir a partir do estabelecimento de relações entre ambas.

Adotou-se como referencial teórico base a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986), que proporciona reflexões sobre a construção dos conhecimentos por parte do sujeito, atribuindo um papel essencial aos próprios conceitos e às articulações entre eles: “relativamente a uma psicologia cognitiva centrada nas estruturas lógicas como é a de Piaget, a Teoria dos Campos Conceituais aparece antes como uma psicologia dos conceitos” (VERGNAUD, 1996, p.167).

Os conceitos investigados na presente pesquisa inserem-se no campo conceitual das estruturas multiplicativas, discutido na seção que segue. É dado destaque, ainda, à necessidade de exploração das diferentes situações que atribuem significados a tais conceitos, visto que “é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido” (VERGNAUD, 1996, p.156).

Dado o posto, no presente estudo, buscando investigar o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico de estudantes da EJA, foi proposta a resolução de problemas, em contexto de entrevistas clínicas[3], que exploraram diferentes situações que atribuem sentido a conceitos combinatórios e probabilísticos. Adotou-se a classificação das situações combinatórias em função de suas relações de *ordem* e de *escolha*, conforme apontam Pessoa e Borba (2009), e, no que diz respeito à Probabilidade, foram consideradas as exigências cognitivas para a compreensão da Probabilidade, apresentadas por Bryant e Nunes (2012). Tais classificações e exigências cognitivas são apresentadas mais adiante no presente texto.

O campo conceitual das estruturas multiplicativas

Uma abordagem cognitiva, como a intrínseca à Teoria dos Campos Conceituais, adquire espaço em estudos relativos à Educação Matemática, visto que analisar como estudantes de diferentes níveis e modalidades de ensino raciocinam frente a problemas das diversas áreas da Matemática constitui um campo fértil de investigação (LIMA; BATISTA, 2015). Pesquisas com esse enfoque podem contribuir para o aperfeiçoamento dos processos de ensino de conceitos matemáticos diversos, possibilitando o levantamento de reflexões referentes à construção de materiais didáticos, à formação de professores e à própria dinâmica em sala de aula.

[3]Foram realizadas entrevistas individuais com os participantes do estudo, com base no método clínico-piagetiano. Nesse método de coleta de dados “a finalidade do exame é compreender como o sujeito pensa, como analisa situações, como resolve problemas, como responde às contra-sugestões do examinador” (CARRAHER, 1998, p.6).

Vergnaud (1986; 1996) adota uma abordagem desenvolvimentista do conhecimento, voltando seu olhar não apenas para a construção do conhecimento no geral, mas, especialmente, para o processo de desenvolvimento de conceitos específicos por parte dos sujeitos. Para Vergnaud (1986), o conhecimento é sempre conhecimento de algo. A Teoria dos Campos Conceituais atribui, assim, um papel essencial aos próprios conceitos matemáticos, e, também, às articulações entre os mesmos. São essas articulações que levam à constituição dos diferentes campos conceituais.

Para Vergnaud (1986) "um conceito pode, com efeito, ser definido como um tripé de três conjuntos" (p.9). Esses três conjuntos são: o das diferentes *situações* que dão sentido ao conceito (S), o dos *invariantes,* isto é, das propriedades e relações constantes nas variadas situações (I) e o conjunto das *representações simbólicas* que são utilizadas para representar determinado conceito (R). Na Teoria dos Campos Conceituais, ainda, um campo conceitual é definido como "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (p.10).

Particularmente, o campo conceitual das estruturas multiplicativas diz respeito ao "conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações" (VERGNAUD, 1996, p.167). Portanto, esse campo conceitual engloba conceitos como o de número racional – em suas distintas representações: fração, decimal, razão –, proporcionalidade, funções e, também, conceitos relacionados à Combinatória e à Probabilidade. Tais conceitos possuem como característica comum à demanda de um raciocínio um-a-muitos que, de acordo com Nunes e Bryant (1997), exige o entendimento de novos sentidos de número e de propriedades relativas à multiplicação e à divisão distintas daquelas referentes ao campo conceitual das estruturas aditivas, que envolvem ações de unir e separar, remetendo a um raciocínio um-a-um.

Destaca-se, ainda, que é de extrema importância analisar, investigar e classificar, exaustivamente, as *situações* que dão sentido a determinado conceito, bem como trabalhar distintas situações em sala de aula, visto que "as concepções dos alunos são formadas pelas situações que eles tenham encontrado" (VERGNAUD, 1986, p.2). Dessa maneira, a restrição do trabalho com certo conceito à exploração de um único tipo de problema não estimulará o entendimento do conceito em sua amplitude. Logo, para que seja possível se ter uma ampla compreensão de determinado conceito, é imprescindível que sejam atribuídos significados ao mesmo por meio do contato com diferentes situações.

Torna-se necessário, dessa maneira, trabalhar com uma classe diversa de problemas para que se conheçam as variadas propriedades dos conceitos, além da constante revisitação – e aprofundamento – desses problemas. Essa revisitação relaciona-se à ideia de um currículo em espiral, tendo em vista que o processo de construção, por parte dos sujeitos, dos conhecimentos acerca de determinado campo conceitual ocorre ao longo de um grande período de tempo, através da experiência, da maturidade e da aprendizagem (VERGNAUD, 1996).

Combinatória, Probabilidade e as situações que atribuem sentido a seus conceitos

Morgado *et al.* (1991) definem a Análise Combinatória como "a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas" (p.1). No presente texto, o termo Análise Combinatória é considerado um sinônimo de Combinatória e se refere à área da Matemática que estuda coleções finitas de objetos que satisfazem critérios específicos e busca contar os objetos dessas coleções.

Morgado e colaboradores destacam, ainda, dois tipos de problemas mais frequentes no estudo da Análise Combinatória: "1. Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; 2. Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas" (1991, p.2).

Conhecimentos combinatórios permitem, dessa forma, determinar o número total de elementos que compõem certo conjunto sem que, necessariamente, seja feita uma listagem ou enumeração desses elementos, proporcionando a enumeração de todos os modos possíveis de organização e combinação de objetos, de forma que haja certeza de que nenhuma possibilidade foi omitida (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996). Morgado *et al.* (1991) afirmam, ainda, que "a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema" (p.2). Assim, destaca-se a importância das situações propostas e das representações simbólicas utilizadas no ensino da Combinatória, tendo em vista a atribuição de sentido aos conceitos relacionados a essa área da Matemática pelos estudantes.

