

## **UM OLHAR SOBRE OS USOS DA LINGUAGEM POR ALUNOS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

Emerson Tortola\*  
Lourdes Maria Werle de Almeida\*\*

**Resumo:** Neste artigo investigamos como alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental lidam com a formulação, uso e validação de modelos matemáticos. Para isso, pautamo-nos em observações do filósofo Ludwig Wittgenstein, especialmente no que se refere aos ‘jogos de linguagem’, levando em conta não só os signos e as palavras, mas também a(s) ‘forma(s) de vida’ engajada(s) em uma determinada atividade. Neste contexto, recorreremos às suas considerações decorrentes da fase pós ‘virada linguística’ e analisamos atividades de modelagem desenvolvidas por alunos de um 4º ano do Ensino Fundamental. As análises, de cunho qualitativo interpretativo, foram realizadas sobre as falas, gestos e registros produzidos pelos alunos e indicam que, nos anos iniciais, os alunos têm procedimentos específicos para obter e validar modelos matemáticos, sendo a linguagem natural, os números, os desenhos, registros frequentemente utilizados na produção de seus modelos matemáticos.

**Palavras-Chave:** Modelagem Matemática. Linguagem. Anos iniciais do Ensino Fundamental.

## **A LOOK AT THE USE OF LANGUAGE BY STUDENTS OF THE EARLY YEARS OF ELEMENTARY SCHOOL IN MATHEMATICS MODELING ACTIVITIES**

**Abstract:** In this article, we investigate how students in the early years of Elementary School deal with the formulation, use and validation of mathematical models. For this, we are guided by philosophical observations of philosopher Ludwig Wittgenstein, especially with respect to ‘language games’, taking into account not only the signs and words, but also the ‘form(s) of life’ engaged in a particular activity. In this context, we turn to his considerations arising from the ‘linguistic turn’ post phase, analyzing the modeling activities developed by students of the 4<sup>th</sup> year of Elementary School. The analysis of qualitative interpretative nature was held on the speeches, gestures and records produced by the students and indicate that, in the early years, students have specific procedures to obtain and validate mathematical models, having natural language, numbers, drawings and records frequently used in the production of their mathematical models.

**Keywords:** Mathematical Modeling. Language. Early years of Elementary School.

### **Introdução**

A práxis da sala de aula revela um cenário em que professores e alunos estabelecem uma interação que vislumbra processos de ensino e de aprendizagem bem sucedidos. O sucesso nesses processos, entretanto, é complexo e vai para além da vontade de ensinar e de

aprender e tem uma estreita relação com a prática pedagógica implementada nas aulas.

No que diz respeito à matemática, uma alternativa que tem se consolidado no âmbito educacional é a modelagem matemática, que em linhas gerais consiste em uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não matemático (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Para Blum (2002), o ponto de partida de uma atividade de modelagem é uma situação do mundo real – seja ela associada à natureza, à sociedade ou à cultura, podendo ou não ter relação com a vida cotidiana ou com assuntos escolares; essa situação recebe uma abordagem matemática que contempla ações como estruturação da situação-problema, matematização, resolução e interpretação de resultados e validação.

Essa abordagem diz respeito a uma investigação que se faz sobre uma determinada situação-problema em termos de uma linguagem característica, e envolve, pois, o uso de símbolos, palavras e notações que denotam o uso de linguagem matemática. Esse uso desencadeia a produção de uma estrutura matemática utilizada para analisar e interpretar a situação e fornece subsídios para a resolução do problema em questão. Essa estrutura é referida em geral como modelo matemático e provê meios para descrever, explicar e prever o comportamento de fenômenos, por meio de uma linguagem que pode incluir desde a escrita de símbolos até o uso de diagramas e gráficos (DOERR; ENGLISH, 2003).

De modo geral, “atividades de modelagem matemática diferem dos habituais problemas que as crianças encontram nas aulas. Resolver problemas nos primeiros anos geralmente tem-se limitado a exemplos em que as crianças aplicam um procedimento conhecido ou seguem um percurso bem definido” (ENGLISH; WATTERS, 2005, p.60)<sup>1</sup>. Contudo, frequentemente, não é com esse tipo de problema que a criança se depara na vida fora da escola. Não estamos aqui questionando a importância desse tipo de problemas, mas chamando a atenção para que os problemas reais – exteriores ao ambiente escolar – nem sempre possuem um objetivo claro, bem definido. Na maioria das vezes, lidamos com situações em que os objetivos podem estar incompletos, ambíguos e até mesmo indefinidos, havendo a necessidade da busca por mais informações para se compreender o problema

---

<sup>1</sup> Tradução de: Mathematical modelling activities differ from the usual problems that young children meet in class. Problem solving in the early years has usually been limited to examples in which children apply a known procedure or follow a clearly defined pathway.

(ENGLISH; WATTERS, 2005).

A modelagem matemática, nesse contexto, desempenha um importante papel, pois coloca o aluno frente a situações autênticas que ele presencia, ou pode vir a presenciar em sua vida, e o leva a interpretá-las com o auxílio da matemática e, especificamente, fazendo uso da linguagem matemática.

Entretanto, a modelagem matemática nos primeiros anos escolares da Educação Básica possui características singulares, como o emprego da linguagem para lidar com a problemática e para produzir modelos matemáticos, aspecto que colocamos em discussão neste texto, a partir de uma perspectiva wittgensteiniana.

Ludwig Wittgenstein foi um filósofo que dedicou seus estudos principalmente à filosofia da linguagem – mas também com muitas contribuições para a filosofia da matemática. É ícone de um dos principais movimentos concernentes à filosofia da linguagem, a ‘virada linguística’, que demarca dois modos distintos de se olhar para a linguagem. O primeiro modo é associado a um olhar metafísico, lógico e referencial em que se busca uma relação direta entre linguagem e mundo para expressar ‘o que é linguagem’, sendo que o significado da linguagem, das palavras, é o objeto ao qual elas se referem. Em um segundo momento, pós virada linguística, Wittgenstein sugere que abandonemos esse olhar metafísico e passemos a olhar para ‘a linguagem em seu funcionamento’, pois é nos usos da linguagem, dentro de seus respectivos contextos, que identificamos seu(s) significado(s). Wittgenstein olhou para a linguagem sob essas duas perspectivas, sendo, geralmente, a primeira associada à sua obra *Tractatus Logico-philosophicus*, e a segunda associada ao livro *Investigações Filosóficas*, que aborda a questão do funcionamento da linguagem, do que ele denomina de ‘jogos de linguagem’. É sobre essa última perspectiva de Wittgenstein que pautamos nossas reflexões neste artigo.