Como posto na seção anterior, defende-se que os estudantes compreendem diferentes conceitos com base nas experiências vivenciadas, que estão relacionadas aos tipos de problemas com os quais esses estudantes tiveram contato. Vergnaud (1986) destaca, assim, a necessidade da pesquisa, análise, investigação e classificação das diferentes *situações* que atribuem sentido a um conceito:

> [...] isso permite em primeiro lugar fazer apelo ao ensino de uma grande variedade de relações e de problemas; em segundo lugar de aprofundar a epistemologia de um conceito, quer dizer, principalmente sua função (para que problemas ele responde) e sua ajuda (sobre quais outros conceitos ele se apoia) (p.2).

No que diz respeito, em especial, ao campo conceitual das estruturas multiplicativas, foram realizadas diferentes classificações, dentre elas, a do próprio Vergnaud, a de Nunes e Bryant (1997) e a dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997). Essas diferentes classificações apresentam semelhanças e diferenças, em função do enfoque dado a determinadas características dos conceitos inseridos nesse campo conceitual, que inclui conceitos relacionados à Combinatória.

No presente estudo, adotou-se a classificação das situações que atribuem sentido aos conceitos da Combinatória apresentada por Pessoa e Borba (2009). Essas autoras, a partir de uma integração de classificações anteriores e, em função dos *invariantes de ordem* e *de escolha*, indicam quatro tipos de problemas combinatórios: *produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação.*

Conforme tal classificação (PESSOA; BORBA, 2009), problemas de *produto cartesiano* envolvem dois ou mais conjuntos, sobre os quais se estabelece uma relação de um-para-muitos entre seus elementos. Nesse tipo de problema a ordem de apresentação dos elementos não constitui possibilidades distintas, ou seja, a mudança de posição dos elementos não indica novas possibilidades. Por sua vez, nos problemas de *arranjo*, *permutação* e *combinação* a escolha acontece dentro de um mesmo conjunto, sendo utilizados todos ou alguns de seus elementos. Nos problemas de *arranjo* e de *combinação*, a escolha consiste em alguns elementos do conjunto. Além disso, na resolução de problemas de *arranjo* a mudança de ordem dos elementos constitui novas possibilidades enquanto nos de *combinação* a ordem de apresentação dos elementos não forma possibilidades diferentes. Já nos problemas de *permutação*, todos os elementos do conjunto são utilizados e as diferentes possibilidades são construídas a partir da mudança de posição dos elementos.

O presente estudo buscou investigar não só como os estudantes da EJA resolvem esses quatro tipos de problemas combinatórios, mas como a resolução de tais problemas pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico. A preocupação central da pesquisa está, portanto, na articulação entre os raciocínios combinatório e probabilístico.

Morgado *et al.* (1991) definem a Probabilidade como "o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios" (p.119). O conhecimento de tais modelos se apresenta como

> [...] um modo de medir a incerteza, em consequência, os modelos probabilísticos são o fundamento da maior parte da Estatística. Isto implica que o conhecimento da teoria da probabilidade é necessário para uma compreensão adequada dos métodos estatísticos, que hoje são ferramentas indispensáveis nos campos científico, profissional e social (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1991, p.11-12, tradução nossa).

Godino, Batanero e Cañizares (1991) destacam que o estudo de conceitos dessa área da Matemática pode promover uma relação entre a Matemática escolar e o cotidiano dos estudantes, visto que quando "adequadamente compreendida, a Probabilidade proporciona uma excelente oportunidade para mostrar aos estudantes [...] como aplicar a matemática para resolver problemas reais" (p.12). O estudo da Probabilidade proporciona, assim, o contato com a incerteza, dando um novo enfoque à instrução escolar referente à Matemática, área que em grande parte do tempo trabalha com ideias determinísticas.

Morgado *et al.* (1991) afirmam que o primeiro passo para a resolução de um problema de Probabilidade consiste em "explicitar qual é o conjunto de possíveis resultados do experimento e calcular o número de elementos contidos nele" (p.120). A determinação de tal conjunto, denominado *espaço amostral*, ou seja, do conjunto das diferentes possibilidades de eventos, está, portanto, intimamente relacionada ao raciocínio combinatório.

Para Bryant e Nunes (2012), a Probabilidade é um conceito complexo que demanda o desenvolvimento de quatro exigências cognitivas para seu amplo entendimento. Os autores indicam que essas exigências estão relacionadas à *compreensão da noção de aleatoriedade*, à *formação e categorização de espaços amostrais*, à *comparação e quantificação de probabilidades* e ao *entendimento de correlações* (relações entre eventos).

A primeira exigência cognitiva indicada por Bryant e Nunes (2012) está relacionada à compreensão da natureza de eventos não determinísticos, isto é, eventos aleatórios. A aleatoriedade relaciona-se à incerteza sobre resultados de eventos que ainda não ocorreram e desempenha um papel importante no cotidiano: ao jogar um dado, lançar uma moeda e embaralhar cartas, por exemplo, tem-se como propósito promover uma situação justa baseada na aleatoriedade, fazendo com que todos tenham a mesma chance (dado eventos equiprováveis).

A segunda exigência cognitiva está intrinsecamente pautada no raciocínio combinatório: a determinação do espaço amostral é importante não só para o cálculo de probabilidades, mas é também um elemento essencial para entender a natureza da aleatoriedade. Segundo os autores, problemas probabilísticos "são sempre sobre um conjunto de eventos possíveis, mas incertos [...]. Nós precisamos saber precisamente quais são todos os eventos possíveis" (BRYANT; NUNES, 2012, p.29, tradução nossa). O estudo do espaço amostral permite, ainda, que se identifique o número de casos favoráveis e possíveis – dados essenciais ao cálculo de probabilidades conforme a concepção clássica/laplaciana de Probabilidade.

A terceira exigência cognitiva refere-se à capacidade de comparar e quantificar probabilidades. Sendo a probabilidade uma quantidade, para calculá-la é necessário compreender a ideia de proporcionalidade. É justamente na compreensão da proporcionalidade que residem algumas dificuldades, pois "o cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento ou de uma classe de eventos deve se basear na quantidade total do espaço amostral e não apenas na quantidade de eventos que nós queremos prever" (BRYANT; NUNES, 2012, p.46, tradução nossa).

Por fim, a quarta exigência cognitiva está relacionada à identificação de eventos dependentes e independentes, visto que a associação entre dois eventos pode acontecer aleatoriamente ou representar uma relação genuína. Conforme Bryant e Nunes (2012), "o pensamento correlacional depende, ao menos em parte, de um entendimento da aleatoriedade" (p.7, tradução nossa). Dessa forma, está em jogo a habilidade de distinguir um evento aleatório de um não aleatório em função de outro evento dado.

Essas quatro exigências cognitivas ao desenvolvimento do raciocínio probabilístico foram consideradas no presente estudo, buscando-se investigar os conhecimentos relativos a conceitos da Probabilidade dos estudantes participantes, relacionando esses conhecimentos também ao raciocínio combinatório explorado por meio da resolução de problemas. O interesse pela investigação desses dois raciocínios (combinatório e probabilístico) de maneira articulada se deu em função da indicação de relações entre eles presentes na literatura e em documentos curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais referentes ao Ensino Fundamental (BRASIL, 1997, 1998), e do entendimento da importância da exploração de diferentes situações que atribuem sentido aos conceitos inseridos no campo conceitual das estruturas multiplicativas, inclusive a partir da exploração de relações entre diferentes conceitos desse campo conceitual.

Segundo Piaget e Inhelder (1951 *apud*. NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996), se o sujeito não é capaz de raciocinar sob a luz da Combinatória, não conseguirá compreender a ideia de Probabilidade, exceto em casos nos quais experimentos aleatórios muito elementares sejam tratados. Spiegel (1978) indica que as principais dificuldades encontradas no desenvolvimento da teoria da Probabilidade estiveram relacionadas ao domínio da Combinatória. Em muitos casos, nos quais o número de elementos do espaço amostral não é muito grande, é viável enumerar, listar ou contar diretamente os elementos do espaço amostral para a determinação de probabilidades, mas existem, entretanto, problemas nos quais essa contagem é praticamente impossível. São nesses casos que a Combinatória pode ser utilizada para facilitar a resolução desses problemas, apresentando-se como um processo indireto de contagem.

Assim, tendo como foco as relações que se estabelecem entre o raciocínio combinatório e o probabilístico, o presente estudo teve por objetivo investigar quais contribuições podem surgir para o desempenho na resolução de problemas combinatórios em função de uma visão probabilística e vice-versa.

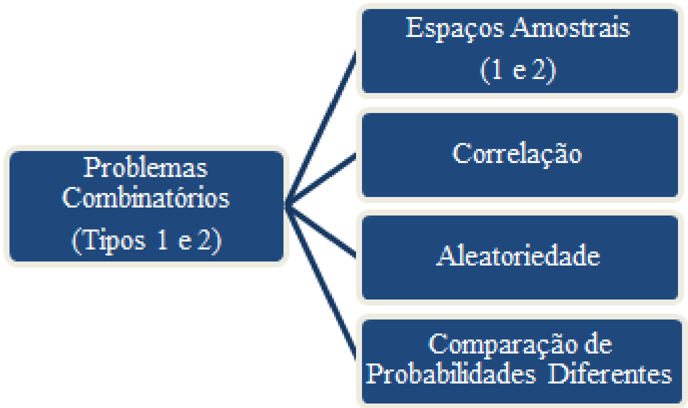
Método

Os dados aqui apresentados e discutidos foram coletados junto a oito estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA) de uma escola municipal de Recife-PE. Os participantes em questão cursavam, no período da coleta de dados, os Módulos I, II, III e IV da EJA, sendo dois estudantes de cada módulo (um jovem com menos de 20 anos de idade e um adulto com mais de 40 anos). Os módulos da EJA acima citados equivalem ao período de escolarização referente ao Ensino Fundamental, sendo os Módulos I e II (1º segmento) equivalentes aos Anos Iniciais e os Módulos III e IV (2º segmento) equivalentes aos Anos Finais.

A coleta de dados consistiu na proposta de resolução de um teste composto por oito situações-problema de Combinatória mais 20 revisitações a esses problemas sob o olhar da Probabilidade. Os testes foram resolvidos pelos participantes em contexto de entrevista clínica individual. A escolha por esse método de coleta de dados se deu em função do interesse em investigar, a fundo, o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico desses estudantes. Entende-se que tal método proporciona uma importante interação pesquisador-participante, permitindo a obtenção de uma compreensão mais ampla dos conhecimentos mobilizados e procedimentos utilizados pelos estudantes na resolução dos problemas propostos.

Durante as entrevistas clínicas realizadas, a leitura de todos os problemas foi feita em voz alta pela pesquisadora. Os problemas do teste foram apresentados em blocos (um bloco para cada tipo de *situação* combinatória considerada: *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*), de maneira impressa, e os participantes dispuseram de lápis, papel e calculadora para a resolução dos problemas. A estrutura de cada bloco de problemas do teste é apresentada na Figura 1.

Figura 1: Estrutura de apresentação dos blocos de problemas propostos no teste.



Fonte: Construção das autoras.

Cada um dos quatro blocos de problemas combinatórios presentes no teste proposto foi composto por dois problemas combinatórios (um de Tipo 1 – menor número de etapas de escolha e resultado menor ou igual a 12 – e um de Tipo 2 – maior número de etapas de escolha e resultado maior ou igual a 120) e de cinco revisitações a esses problemas sob o olhar da Probabilidade. Tais revisitações exploraram os contextos presentes nos problemas combinatórios anteriormente resolvidos, investigando aspectos particulares desses problemas que dizem respeito a conceitos probabilísticos. Buscou-se, por meio dessas revisitações, investigar as relações que se estabelecem entre ambos os raciocínios (combinatório e probabilístico), considerando-se as *situações* combinatórias referentes a problemas de *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação* e as exigências cognitivas ao amplo entendimento da Probabilidade referentes à construção de *espaços amostrais*, à investigação de *correlações*, ao entendimento da *aleatoriedade* e à *comparação de probabilidades*. A título de exemplificação, os problemas de *permutação* presentes no teste e as revisitações probabilísticas aos mesmos são apresentadas nas Figuras 2 e 3.

Figura 2: Bloco de problemas de *permutação.*

(P1) Maria gosta muito de literatura brasileira e seu autor favorito é José de Alencar. Ela ganhou 3 livros (*Iracema, Senhora* e *Lucíola*) de presente de aniversário e ainda não decidiu em que ordem irá lê-los. Quantas ordens de leitura diferentes são possíveis?

(P2) Joaquim tem 5 filhas (Ana, Bianca, Carla, Diana e Edna). Ele sempre usa como senha de seu computador as letras iniciais dos nomes de suas filhas. Quantas senhas diferentes podem ser formadas mudando as posições das iniciais?

P1 →*permutação* Tipo 1 (3 etapas de escolha; resultado 6);
P2 →*permutação* Tipo 2 (5 etapas de escolha; resultado 120).
Fonte: Instrumento de coleta.

Figura 3: Revisitações aos problemas de *permutação.*

(EAP1) Liste todas as ordens de leitura que Maria pode escolher.

(EAP2) Você consegue listar todasas senhas que Joaquim pode criar a partir das iniciais dos nomes das filhas? Como/Por quê?