Tratamos aqui, portanto, de alguns aspectos associados à modelagem matemática e à linguagem, como o uso do termo ‘modelo matemático’ e os ‘jogos de linguagem’ associados a ele visando apresentar reflexões sobre a questão: Como alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental lidam com a formulação, uso e validação de modelos matemáticos<sup>2</sup>? Nossas

---

<sup>2</sup> Essa questão de investigação é fruto de uma pesquisa de mestrado (TORTOLA, 2012), que aborda os usos que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental fazem da linguagem quando desenvolvem atividades de modelagem matemática, e cuja temática trazemos para discussão neste artigo.

argumentações estão fundamentadas na análise de atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos de um 4º ano do Ensino Fundamental e com idades entre 8 e 9 anos. Descrevemos no artigo uma dessas atividades como meio de ilustrar as análises realizadas e subsidiar nossas inferências e discussões.

### **Modelos matemáticos e Modelagem Matemática**

Uma das ações envolvidas em uma atividade de modelagem matemática, no âmbito da Educação Matemática, é a produção de um modelo matemático para a situação-problema sob investigação (BLUM, 2002; BASSANEZI, 2004; BARBOSA, 2009a; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Segundo Doerr e English (2003), um modelo matemático pode ser entendido como um sistema de elementos, operações, relações e regras, e pode ser utilizado para descrever, explicar ou prever o comportamento de algum outro sistema conhecido, associado a uma situação proveniente do mundo real (BLUM, 2002). Um modelo matemático envolve, portanto, o uso de linguagem matemática (D'AMBRÓSIO, 2009), que fornece ao modelador artifícios para analisar e interpretar dados provenientes da situação que ele se propõe a investigar. Dessa maneira, o modelo matemático pode ser utilizado para fornecer resultados e realizar previsões e, com os ajustes necessários, ser (re)utilizado em situações com características similares (DOERR; ENGLISH, 2003).

Como exemplos de modelos matemáticos podemos citar tabelas, gráficos, equações, figuras ou mesmo textos, se utilizados para os fins especificados (BARBOSA, 2009).

A produção de modelos envolve um procedimento em que são empreendidas ações como a busca por informações para a estruturação e compreensão da situação, problematização, seleção de variáveis, simplificação, levantamento de hipóteses, coleta de dados e matematização – uso da linguagem matemática para descrever a situação. Após a obtenção de um modelo, esse é submetido a métodos matemáticos para obter resultados, os quais são interpretados sob a ótica da situação original e, ao mesmo tempo, utilizados para validar o modelo matemático produzido. Essas ações podem ser retomadas e realizadas a qualquer momento, sempre que o modelador considerar necessário, e sem uma ordem previamente estabelecida.

Ao se obter um resultado considerado satisfatório em relação à situação-problema, a investigação realizada e os resultados obtidos devem ser comunicados (BLUM, 2002). No caso da sala de aula, quando os modeladores são os alunos, eles podem comunicar aos colegas suas estratégias utilizadas e resultados obtidos, bem como ao professor e demais membros da comunidade escolar (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) por meio de apresentações, seminários, rodas de conversa, feiras, exposições etc.

Uma atividade de modelagem matemática, no âmbito da Educação Matemática, configura-se, portanto, como uma abordagem matemática para uma situação-problema, isto é, “um procedimento criativo e interpretativo que faz uso ou estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar, com certo nível de fidelidade, características essenciais do fenômeno, indicando uma possível solução para um problema associado a esse fenômeno” (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015, p.3).

Fazer modelagem matemática sugere que os alunos desenvolvam autonomia no que diz respeito a compreender o problema, coletar dados, levantar hipóteses, fazer conjecturas, utilizar métodos matemáticos para resolver o problema e utilizar a linguagem matemática para expressar seus modelos e resultados.

Essa autonomia representa, portanto, um desafio e, muitas vezes, até um impedimento para a introdução da modelagem matemática nas aulas dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Uma razão para isso seria o repertório dos alunos no que se refere ao conhecimento de conteúdos da matemática bem como à linguagem a ela associada.

Seria, contudo, incoerente falar de uma ‘limitação’ de tal repertório, quando na verdade, alunos dos anos iniciais, ainda que conheçam pouca matemática, pois estão no início de sua jornada escolar, trazem consigo conhecimentos matemáticos produzidos antes mesmo de seu ingresso na escola e, assim como alunos de outros níveis de escolaridade, são os seus conhecimentos que eles utilizarão para investigar situações-problema. É nessa direção que English (2007) defende não apenas que a modelagem seja inserida nas aulas desde os primeiros anos escolares, mas afirma também uma necessidade dessa inserção, uma vez que, segundo a autora, os alunos dos anos iniciais têm capacidade para desenvolver seus próprios modelos e lidar com situações-problema, assim como a modelagem pode auxiliar o desenvolvimento de habilidades matemáticas que vão para além do estudo dos conteúdos, por exemplo, a autonomia no uso da matemática para resolver problemas.

O que muda nesse contexto é o uso da linguagem matemática, que deve ser aprendido de acordo com as regras convencionadas (TORTOLA, 2012). O papel do professor, de orientador, é indispensável nesse processo de aprendizagem de matemática e de sua linguagem.

Niss (1989), há mais de 20 anos tem apresentado argumentos para justificar a importância de se trabalhar com a modelagem matemática. Esses argumentos podem ser utilizados para apoiar a defesa de English (2007) do uso da modelagem matemática já nos primeiros anos escolares. São eles: 1) promover a criatividade e fomentar atitudes de resolução de problemas; 2) gerar, desenvolver e qualificar um potencial crítico para o uso de matemática em situações extramatemáticas; 3) preparar os alunos para praticar aplicações e modelagem, seja no presente ou no futuro; 4) estabelecer uma imagem de matemática equilibrada e representativa, em relação a suas características e papel no mundo; e 5) avaliar a aquisição e entendimento de conceitos, noções e métodos matemáticos.

Esses argumentos justificam a importância da inserção da modelagem nas práticas da sala de aula bem como indicam a necessidade do uso da linguagem matemática nas mais diversas situações – e aqui estamos nos referindo não apenas às situações com que os alunos podem se deparar na escola, mas também fora dela.

A matemática possui um importante papel na sociedade, em particular, por meio das representações matemáticas resultantes da modelagem matemática, ou seja, os modelos matemáticos (BARBOSA, 2009). De acordo com English (2007), a modelagem fornece oportunidades para as crianças trabalharem com sua própria matemática, sob seu ponto de vista de interpretação do problema. Os modelos produzidos por elas não serão menos sofisticados que os produzidos por alunos de séries posteriores, eles simplesmente serão produzidos a partir de diferentes usos da linguagem (TORTOLA, 2012). Esses usos podem ser revistos e aprimorados ao longo do tempo para cada vez mais aproximarem-se de situações que permeiam o mundo real.