(CO) Se Maria decidir que vai ler o livro *Iracema* primeiro, os livros *Senhora* e *Lucíola* têm a mesma chance de serem lidos em seguida ou algum deles tem mais chance? Por quê?

(AL) Maria decidiu jogar um dado para definir qual livro vai ler primeiro. Ela decidiu que se o lançamento tiver como resultado os números 1 ou 2 ela lerá o livro *Lucíola*, se o resultado do dado for 3 ou 4 lerá o livro *Senhora* e se o resultado for 5 ou 6 lerá o livro *Iracema*. Todos os livros têm a mesma chance de ser o primeiro a ser lido ou algum livro tem mais chance de ser sorteado? Justifique.

(CPD) Jéssica e Sabrina são amigas de Maria e também gostam muito de ler. Jéssica tem 3 livros de romance, 5 de suspense e 2 de ficção científica. Sabrina tem 4 livros de romance, 4 de suspense e 6 de ficção científica. Se elas escolherem um livro ao acaso, quem tem mais chances de ler um livro de romance? Explique.

EAP1 →*espaço amostral* do problema de *permutação* Tipo 1;
EAP2 →*espaço amostral* do problema de *permutação* Tipo 2; CO →*correlação*;
AL →*aleatoriedade*; CPD →*comparação de probabilidades diferentes.*
Fonte: Instrumento de coleta.

A estrutura acima apresentada se estende aos outros blocos de problemas combinatórios (*produto cartesiano*, *arranjo* e *combinação*). A primeira das revisitações referentes à construção de espaço amostral se refere ao problema combinatório de Tipo 1, enquanto a segunda revisitação diz respeito à construção do espaço amostral do problema combinatório de Tipo 2. As revisitações referentes à correlação, aleatoriedade e comparação de probabilidades diferentes são ampliações do contexto do problema combinatório de Tipo 1. Tais revisitações demandavam, respectivamente, a percepção da independência de eventos dados, a compreensão da aleatoriedade e equiprobabilidade e a consideração do caráter proporcional durante a comparação de probabilidades. Essa organização se deu em função dos problemas de Tipo 1 serem mais simples e, portanto, a exploração aprofundada de seus contextos é mais viável do que a dos problemas de Tipo 2, que apresentam um número muito maior de possibilidades. Assim, a única revisitação aos problemas combinatórios de Tipo 2, consiste na solicitação de construção de espaço amostral. A inclusão desse problema no teste visou explorar o entendimento da limitação de estratégias como a listagem para a resolução de problemas combinatórios que apresentam um número elevado de possibilidades.

Na próxima seção são apresentados e discutidos os dados coletados por meio da aplicação do instrumento de coleta acima descrito.

Apresentação e discussão dos resultados

Desempenho geral dos participantes

Para a realização de análises quantitativas dos dados foi atribuído, para cada um dos 28 problemas presentes no instrumento de coleta utilizado (oito problemas combinatórios + 20 revisitações, divididos em quatro blocos), um (1) ponto para um acerto total e zero (0) ponto quando a resposta apresentada ao problema foi incorreta. Dessa maneira, o desempenho máximo no teste equivale a 28 pontos. Na Tabela 1 o desempenho obtido por cada participante do estudo é indicado. Os participantes identificados por número ímpar são adultos com mais de 40 anos de idade, enquanto os participantes identificados por numeração par são jovens com menos de 20 anos.

Tabela 1: Número de acertos (de possíveis 28) por participante na resolução dos problemas propostos.

MÓDULO	PARTICIPANTES	Nº DE ACERTOS
I	P1	**13**
	P2	**2**
II	P3	**11**
	P4	**8**
III	P5	**19**
	P6	**11**
IV	P7	**14**
	P8	**16**

Fonte: Construção das autoras.

A partir da Tabela 1, é possível perceber que, no que diz respeito ao desempenho médio, os participantes dos Módulos I e II (equivalentes aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental) apresentam desempenhos semelhantes entre si, o mesmo ocorre com os participantes dos Módulos III e IV (Anos Finais). Os estudantes dos dois últimos módulos apresentaram média de acertos de 15 pontos, enquanto os dos primeiros módulos obtiveram desempenho médio igual a 7,5 e 9,5 pontos, respectivamente. Dessa forma, parece haver influência direta do nível de escolarização no desempenho apresentado pelos participantes.

Esse resultado corrobora com os resultados de Lima (2010), que investigou o desempenho de estudantes da EJA quando da resolução de problemas de estrutura multiplicativa, em especial aqueles voltados à Combinatória. A autora constatou desempenhos superiores dos estudantes dos módulos equivalentes aos Anos Finais do Ensino Fundamental em comparação aos módulos equivalentes aos Anos Iniciais, tendo a compreensão de aspectos dos diferentes tipos de problemas abordados e o uso de representações simbólicas/estratégias adequadas às suas resoluções. Os resultados obtidos indicaram que a escolaridade pode promover a obtenção de melhores desempenhos em problemas combinatórios, mesmo quando a Combinatória não é alvo de ensino específico. A escolarização em si mesma parece, assim, possibilitar avanços no raciocínio combinatório dos estudantes.

Contudo, melhores desempenhos por parte dos estudantes dos Módulos III e IV eram esperados, tendo-se em vista as expectativas de aprendizagem presentes em propostas curriculares referentes a essa modalidade de ensino (BRASIL, 2001; 2002), nas quais é possível perceber a existência de maior destaque a conhecimentos relativos à Combinatória e à Probabilidade no documento voltado ao 2º segmento do Ensino Fundamental (Anos Finais). Se cumprido o que é prescrito, os estudantes de módulos mais avançados teriam mais oportunidades de desenvolverem seus raciocínios combinatório e probabilístico.

É válido destacar, ainda, que, no geral, os participantes adultos (identificados por numeração ímpar) obtiveram um desempenho superior ao dos participantes jovens cursando o mesmo módulo (numeração par). A exceção é observada no Módulo IV, com o participante jovem apresentando um desempenho um pouco superior ao do participante adulto. Atribui-se tal resultado a um maior empenho dos participantes adultos, observado no decorrer das entrevistas clínicas individuais, durante as quais os problemas propostos foram resolvidos. Na coleta de dados, os participantes jovens demonstraram menos interesse e empenho ao resolverem os problemas propostos.

Resolvendo problemas combinatórios

Na Tabela 2 é possível analisar de maneira mais detalhada o desempenho dos participantes. Nessa tabela, é apresentado, em especial, o desempenho referente à resolução dos problemas combinatórios (de Tipo 1 e Tipo 2) antes e depois da revisitação referente à construção do espaço amostral de cada problema (a coluna em negrito em cada problema diz respeito à solução dada ao mesmo após a revisitação).