Para Lesh e Lehrer (2003), uma característica dos modelos matemáticos é uma epistemologia de revisão e ajustes, uma vez que eles são inerentemente provisórios e desenvolvidos com propósitos específicos, em situações específicas. Os autores assinalam que há uma distinção entre modelo e mundo e essa não é meramente uma questão de identificar o símbolo certo para o objeto correspondente. “Em vez disso, depende intimamente da

acumulação de experiência e suas representações simbólicas durante o tempo” (LESH; LEHRER, 2003). Além disso, envolve a compreensão de que o modelo matemático não é a situação, mas uma das maneiras de expressar a situação na linguagem.

Neste ponto, buscamos na filosofia da linguagem, de Wittgenstein, subsídios para compreender os usos da linguagem pelos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental em atividades de modelagem matemática, baseando-nos, principalmente, em suas investigações filosóficas no que se refere à matemática.

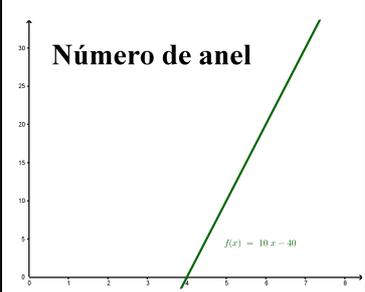
### **Sobre os usos da Linguagem**

Diferentes contextos evocam o uso de diferentes linguagens. Um técnico de computação, por exemplo, precisa dominar o uso da linguagem de programação para lidar com seus sistemas; um motorista precisa compreender a linguagem utilizada nas placas de trânsito para não cometer infrações e/ou provocar acidentes; um professor precisa estar atento à linguagem utilizada no contexto de sua disciplina a fim de conseguir se comunicar com seus alunos e proporcionar condições, pelo menos no que se refere a este aspecto, de compreensão dos alunos em relação ao que está pretendendo ensinar. No âmbito da matemática uma pluralidade de símbolos e representações caracterizam o uso de linguagem matemática – números, textos, gráficos, tabelas, equações etc. – e é por meio do uso dessa linguagem que conseguimos ter acesso aos objetos matemáticos e manipulá-los.

Para expressar, por exemplo, a relação entre o tamanho do dedo e o número de anel que lhe serve, podemos usar a linguagem matemática de diferentes formas. Podemos utilizar uma tabela, de modo que basta identificarmos em uma coluna a medida do comprimento do dedo e o número do anel estará indicado ao seu lado, na mesma linha; podemos utilizar um gráfico pictórico, o qual mostra a correspondência entre número de anel e tamanho do dedo, de acordo com suas medidas de comprimento; ou ainda uma expressão algébrica, na qual basta substituímos a variável pelo comprimento do dedo para determinar o número do anel. O Quadro 1 exemplifica algumas das várias maneiras de como a linguagem matemática pode ser utilizada para expressar tal relação e, como se pode observar, muitas delas podem ser

utilizadas por alunos dos anos iniciais<sup>3</sup>.

**Quadro 1:** Usos da linguagem matemática para expressar a relação ‘medida do dedo x número do anel’

Usos da linguagem matemática	Tabular		Gráfico (pictórico)				Algébrico
	Comprimento do dedo (cm)	Número do anel	10 5 cm	12 5,2 cm	14 5,4 cm	16 5,6 cm	$f(x) = 10x - 40$
	5	10					<b>Gráfico</b> 
	5,2	12	18 5,8 cm	20 6 cm	22 6,2 cm	24 6,4 cm	
	5,4	14					
	5,6	16					
	5,8	18					
	6	20					
	6,2	22					
	6,4	24					
	6,6	26	26 6,6 cm	28 6,8 cm	30 7 cm	32 7,2 cm	
	...	...					

Fonte: Dos autores.

O Quadro 1 indica ainda que podemos usar a linguagem de diferentes maneiras, seja para abordar um mesmo objeto matemático, ou para expressar objetos ou conceitos diferentes – utilizando os mesmos símbolos ou as mesmas palavras. É para essas questões, em particular, que Wittgenstein direciona seu olhar; sua preocupação não está em identificar o significado das palavras, ou signos da linguagem, buscando um uso ideal, mas em compreender e explicar como as palavras, os signos são significados a partir de seus usos – ou seja, a partir do ‘funcionamento’ da linguagem (WITTGENSTEIN, 2012, §5).

Para Wittgenstein (2010, §2), “o que é falado só pode ser explicado na linguagem e, portanto, nesse sentido, a própria linguagem não pode ser explicada. A linguagem deve falar por si mesma”. Se quisermos, por exemplo, compreender o significado da palavra ‘adição’, o caminho não é procurar o porquê de se usar a palavra ‘adição’ ao invés de outra palavra qualquer, mas avaliar os empregos da palavra ‘adição’ e a partir de seus usos compreender seu significado, pois, como coloca Wittgenstein (2012, §43), “o significado de uma palavra é seu uso na linguagem”, uso esse que Wittgenstein (2012, §7) denomina “jogo de linguagem”.

O termo ‘jogo de linguagem’ é proposto por Wittgenstein para se referir à “totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada”

<sup>3</sup> Essa relação entre comprimento do dedo e número do anel foi investigada pelos alunos participantes desta pesquisa em uma atividade de modelagem matemática. Mais informações sobre o desenvolvimento dessa atividade podem ser encontradas em Tortola (2012).

(WITTGENSTEIN, 2012, §7). Dessa forma, contar uma piada, declamar uma poesia, dar uma ordem, fazer um cálculo etc. são, de acordo com Wittgenstein (2012), exemplos de jogos de linguagem, pois o que caracteriza esses contextos não é a ‘palavra’ proferida, mas a maneira, o momento, a quem elas são dirigidas. O jogo de linguagem determina o modo como devemos agir e nos comunicar, delimita o que é pertinente e o que não é em um determinado contexto. Estabelece, dessa maneira, regras de uso, regras que não podem ser ignoradas caso você participe do jogo de linguagem.

A linguagem é, portanto, plural, cujos usos se entrelaçam e se entrecruzam em uma trama de significados. É manifesta sob diferentes tipos, linguagem matemática, linguagem dos computadores, linguagem dos sinais etc., que nada mais são do que alguns exemplos dos jogos de linguagem a que Wittgenstein (2012) se refere. É importante observar que o autor assinala que dentro de um jogo de linguagem podem existir diferentes atividades que podem se constituir também como jogos de linguagem, isto é, assim como a linguagem matemática pode ser encarada como um jogo de linguagem, somar, subtrair, resolver uma equação, esboçar um gráfico etc. também podem, pois envolvem um conjunto de regras que delimitam atividades e indicam maneiras de agir, sendo essas atividades constituintes da atividade matemática. Isso revela uma dinamicidade e até uma complexidade no que Wittgenstein chama de “totalidade formada pela linguagem” e no modo como ela deve ser encarada.

Para que essa ideia fique clara, vamos pensar em um exemplo. Olhemos para o uso do símbolo  $\times$ . Esse símbolo, no âmbito da aritmética, expressa uma multiplicação entre dois números. Já no âmbito da geometria analítica, esse mesmo símbolo expressa um produto vetorial entre dois vetores. Embora ambos os usos refiram-se a produtos, os contextos, as atividades entrelaçadas e as regras que regulamentam seus usos são distintos em cada caso e, por isso, poderíamos dizer, em cada jogo de linguagem.

Poder-se-ia então questionar como interpretar o significado de tal signo (ou palavra). Como saber qual o significado envolvido no uso, a qual jogo de linguagem esse uso se refere? Wittgenstein (2012, §23) argumenta que a expressão ‘jogo de linguagem’ deve salientar que “falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida”. Ou seja, os jogos de linguagem estão imersos dentro de uma prática, que envolve crenças, cultura, hábitos e atividades associadas à linguagem (WITTGENSTEIN, 2012). Envolve os sujeitos e o contexto de uso da linguagem. É a forma de vida que regulamenta os usos da linguagem e

determina suas regras de uso.

Assim como na língua portuguesa – ou inglesa, francesa etc. – em que há toda uma gramática envolvida, com regras de uso e normas a se respeitar, ocorre também em outras linguagens quaisquer, incluindo-se aí a linguagem matemática. Há regras de uso que precisam ser respeitadas, regras que normatizam o significado de uma palavra, ou de um símbolo, dentro do jogo de linguagem, de modo que esse significado possa ser compreendido e compartilhado por todos da forma de vida envolvida no jogo. A esse conjunto de regras Wittgenstein (2012, §496) denomina de ‘gramática’. “A aritmética [por exemplo] é a gramática dos números. Os tipos de números só podem ser distinguidos pelas regras aritméticas que se referem a eles” (WITTGENSTEIN, 2005, §108).

Vamos, agora, tomar como exemplo o termo ‘modelo matemático’ para ilustrar essas ideias de Wittgenstein. Há, no âmbito da modelagem matemática, diferentes entendimentos sobre o que constitui um modelo matemático bem como sobre a sua construção. Alguns defendem a não obrigatoriedade de se produzir um modelo matemático durante uma atividade de modelagem, quando desenvolvida em sala de aula; outros veem no modelo matemático um dos objetivos principais da atividade de modelagem (LUNA; SOUZA; SANTIAGO, 2009). Contrapondo esses dois pontos de vista, observamos evidências do fenômeno que Wittgenstein denomina de forma de vida. Os modos como os envolvidos em cada contexto encaram e lidam com o modelo matemático diferem-se a tal ponto de evocar interpretações distintas para o uso desse termo e diferentes regras de uso. Delimitam ainda as representações sob as quais podem ser expressas as relações observadas na situação-problema, o que origina perguntas como: tabelas, gráficos, desenhos podem ser entendidos como modelos matemáticos?

Consideramos, por exemplo, que a produção de um modelo matemático é uma ação que faz parte do procedimento associado a uma atividade de modelagem matemática e, portanto, não deve ser deixada de fora, ainda que a atividade seja desenvolvida por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, e sua importância deve ser compartilhada com as demais ações. Em outras palavras, a aprendizagem matemática dos alunos não está condicionada à produção de modelos matemáticos. Contudo, considerando que eles têm condições de produzir seus próprios modelos (ENGLISH, 2007), essa é uma ação oportuna para que coloquem em prática o que já conhecem e aprendam novos usos da linguagem

matemática, como é o caso da linguagem natural<sup>4</sup>. Esse tipo de linguagem, da forma como é utilizado, é tão matemático quanto um gráfico ou uma expressão algébrica. Seria ingenuidade esperar que os modelos dos alunos dos anos iniciais fossem construídos usando esse tipo de linguagem, uma vez que eles ainda não as conhecem.

Os entendimentos de modelo matemático no contexto da Educação Matemática e no contexto da Matemática Aplicada, por exemplo, são diferentes. São diferentes os propósitos com os quais atividades de modelagem matemática são desenvolvidas nesses contextos, enquanto na primeira os alunos estão interessados em aprender, a segunda está mais associada à resolução de problemas e, desse modo, o uso do “modelo matemático” em cada contexto caracteriza jogos de linguagem distintos.

Olhando em particular para o entendimento de modelo matemático no jogo de linguagem referente ao contexto educacional, observamos que o “peso” da produção de um modelo matemático é compartilhado por outros momentos que são considerados igualmente importantes, como destacam Luna, Souza e Santiago (2009). É sob essa perspectiva de jogos de linguagem que encaminhamos as atividades de modelagem matemática desta pesquisa.

### Aspectos metodológicos e contexto da pesquisa

As atividades que aqui apresentamos foram desenvolvidas no contexto de uma pesquisa de mestrado, que envolveu 36 alunos de um 4º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 8 e 9 anos, de uma escola pública e municipal do norte do Paraná. Sete atividades foram desenvolvidas pelos alunos, cujo tema e objetivos são especificados no Quadro 2.

**Quadro 2:** Atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas

Momento	Atividade	Tema	Problemática/objetivo
1º	1	Tamanho do anel	Determinar o tamanho do anel a partir da medida do dedo de uma pessoa
	2	Área da sala de aula	Calcular a área da sala de aula destinada a cada aluno
2º	3	Energia elétrica	Estipular os gastos com energia elétrica para assistir um desenho e para tomar um banho
	4	Beleza	Estudar a beleza matemática por meio das relações

<sup>4</sup> Consideramos como linguagem natural aquela que o aluno aprende já no início de sua vida e que usamos para nos comunicar. É geralmente expressa na forma de textos escritos ou de declarações verbais, pois, embora a linguagem seja uma criação humana, é natural dentro de nossa cultura que os sujeitos aprendam a se comunicar e a expressar seus pensamentos por meio desse tipo de linguagem.

		matemática	áreas no corpo humano
3º	5	Câmbio dólar-real	Compreender o câmbio entre as moedas dólar e real
	6	Caixas d'água	Escolher uma caixa d'água cuja capacidade seja mais adequada ao número de pessoas de uma casa
	7	Higienização com flúor	Calcular os gastos com flúor que é utilizado semanalmente na higienização bucal dos alunos

Fonte: Dos autores.

Para o desenvolvimento das atividades, os alunos foram organizados em grupos e as atividades foram propostas em consonância com os três momentos sugeridos por Almeida e Dias (2004). Essas autoras defendem a inserção gradual de atividades de modelagem matemática em sala de aula, de modo que os alunos possam se familiarizar com o 'fazer modelagem'. Para isso, o professor confere aos alunos mais autonomia, conforme propõe as atividades do momento 1 ao 3, passando de atividades mais estruturadas para atividades mais abertas, sendo que no primeiro momento o professor fornece os dados para a situação e no terceiro, os alunos são responsáveis por todo o processo de modelagem, sob a orientação do professor. Considerando estes momentos, para nossa pesquisa os dados foram coletados por meio de gravações em áudio e vídeo e incluem registros escritos produzidos pelos alunos.