Tabela 2: Desempenho por participante na resolução dos problemas combinatórios propostos.

PROBLEMAS COMBINATÓRIOS	**PC1**		**PC2**		**A1**		**A2**		**P1**		**P2**		**C1**		**C2**	
Participante 1	1	**1**	0	**0**	1	**1**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	0	0	**0**
Participante 2	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	0	0	**0**
Participante 3	0	**1**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	**1**	0	**0**	0	0	0	**0**
Participante 4	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	0	0	**0**
Participante 5	1	**1**	0	**0**	0	**1**	0	**0**	1	**1**	0	**0**	0	0	0	**0**
Participante 6	0	**1**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0	0	0	**0**

Participante 7	0	**1**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	1	**1**	0	**0**	0	0	0	**0**
Participante 8	0	**1**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	1	**1**	0	**0**	1	1	0	**0**
TOTAL	2	**6**	0	**0**	1	**2**	0	**0**	3	**4**	0	**0**	1	**1**	0	**0**

PC1 → *produto cartesiano* Tipo 1; PC2 → *produto cartesiano* Tipo 2; A1 → *arranjo* Tipo 1; A2 → *arranjo* Tipo 2; P1 → *permutação* Tipo 1; P2 → *permutação* Tipo 2; C1 → *combinação* Tipo 1; C2 → *combinação* Tipo 2.

Fonte: Construção das autoras.

Os dados apresentados na Tabela 2 evidenciam que as revisitações aos problemas combinatórios, especialmente as que consistiram na construção dos espaços amostrais, proporcionaram ricos momentos de reflexão que permitiram que os estudantes avaliassem as respostas dadas inicialmente e construíssem novos esquemas para a resolução dos diferentes problemas combinatórios ao repensarem as estratégias utilizadas e os invariantes dos problemas combinatórios em questão. Assim, as respostas dadas aos problemas de Tipo 1 (com menor número de etapas de escolha e menor número de possibilidades), após as revisitações e questionamentos durante a realização das entrevistas clínicas, quando não estavam corretas, se aproximaram cada vez mais do número total de possibilidades.

É importante, ainda, destacar que avanços quantitativos no desempenho foram mais observados no que se refere aos problemas de *produto cartesiano* e de *permutação*, contudo, no que diz respeito aos problemas combinatórios de *arranjo* e de *combinação* foi possível perceber o surgimento de avanços mais qualitativos no desempenho após as revisitações propostas, que não ficam evidentes na Tabela 2, pois na mesma são considerados os acertos totais. Tal resultado aponta para a importância da diferenciação das situações combinatórias em função dos invariantes das mesmas, conforme indicado por Vergnaud (1986, 1996) e da exploração de variadas situações para o desenvolvimento pleno do raciocínio combinatório.

O mesmo impacto positivo das revisitações sob o desempenho nos problemas combinatórios não foi observado nos problemas de Tipo 2, que possuem elevado número total de possibilidades. As dificuldades para o esgotamento das possibilidades nesses problemas permaneceram, uma vez que o grande número de possibilidades e o uso generalizado de representações simbólicas/estratégias menos refinadas – como a enumeração oral e a listagem sem sistematização – impossibilitou o levantamento de todas elas.

Assim como no estudo de Vega (2014), constatou-se, portanto, que o número de etapas de escolha influenciou o desempenho apresentado nos diferentes tipos de problemas combinatórios propostos. Os problemas de Tipo 2, com maior número de etapas de escolha e, consequentemente, de possibilidades, não tiveram suas possibilidades esgotadas por nenhum participante do estudo. Tal fato se deu, principalmente, em função das representações simbólicas/estratégias utilizadas pelos participantes, que foram, por vezes, eficazes na resolução de problemas do Tipo 1, não sendo suficientes para resolver os problemas de Tipo 2. Assim, o observado no presente estudo reforça o importante papel que as representações simbólicas exercem na resolução de problemas, conforme afirmado por Vergnaud (1986; 1996).

Os resultados apresentados na Tabela 2 corroboram com os resultados de pesquisas anteriores quanto ao desempenho de estudantes da EJA na resolução de problemas combinatórios, como a de Lima (2010), à medida que os problemas de *produto cartesiano* e de *permutação* foram aqueles nos quais os participantes apresentaram melhor desempenho. Em especial, o problema de *produto cartesiano* Tipo 1 (2 etapas de escolha, resultado 8) teve suas possibilidades esgotada mais vezes, tendo esse esgotamento ocorrido principalmente posteriormente, durante a explicitação do *espaço amostral* desse problema combinatório.

Além disso, a principal dificuldade observada na resolução dos problemas combinatórios propostos foi a incompreensão do *invariante de ordem* nos problemas de *combinação*, tendo os estudantes cometido erros de ordem, indicando conjuntos com elementos iguais em ordens diferentes como possibilidades distintas. Erros desse tipo foram apontados em estudos realizados com diferentes públicos, como o de Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996), que teve adolescentes espanhóis como sujeitos de pesquisa; o de Pessoa e Borba (2009), desenvolvido com crianças e adolescentes estudantes da modalidade regular; o de Lima (2010), com jovens e adultos estudantes da EJA; e o de Rocha (2011), com professores dos diferentes níveis da Educação Básica. Isso reflete a existência de dificuldade em diferenciar os invariantes operatórios de diferentes tipos de problemas combinatórios, o que justifica o baixo desempenho apresentado principalmente nos problemas de *arranjo* e *combinação*, por exemplo, o que reforça que tais invariantes (nesse caso, *de ordem* e *de escolha*) como uma importante dimensão na conceitualização relativa ao raciocínio combinatório (VERGNAUD, 1986; 1996).

Destaca-se, ainda, que os participantes do estudo conseguiram, no geral, desprender-se de suas preferências pessoais durante a resolução dos problemas propostos, considerando diversas das possibilidades existentes. Entretanto, as representações simbólicas/estratégias utilizadas pelos mesmos (enumeração oral, listagem e, poucas vezes, diagramas) se mostraram limitadoras, principalmente pela falta de sistematização apresentada pela maior parte dos participantes, o que dificultou o esgotamento do número total de possibilidades dos problemas propostos. Nos problemas de Tipo 1 de *produto cartesiano* e de *permutação*, mais participantes conseguiram chegar ao número total de possibilidades, enquanto nos problemas de *arranjo* e de *combinação* do Tipo 1 muitas possibilidades foram indicadas, contudo dificuldades, principalmente no que diz respeito à compreensão dos *invariantes de ordem* desse tipo de situação combinatória, impediram o esgotamento das possibilidades.

A existência de um número muito elevado de possibilidades nos problemas combinatórios de Tipo 2 foi raras vezes percebida, o que levou a maioria dos estudantes a tentar resolver esses problemas utilizando estratégias ineficazes para os mesmos e, consequentemente, ao erro e à utilização de grande período de tempo. Poucos estudantes chegaram, em alguns momentos, a identificar a natureza de tais situações, afirmando que não saberiam responder dado problema porque o número total de possibilidades era muito elevado. Um dos estudantes que chegou a perceber tal aspecto na situação-problema de *permutação* foi o participante P1, adulto do Módulo I, que ao ter contato com o problema que envolvia o contexto de criação de uma senha com 5 dígitos (utilizando-se as letras A, B, C,D e E), afirmou que *"é muita coisa, são muitas! É como Matemática. Porque é senha, se eu mudar uma* [letra] *já é outra senha [...] vai ser muito mais de vinte".*

As principais dificuldades apresentadas pelos participantes do presente estudo no que diz respeito à resolução dos problemas combinatórios – *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação* – propostos estão relacionadas, assim, a dois dos principais erros cometidos ao resolver esse tipo de problema, conforme apontados por Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996). São esses: erros são de *ordem* (considerar que a ordem gera novas possibilidades quando isso não ocorre e vice-versa) e erros de *enumeração não sistemática* (a falta de sistematização pode levar o estudante anão conseguir esgotar as possibilidades).

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Resolvendo problemas probabilísticos

No que diz respeito aos problemas que abordaram as diferentes exigências cognitivas da Probabilidade, os participantes apresentaram facilidade em perceber a inexistência de correlações entre eventos e o caráter aleatório destes, entretanto, obtiveram desempenho bastante insatisfatório ao comparar probabilidades de eventos distintos, visto que na grande maioria das vezes o caráter proporcional relativo à estimativa de probabilidades não foi levado em consideração. O desempenho apresentado por cada aluno na resolução de tais problemas é apresentado na Tabela 3, sendo o número máximo de acertos em cada tipo de problema igual a quatro pontos.

Tabela 3: Desempenho por participante na resolução dos problemas probabilísticos propostos (revisitações) – (máximo de 4 pontos em cada tipo de problema).

REVISITAÇÕES AOS PROBLEMAS	**CO**	**AL**	**CPD**
Participante 1	4	4	0
Participante 2	1	0	0
Participante 3	4	4	0
Participante 4	3	4	0
Participante 5	4	4	3
Participante 6	2	4	0
Participante 7	4	4	0
Participante 8	4	4	0
TOTAL DE ACERTOS	**26**	**28**	**3**

CO → *correlação* (*PC*, *A*, *P* e C); AL → *aleatoriedade* (*PC*, *A*, *P* e C);
CPD → *comparação de probabilidades diferentes* (*PC*, *A*, *P* e C).
Fonte: Construção das autoras.

O desempenho dos estudantes foi bastante satisfatório na identificação da não existência de *correlações* entre eventos. Tal fato parece estar relacionado ao grande número de possibilidades distintas consideradas nos problemas combinatórios. Como os participantes conseguiram, muitas vezes, desprender-se de preferências pessoais ao levantar as possibilidades referentes aos diferentes tipos de problemas combinatórios, foram, então, capazes de deixar argumentos como 'essa cor combina mais com aquela' de lado ao investigar a existência de correlações entre eventos e a chance dos mesmos, como na escolha da camiseta para ser utilizada com uma determinada cor de calça (referente ao problema de *produto cartesiano*), sendo capazes de identificar o caráter independente dos eventos presentes nos problemas propostos.

Os participantes evidenciaram relacionar as situações propostas a contextos presentes em seus cotidianos, identificando rapidamente a *aleatoriedade* intrínseca a contextos de jogos e sorteios. Essa relação é reforçada por falas como a do participante P2 que afirmou que ao pegar uma camiseta entre quatro penduradas em cabides, sem olhar, *"vai contar pela sorte"* e, assim, todas têm a mesma chance de serem pegas. Em outra situação, P7 afirmou que a chance de cair 1 ou 2, 3 ou 4 e 5 ou 6 em um lançamento de dado é a mesma, visto que *"jogando o dado é qualquer um"* que tem chance de sair. É válido destacar que tais falas refletem, no entanto, uma confusão entre evento aleatório e equiprovável, confusão que levou a dificuldades no que diz respeito ao último tipo de problema probabilístico proposto.

Os problemas que abordaram a *comparação de probabilidades diferentes* destacam-se como aqueles que evidenciaram uma grande lacuna no conhecimento probabilístico possuído pelos participantes do estudo, sendo observadas compreensões superficiais e, por vezes, errôneas da quantificação de probabilidades, semelhantes às observadas por Batista e Francisco (2015). O erro, nesses problemas, consistiu na comparação baseada apenas no número absoluto de casos favoráveis considerados em cada evento, não tendo sido levada em consideração a probabilidade de ocorrência dos eventos em função do espaço amostral de cada um deles. O desempenho nesse tipo de problema foi bastante insatisfatório: apenas um estudante do Módulo III (P5) chegou a considerar o caráter proporcional por trás da Probabilidade em três dos quatro problemas desse tipo propostos no teste. Dificuldades semelhantes foram apresentadas por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental do estudo de Santos (2015). Assim, ressalta-se a importância do raciocínio combinatório para sanar dificuldades nesses casos, visto que este permite a compreensão dos espaços amostrais, essencial para correta abordagem de problemas de *comparação de probabilidades*.

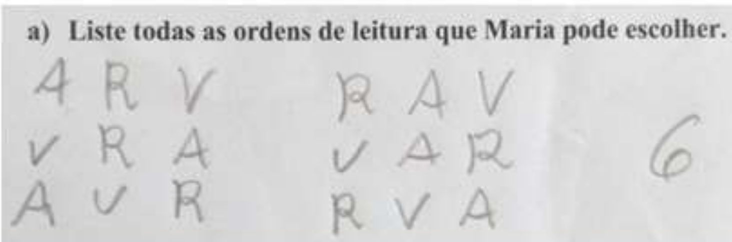
A partir do aqui posto, reforça-se, novamente, o papel central dos invariantes dos problemas multiplicativos na conceitualização por parte dos sujeitos. Destaca-se, assim, a importância do trabalho com as diferentes exigências cognitivas da Probabilidade para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico.