A condução das análises é orientada por uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo, em que os dados são analisados a partir de observações diretas dos sujeitos e dos registros produzidos durante as atividades de modelagem, e é inspirada nos procedimentos da análise de conteúdo.

Os dados foram inicialmente submetidos a uma análise específica, em que o desenvolvimento de cada atividade e as informações associadas a elas foram descritas detalhadamente. A partir dessa descrição buscamos evidenciar os usos que os alunos fizeram da linguagem em cada parte do procedimento envolvido na atividade de modelagem. Esses usos foram esquematizados e, posteriormente, submetidos a uma nova análise, mais geral e mais abrangente, a qual chamamos de análise global, olhando nesse momento para o todo constituído pelas sete atividades (TORTOLA, 2012).

O que apresentamos neste artigo são os resultados dessas análises, apresentando algumas informações acerca das atividades desenvolvidas pelos alunos e ilustrando com uma dessas atividades o movimento das análises.

## **Os modelos matemáticos produzidos: um olhar sobre a linguagem dos alunos**

Para começar nossa reflexão a respeito da linguagem utilizada pelos alunos em atividades de modelagem matemática, vamos apresentar uma análise específica da atividade ‘qual caixa d’água comprar?’.

Essa atividade foi desenvolvida por um grupo de 8 alunos da turma e caracteriza o terceiro momento de familiarização dos alunos com a modelagem matemática (ALMEIDA; DIAS, 2004). Portanto, apesar de não ser a primeira atividade de modelagem matemática dos alunos, ela foi a primeira cujo encaminhamento estava, sobretudo, sob sua responsabilidade.

O tema surgiu do desejo do grupo em estudar o tema água e, em meio às discussões, um dos alunos revelou sua curiosidade em saber como determinar qual o tamanho de caixa d’água comprar para sua residência. A questão interessou também os demais integrantes do grupo, tornando-se então o problema da atividade de modelagem. Mediante a forma como o problema foi delineado, os alunos não sabiam de antemão quais conteúdos matemáticos poderiam surgir. Contudo, assim como Barbosa (2009), enxergamos nessa situação uma possibilidade para que os alunos possam produzir seus próprios caminhos, uma vez que a modelagem fornece oportunidades para os alunos trabalharem com “sua própria matemática”, sob seu ponto de vista de interpretação do problema (ENGLISH, 2007).

Porém, definir qual matemática usar para resolver o problema não é tão simples, principalmente, quando levamos em conta que “atividades de modelagem matemática diferem dos habituais problemas que os alunos encontram nas aulas” (ENGLISH; WATTERS, 2005, p. 60). O diálogo nesse momento se torna fundamental e a linguagem vem para suprir tal necessidade. Ela funciona como um indicativo da compreensão do aluno para com a situação, inserindo-o no que podemos chamar de forma de vida do fenômeno (WITTGENSTEIN, 2012), isto é, faz com que o aluno tente entender o problema sob a ótica da situação, o que podemos inferir a partir de declarações como: “*Quando acaba a água de lá da casa da minha avó, ela tem água na caixa*”, “*Eu estava falando dos metros cúbicos, daí eu lembrei da água*” e “*Dentro de uma caixa aqui cabe quanto [de água]?*”.

Consideramos esse uso da linguagem como um primeiro indicativo de que os alunos estão se engajando na prática dessa atividade de modelagem matemática e começando a jogar o jogo de linguagem associado a ela, já que um jogo de linguagem não diz respeito apenas aos

usos das palavras, mas também à “totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada” (WITTGENSTEIN, 2012, §7). Ou seja, assim como cita Wittgenstein (2012) que cantar, fofocar, encenar etc. são jogos de linguagem, consideramos o fazer modelagem como mais um exemplo.

Desse modo, inseridos nesse jogo, o próximo passo dos alunos foi buscar por informações: “*Espera aí, estou procurando quantos litros cabem em uma caixa d’água*” foi a afirmação de um aluno captada da gravação em áudio das ações do grupo de alunos. Para isso, eles tinham disponíveis computadores com internet, os quais eles utilizaram para realizar suas buscas. Nesse momento, o uso da linguagem ainda está associado à situação, porém, desta vez, os alunos buscaram por informações que lhes fossem úteis para a solução do problema e que os remeteram à definição de duas hipóteses:  $H_1$ : O consumo de água em uma residência é de 150 litros por pessoa e  $H_2$ : A água dos reservatórios deve ser suficiente para suprir dois dias de consumo em uma residência.

Embora as hipóteses tenham sido formuladas e apontadas pelos alunos, eles não apresentaram a preocupação de identificá-las em seus registros, e, por esse motivo, elas aparecem entre as informações coletadas por eles. Além disso, as variáveis: ‘número de pessoas’ e ‘capacidade da caixa d’água’ foram apenas identificadas pelos alunos e não definidas a partir do uso de símbolos – linguagem algébrica. Essa identificação foi realizada verbalmente pelos alunos: “*Porque se a gente... por dia a gente usa 150 litros, [...] então a gente faz vezes o tanto de pessoas que tem em nossa casa*”. O uso da linguagem natural para expressar tanto as hipóteses quanto as variáveis, mostra que os alunos começaram a encaminhar a atividade a usos da linguagem matemática, em que operações matemáticas foram realizadas para encontrar uma solução para o problema. A linguagem numérica e a linguagem natural foram utilizadas para produzir o modelo matemático para a situação, nesse caso, expresso por meio das operações matemáticas e das falas dos alunos (ver Quadro 3 adiante).

Visto sob a perspectiva de Wittgenstein, a produção desse modelo satisfaz às regras do jogo de linguagem associado à atividade de modelagem matemática, que mediante sua gramática atende à definição de modelo matemático que assumimos – um modelo matemático pode ser entendido como um sistema de elementos, operações, relações e regras, e pode ser utilizado para descrever, explicar ou prever o comportamento de algum outro sistema

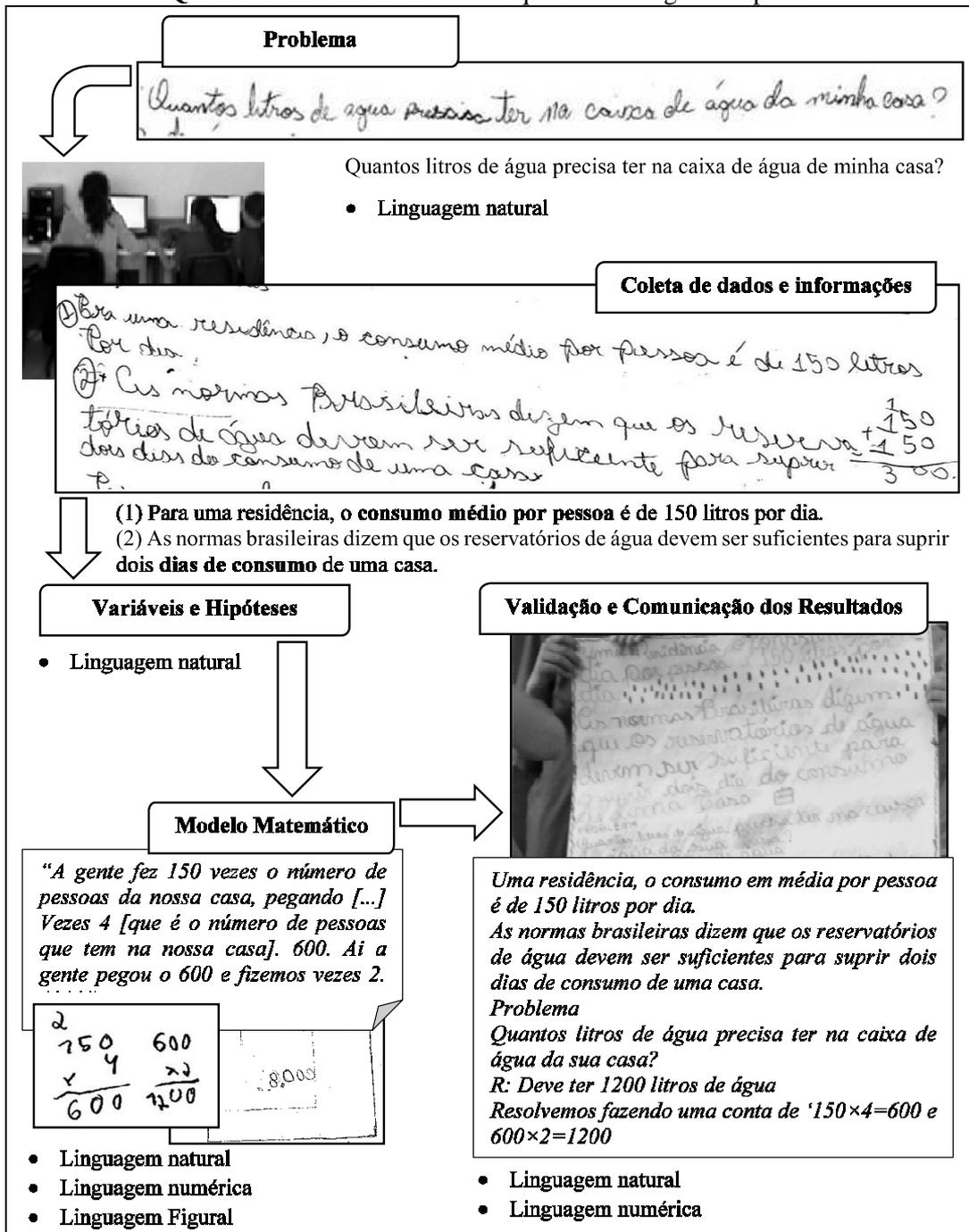
conhecido (DOERR; ENGLISH, 2003). No caso da atividade em questão, as operações e a linguagem natural constituem o sistema usado pelos alunos para descrever outro sistema, o do fenômeno associado às caixas d'água e suas capacidades.

Os resultados dessa atividade foram comunicados, conforme sugerem Blum (2002) e Almeida, Silva e Vertuan (2012), por meio de um seminário, no qual os alunos apresentaram aos colegas a investigação realizada.

O Quadro 3 apresenta uma síntese da atividade e indica os usos da linguagem que emergiram durante seu desenvolvimento, segundo o caminhar dos alunos.



**Quadro 3: Síntese da atividade ‘qual caixa d’água comprar?’**



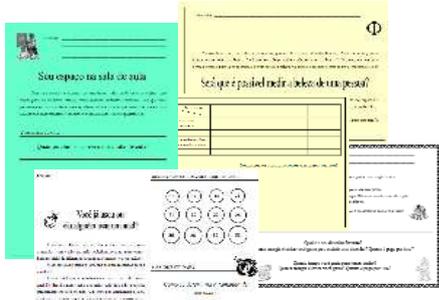
Fonte: Dos autores.

A análise dessa atividade sinaliza algumas questões que são evidenciadas também ao analisar outras atividades. Na sequência apresentamos os principais resultados da análise global realizada sobre as sete atividades de modelagem desenvolvidas pelos alunos.

Ao longo do desenvolvimento das atividades de modelagem, os alunos lidaram com diferentes usos da linguagem e, conforme esses usos foram se delineando, soluções para as respectivas situações-problema foram emergindo. Em linhas gerais, podemos dizer que atividades de modelagem matemática colocam os alunos em contato com pelo menos dois tipos de linguagem: a do fenômeno sob investigação e a matemática. Tal inferência pauta-se também na definição de modelagem com que trabalhamos.

Ainda que o curso do modelador, segundo Lamon (2003), não possa ser prescrito de antemão, existem algumas ações, um procedimento, que ele coloca em prática quando trabalha com atividades de modelagem. Esse procedimento está, sobretudo, associado à linguagem. Em primeiro lugar, os alunos precisam se familiarizar com o fenômeno, compreender o problema. O Quadro 4 indica os meios utilizados pelos alunos para a coleta de dados e informações para os problemas.

**Quadro 4:** Meios utilizados para coleta de informações

Informações fornecidas pelo professor <sup>5</sup>	Faturas de energia elétrica	Instrumentos de medida
		
<b>Entrevista</b>	<b>Internet</b>	
<p><i>Estudante 5: Quantos alunos têm no colégio?</i>  <i>Diretora: alunos nós temos 179. [...] [só que] o flúor não são esses alunos todos que fazem...</i>  <i>Professor: Quantos alunos será que fazem professora?</i>  <i>Diretora: 155 fazem o flúor [...] Tá, agora vocês vão perguntar pra mim por que esses outros aí que sobraram não fazem flúor, por que será? [...] Quantos alunos sobraram?</i>  <i>Estudante 20: 155.</i>  <i>Diretora: Não, dos 179...</i>  <i>Estudante 7: menos 155.</i></p>		