Relacionando Combinatória e Probabilidade

O objetivo ao construir um teste composto por problemas combinatórios e posteriores revisitações desses problemas sob o olhar das diferentes exigências cognitivas relacionadas à Probabilidade foi investigar como o atendimento a tais exigências poderia contribuir para um melhor desempenho na resolução dos problemas combinatórios. Por outro lado, buscou-se investigar, também, como o desempenho nos problemas combinatórios poderia interferir na compreensão das exigências cognitivas relacionadas ao raciocínio probabilístico.

Em primeiro lugar foi explorada a construção de espaços amostrais das diferentes situações combinatórias trabalhadas anteriormente (do Tipo 1 e 2, com menores e maiores números de possibilidades). A solicitação da listagem de todas as possibilidades permitiu que aqueles alunos que não utilizaram esta estratégia espontaneamente na resolução dos problemas combinatórios pudessem realizar o exercício de indicar todas as possibilidades que foram levantadas, e aqueles que já haviam realizado algum tipo de listagem puderam revisitá-la em busca do esgotamento dos casos possíveis, como exemplificado na Figura 4 e na Transcrição 1, referentes ao problema de *permutação* Tipo 1: *Maria gosta muito de literatura brasileira e seu autor favorito é José de Alencar. Ela ganhou 3 livros (Iracema, Senhora e Lucíola) de presente de aniversário e ainda não decidiu em que ordem irá lê-los. Quantas ordens de leitura diferentes são possíveis?* – a ilustração referente a tal problema contava com três livros em cores distintas (azul, roxo e verde), daí o uso das iniciais de tais cores por P3.

Figura 4: Construção de *espaço amostral* do problema de *permutação* Tipo 1 (três etapas de escolha, resultado 6), P3, Módulo II.



Fonte: Dados da pesquisa.

Transcrição 1: Construção de *espaço amostral* do problema de *permutação* Tipo 1 (três etapas de escolha, resultado 6), P3, Módulo II.

Pesq.: "Você listou quatro ordens de leitura diferentes antes, não foi? Agora, você pode conferir se tem mais alguma ou se são só essas?"
P3: "Certo"*[inicia copiando as ordens de leitura já listadas]*
Pesq.: "E aí, tem mais alguma ou só essas quatro?"
P3:"Não! Ela pode ler primeiro o verde, depois o azul e por último o roxo [...] e pode também ler o roxo, depois o verde e o azul"
Pesq.: **"**Antes você disse que eram quatro. Quantas são então *[ordens de leitura possíveis]*?"
P3: "Seis. Descobri mais duas".

Fonte: Construção das autoras.

Dessa forma, o trabalho com o *espaço amostral* permitiu confrontar o resultado obtido na resolução do problema combinatório, por meio da indicação de todas as possibilidades. Permitiu, ainda, investigar, de maneira mais aprofundada, a compreensão dos *invariantes de ordem e escolha* de cada tipo de problema explorado. Vale ressaltar que foi esse trabalho com a listagem do espaço amostral que permitiu concluir que os estudantes, na grande maioria das vezes, não foram capazes de distinguir a natureza dos problemas combinatórios do Tipo 2 (com número de possibilidades elevada), visto que afirmaram ser possível listar todas as possibilidades nesses tipos de problema, chegando a indicar algumas delas. Contudo, não só o trabalho com uma exigência cognitiva da Probabilidade (*espaço amostral*) mostrou contribuir para o desempenho nos problemas combinatórios, como o raciocínio utilizado nestes primeiros proporcionou reflexões que influenciaram as respostas dadas aos problemas que investigavam o atendimento a certas exigências cognitivas para a compreensão da Probabilidade.

Como apontado anteriormente, o bom desempenho apresentado na identificação da não existência de *correlações* parece estar relacionado ao desempenho apresentado na resolução dos problemas combinatórios: o bom desempenho ao perceber as inúmeras possibilidades relativas a tais problemas facilitou a percepção da independência dos eventos dados, visto que o levantamento de muitas possibilidades demandou o desprendimento de certas concepções/gostos pessoais que poderiam ser tomadas por base de correlações genuínas. Por sua vez, o desempenho apresentado no que diz respeito aos problemas que abordaram a *aleatoriedade* está relacionado à ideia de chance, que foi facilmente identificada em contextos de jogos e sorteios, em tais casos estreitamente relacionados a situações equiprováveis.

Por fim, nos problemas probabilísticos que abordaram a *comparação de probabilidades diferentes*, problemas nos quais os participantes do estudo apresentaram desempenho mais baixo, se atribui o desempenho a não utilização de um raciocínio combinatório que permitisse aos estudantes considerarem cada evento separadamente, levantando seus *espaços amostrais*, para então determinar suas probabilidades e compará-las. Assim, foi ao não fazer distinção entre possibilidade e probabilidade que os participantes apresentaram respostas inadequadas nesse tipo de problema em específico.

Considerações finais

No presente texto, foram apresentadas discussões referentes a um estudo piloto de uma pesquisa de dissertação em andamento, do qual participaram oito estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA) – cursando os módulos dessa modalidade de ensino equivalentes a todo o Ensino Fundamental. Teve-se por objetivo investigar os conhecimentos combinatórios e probabilísticos mobilizados por tais estudantes durante a resolução dos problemas propostos, observando as relações que se estabelecem entre tais conhecimentos e como a exploração de situações combinatórias influencia o desenvolvimento do raciocínio probabilístico e vice-versa.

Em função do número reduzido de participantes desse estudo piloto, análises estatísticas inferenciais a serem realizadas no estudo final de dissertação, não foram realizadas. Entretanto, foi possível, desde já, perceber e discutir aspectos positivos que a resolução de problemas que abordam conceitos combinatórios e probabilísticos traz para o desenvolvimento de ambos os raciocínios, além disso, tal estudo contribuiu para o levantamento de reflexões sobre os objetos de estudo e sobre o método utilizado, proporcionando o aperfeiçoamento desses.

Dos oito participantes do estudo relatado, quatro eram adultos com mais de 40 anos e quatro eram jovens com até 20 anos de idade. Optou-se por selecionar esses participantes em função da idade, visando ter uma amostra que refletisse a variedade presente nas salas de aula da EJA. Foram observados melhores desempenhos por parte dos estudantes adultos e atribui-se essa diferença de desempenho ao maior comprometimento e empenho dos adultos, observado durante a realização das entrevistas clínicas.

O teste proposto continha oito problemas combinatórios, sendo duas situações-problema de cada tipo de situação combinatória – *produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação* – e 20 revisitações a esses problemas sob o olhar da Probabilidade, com problemas que exploram a compreensão das exigências cognitivas necessárias à compreensão da Probabilidade – *construção de espaço amostral, compreensão de aleatoriedade, comparação de probabilidades* e *investigação de correlações.*

Os participantes do estudo apresentaram melhor desempenho nos problemas combinatórios de *produto cartesiano* e obtiveram menor percentual de acertos nos problemas de *combinação*, resultado que corrobora com estudos anteriores como os relatados em Lima (2010) e em Borba, Rocha e Azevedo (2015), desenvolvidos com diferentes públicos (crianças, adolescentes, jovens e adultos e também professores).