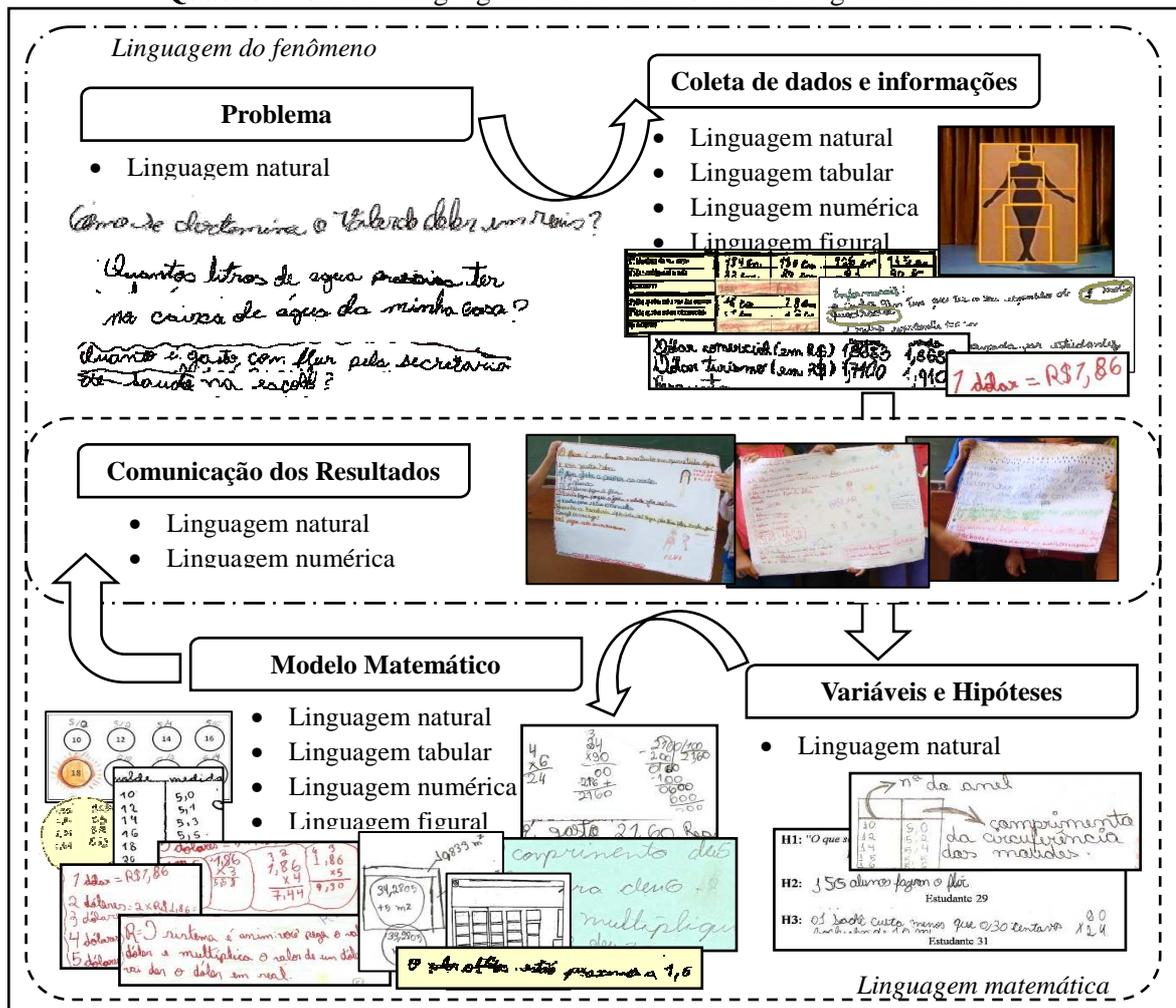
Fonte: Dos autores.

<sup>5</sup> As folhas com as informações disponibilizadas aos alunos, podem ser encontradas em Tortola (2012), na seção dos Apêndices.

Ao buscar por informações, os alunos se depararam com várias formas de manifestação da linguagem, encontrando dados em textos, tabelas, relações numéricas, vídeos, imagens etc. Essas informações lhes forneceram uma visão geral dos fenômenos e auxiliaram na compreensão das situações. A linguagem natural foi também utilizada para apresentar as hipóteses e selecionar as variáveis, abrindo o caminho para uso da linguagem matemática e para a produção dos modelos, como sugere o Quadro 3, no caso da atividade ‘qual caixa d’água comprar?’.

O Quadro 5 apresenta uma síntese da atividade de modelagem matemática e dos usos da linguagem pelos alunos ao longo das sete atividades. Indica a quantidade de informações, usos da linguagem e conteúdos matemáticos mobilizados nos estudos desenvolvidos.

**Quadro 5:** Usos da linguagem nas atividades de modelagem matemática



Fonte: Dos autores.

O Quadro 5 nos leva a inferir que os usos da linguagem estão intimamente associados ao desenvolvimento da atividade, sendo que os usos da linguagem orientam o caminhar dos alunos pela atividade e, reciprocamente, o desenvolvimento da atividade orienta os usos da linguagem, de acordo com os sujeitos envolvidos.

A influência da forma de vida é evidenciada quando olhamos, em particular, para a seleção de variáveis e a produção dos modelos. No primeiro caso, é frequente o uso na literatura de linguagem algébrica para expressar as variáveis, contudo, os alunos em questão ainda não conheciam esse tipo de linguagem matemática e esse procedimento teve de ser realizado a partir de usos da linguagem natural. Em relação ao segundo caso, os modelos matemáticos, diferentes usos da linguagem surgiram: tabular, natural, figural e numérica. Novamente os alunos se veem diante de conteúdos de séries posteriores e necessitam pensar em maneiras para abordar tais situações, com conteúdos que condizem com sua forma de vida e por meio de usos da linguagem conhecidos ou que eles têm condições de aprender.

O problema da atividade ‘qual caixa d’água comprar?’, bem como os problemas das atividades ‘tamanho do anel’ e ‘câmbio dólar-real’, por exemplo, poderiam ser solucionados com o uso de funções afim, assim como a atividade ‘higienização com flúor’ com uma função menor inteiro. Todavia, isso não impediu a produção dos modelos matemáticos pelos alunos dos anos iniciais.

No caso da atividade ‘tamanho do anel’, eles mediram a circunferência dos moldes de anéis e construíram uma tabela relacionando a medida do dedo e o número do molde correspondente.

Na atividade câmbio dólar-real, uma sequência de multiplicações foi suficiente para que os alunos observassem a regularidade da situação, e por meio de linguagem natural, escrevessem uma generalização explicando como se dava a conversão.

E, por fim, a função menor inteiro, da atividade higienização com flúor, foi substituída por uma sequência de operações elementares que solucionaram o problema e determinaram o custo da higienização com flúor por um período de 6 meses.

Assim foi também com a atividade ‘qual caixa d’água comprar?’ (Quadro 3). O uso da linguagem natural veio para complementar os modelos, no sentido de fornecer uma explicação ou descrever uma relação.



O Quadro 6 apresenta alguns modelos matemáticos produzidos pelos alunos para a situação da caixa d'água.

**Quadro 6:** Modelos matemáticos para as atividades 1, 5 e 7

Tamanho do anel		<p>Olhar a medida do dedo e depois consultar a tabela de tamanho de anéis, mas cada pessoa tem o dedo com sua medida</p>													
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>valor</th> <th>medida</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>10</td><td>5,0</td></tr> <tr><td>12</td><td>5,1</td></tr> <tr><td>14</td><td>5,3</td></tr> <tr><td>16</td><td>5,5</td></tr> <tr><td>18</td><td>5,6</td></tr> <tr><td>20</td><td>5,8</td></tr> </tbody> </table>	valor	medida	10	5,0	12	5,1	14	5,3	16	5,5	18	5,6	20	5,8
valor	medida														
10	5,0														
12	5,1														
14	5,3														
16	5,5														
18	5,6														
20	5,8														
Câmbio dólar-real	<p>1 dólar = R\$ 1,86                  2 dólares = 2 x R\$ 1,86 =                  3 dólares = 3 x R\$ 1,86 =                  4 dólares = 4 x R\$ 1,86 =                  5 dólares = 5 x R\$ 1,86 =</p>	<p>O sistema é assim: você pega o valor do dólar e multiplica o valor de um dólar, e vai dar o dólar em real.</p>													
		<p><u>é gasto 21,60 Reais</u></p>													
Higienização com Flúor		<p><u>é gasto 21,60 Reais</u></p>													

Fonte: Dos autores.

E, se ainda assim, mediante essa pluralidade de usos possíveis, a indagação de qual é o

melhor modelo surgir, Velten (2009, p.4)<sup>6</sup> responde categoricamente a essa questão: “o melhor modelo é o modelo mais simples que ainda serve o seu propósito, isto é, que ainda é complexo o suficiente para nos ajudar a entender um sistema e para resolver problemas”.

### **Considerações Finais: reflexões pautadas nos usos da linguagem**

Buscamos com este artigo apontar reflexões sobre a questão: Como alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental lidam com a formulação, uso e validação de modelos matemáticos?

Olhar para as atividades de modelagem matemática, desenvolvidas pelos alunos de um 4º ano do Ensino Fundamental, revelou que atividades dessa natureza envolvem pelo menos dois tipos de linguagem, a linguagem do fenômeno sob investigação e a linguagem matemática, utilizada para interpretar e analisar tal fenômeno. Além disso, o uso da linguagem matemática se deu por meio de várias representações: tabelas, listas, figuras, expressões numéricas e operações, textos escritos, gestos etc.

O significado atribuído ao termo ‘modelo matemático’, quando colocamos em questão atividades desenvolvidas por alunos dos primeiros anos escolares, parece estar em consonância com o jogo de linguagem em vigência na literatura sobre modelagem matemática. O que muda em comparação com outros níveis de escolaridade é o uso da linguagem matemática para tratar a situação e expressar os modelos matemáticos. Isso se justifica, segundo os pressupostos de Wittgenstein, pela forma de vida envolvida, da qual chamamos atenção para o contexto em que os alunos estão inseridos, os usos da linguagem, os conteúdos matemáticos em estudo e a visão de matemática que eles trazem consigo.

Ainda que a forma de vida dos alunos dos primeiros anos escolares leve-os a utilizar uma linguagem com pouca simbologia, a análise que realizamos dos registros dos alunos indica que ainda assim esses registros estão associados aos conteúdos matemáticos evocados pelas situações. Assim, os modelos construídos e avaliados por esses alunos guardam com outros modelos, que poderiam ser produzidos a partir de outros usos da linguagem matemática, uma rede de semelhanças – as semelhanças de família caracterizadas por

---

<sup>6</sup> Tradução de: The best model is the simplest model that still serves its purpose, that is, which is still complex enough to help us understand a system and to solve problems.

Wittgenstein.

#### Notas:

\*Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo (UTFPR) e Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). E-mail: emersontortola@hotmail.com.

\*\*Professora Doutora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). E-mail: lourdes@uel.br.

#### Referências

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais...** Pirenópolis: SBEM, 2015.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **A modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BARBOSA, J. C. Integrando modelagem matemática nas práticas pedagógicas. **Educação Matemática em Revista**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 14, n. 26, p. 17-25, mar. 2009.

BARBOSA, J. C. Modelagem e modelos matemáticos na Educação Científica. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 69-85, jul. 2009a.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BLUM, W. et al. ICMI 14: Applications and modelling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**, v. 51, p. 149-171, 2002.

D'AMBRÓSIO, U. Mathematical modeling: cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. **Journal of mathematical modelling and application**, Blumenau, v. 1, n. 1, p.89-98, 2009.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 34, n. 2, p. 110-136, 2003.

ENGLISH, L. D. Interdisciplinary modelling in the primary mathematics curriculum. In: WATSON, J.; BESWICK, K. (Eds.). **Mathematics: Essential Research, essential Practice**. Proceedings of the 30<sup>th</sup> annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. MERGA, 2007.

ENGLISH, L. D.; WATTERS, J. J. Mathematical modelling in the early school years. **Mathematics Education Research Journal**, v. 16, n. 3, p. 58-79, 2005.

LAMON, S. J. Modelling in elementary school: helping young students to see the world mathematically. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Eds.). **Mathematical Modelling: A way of life**. Chichester: Horwood Publishing, 2003. p. 19-33.

LESH, R.; LEHRER, R. Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 5, n. 2&3, Lawrence Erlbaum Associates, p. 109-129, 2003.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G.; SANTIAGO, A. R. C. M. A modelagem nas séries iniciais: o germém da criticidade. **Alexandria**, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, p. 135-157, jul. 2009.

NISS, M. Aims and scope of mathematical modelling in mathematics curricula. In: BLUM, W.; BERRY, J.; BIEHLER, R.; HUNTLEY, I.; KAISER-MESSMER, R.; PROFKE, K. (Eds.). **Applications and modelling in learning and teaching mathematics**. Chichester: Ellis Horwood, 1989. p. 22-31.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

VELTEN, K. **Mathematical modeling and simulation**: introduction for scientists and engineers. Weinheim: WILEY-VCH Verlag, 2009.

WITTGENSTEIN, L. J. J. **Investigações filosóficas**. 7. ed. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Editora Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2012. Tradução de: Philosophische Untersuchungen.

WITTGENSTEIN, L. J. J. **Gramática filosófica**. 2. ed. Tradução de Luís Carlos Borges. São Paulo: Edições Loyola, 2010. Tradução de: Philosophical Grammar.

WITTGENSTEIN, L. J. J. **Observações filosóficas**. Tradução de Adail Sobral e Maria Stela Gonçalves. São Paulo: Edições Loyola, 2005. Tradução de: Philosophical Remarks.