Quanto às exigências cognitivas relacionadas à Probabilidade, os participantes apresentaram facilidade na compreensão do caráter aleatório dos eventos discutidos e na identificação de ausência de correlações, entretanto, basearam-se, frequentemente, apenas no número de casos favoráveis ao comparar probabilidades diferentes, apresentando assim desempenho bastante insatisfatório nos problemas que abordaram tal exigência cognitiva. Essa compreensão superficial da Probabilidade causada pela não utilização do raciocínio combinatório para levantamento de espaços amostrais de eventos independentes foi também observada nos estudos de Batista e Francisco (2015) – realizado com estudantes da EJA em módulos equivalentes ao 2º e ao 3º ano do Ensino Médio – e de Santos (2015) – cujo público alvo foi composto por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.

A escolarização formal demonstrou influenciar as representações simbólicas/estratégias utilizadas nos problemas combinatórios: os estudantes dos Módulos III e IV apresentaram maior sistematização nas listagens, obtendo mais sucesso em esgotar possibilidades, respeitando os *invariantes de ordem* e *escolha* dos diferentes problemas apresentados. Por outro lado, as dificuldades apresentadas pelos participantes de todos os módulos durante a resolução dos problemas de Probabilidade foram semelhantes. A maior dificuldade foi observada nos problemas de *comparação de probabilidades* e apenas um estudante do Módulo III chegou a considerar, em poucas ocasiões, a proporção para comparar probabilidades diferentes.

A partir do desenvolvimento do estudo piloto relatado, foi possível observar relações que se estabelecem entre o raciocínio combinatório e o probabilístico. Em especial, a exploração do *espaço amostral* proporcionou a descoberta de novas possibilidades nos problemas combinatórios, visto que o levantamento das possibilidades referentes a esses problemas permitiu que os participantes avaliassem os esquemas utilizados, tendo a chance de refletir sobre os invariantes de ordem e escolha de cada tipo de problema. Por outro lado, o sucesso nos problemas combinatórios pareceu facilitar a compreensão de situações de *aleatoriedade* e *correlações*, pois, para chegar a respostas corretas nos problemas de Combinatória, foi necessário desprender-se de preferências pessoais e pensar os problemas propostos de maneira diferente do raciocínio presente em situações cotidianas, nas quais essas preferências exercem grande influência nas escolhas realizadas. Assim, apresentar uma maneira de pensar própria do raciocínio combinatório proporcionou o uso de uma abordagem mais voltada à Matemática escolar durante a resolução dos problemas probabilísticos.

Desse modo, acredita-se, a partir dos resultados já obtidos, que a articulação do raciocínio combinatório e probabilístico pode beneficiar o desenvolvimento dos mesmos em estudantes da EJA. Foi possível perceber, assim, contribuições interessantes que surgem entre conhecimentos de Combinatória e Probabilidade através da resolução de problemas que permitem uma relação entre ambos os raciocínios e defende-se que a instrução escolar pode proporcionar o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do raciocínio probabilístico de maneira articulada, a partir da proposição de situações que explorem ambos os modos de raciocinar.

Referências

BATANERO, M. C.; GODINO, R. D.; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatorio**. Madrid: Síntesis. 1996.

BATISTA, R.; FRANCISCO, V. R. Noções probabilísticas de alunos da EJA. In: **Anais...** 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 4º SIPEMAT. Ilhéus, 2015.

BORBA, R. E.; ROCHA, C.; AZEVEDO, J. Estudos em raciocínio combinatório: investigações e práticas de ensino na educação básica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 53, p.1348-1368, 2015.

BRASIL. **Educação para jovens e adultos:** ensino fundamental: proposta curricular - 1º segmento. Brasília: MEC, 2001.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – Lei n. 9394/96**. Brasília, DF: MEC, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC / Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC / Secretaria de Ensino Fundamental, 1998.

BRASIL. **Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos**: segundo segmento do ensino fundamental: 5ª a 8ª série. v. 3. Brasília: MEC / Secretaria de Educação Fundamental, 2002.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's understanding of probability**: a literature review. Nuffield Foundation, 2012. Disponível em: <http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf>. Acesso em: 26 mai. 2016.

CARRAHER, T. N. **O método clínico usando os exames de Piaget.**5. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

FISCHBEIN, E. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children.** Dordrecht, 1975.

FONSECA, M.C. F. R. **Educação matemática de jovens e adultos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

GODINO, J.D.; BATANERO, M. C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad**. Madrid: Síntesis, 1991.

JANUARIO, G.; FREITAS, A.; LIMA, K. Pesquisas e documentos curriculares no âmbito da educação matemática de jovens e adultos. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, n. 49, p.536-556, 2014.

LIMA, P.; BATISTA, R. A Contribuição da Teoria dos Campos Conceituais às Pesquisas em Educação Matemática: Um Olhar sobre Estudos Realizados no EDUMATEC-UFPE. In: **Anais...** 14ª Conferência Interamericana de Educação Matemática – XIV CIAEM. México, 2015.

LIMA, R. de C. G. de. **O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos:** do início da escolarização até o ensino médio. (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Universidade Federal de Pernambuco). Recife, 2010.

MORGADO, A.; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J.; PINTO DE CARVALHO, P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, M. C.; GODINO, J. D. Razonamiento combinatorio em alumnos de secundaria. **Educación Matemática**, v.8, n. 1, p.26-39, 1996.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, M. K. Jovens e adultos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem. **Anped: Revista brasileira de educação,** n.12, p.59-73, 1999.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, v. 17, n. 31, p.105-150, 2009.

ROCHA, C. A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios:** diversos olhares, diferentes conhecimentos. (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Universidade Federal de Pernambuco). Recife, 2011.

SANTOS, J. **A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora**. (Tese. Pós-graduação em Educação – Universidade São Francisco). Itatiba, 2015.

SPIEGEL, M. **Probabilidade e estatística**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1978.

VEGA, D. A. **Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha:** produto cartesiano, arranjo, combinação, ou permutação? (Dissertação. Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Universidade Federal de Pernambuco). Recife, 2014.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas, Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v. 1, p.75-90, 1986.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUM, J. (org.). **Didactica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, p.155-191, 1996.

Recebido em: 26 de dezembro de 2017
Aprovado em: 28 de maio de 2018