

## **DO PARADIGMA PITAGÓRICO AO PARADIGMA EUCLIDIANO: UM ESTUDO HISTÓRICO SOB A ÓTICA EPISTEMOLÓGICA KUHNIANA**

João Henrique Lorin\*  
Clélia Maria Ignatius Nogueira\*\*

**Resumo:** Este artigo relata uma pesquisa que teve como objeto de estudo a análise da constituição das medidas de grandezas incomensuráveis - ou números irracionais - à luz da teoria da ciência elaborada por Thomas Kuhn. O problema se delimitou na compreensão da constituição do paradigma pitagórico e do paradigma euclidiano. O principal objetivo deste trabalho foi identificar se a descoberta das medidas de grandezas incomensuráveis causou ruptura no desenvolvimento da ciência matemática, identificando na elaboração histórica deste conhecimento uma descontinuidade no processo de construção do conhecimento matemático. Como resultado, obtivemos que a teoria kuhniana pode ser aplicada em seus aspectos centrais ao estudo histórico e epistemológico da matemática, em específico, na mudança da matemática pitagórica para a geometria euclidiana.

**Palavras-chave:** Números Irracionais. Grandezas incomensuráveis. Paradigmas. Revolução científica.

## **FROM THE PYTHAGOREAN PARADIGM TO PARADIGM EUCLIDEAN: A HISTORICAL STUDY FROM THE STANDPOINT KUHN'S EPISTEMOLOGICAL**

**Abstract:** This article reports on research that had as its object of study to analyze the constitution of measures to incommensurable magnitudes - or irrational numbers - in the light of science theory elaborated by Thomas Kuhn. The problem was limited in understanding the constitution of the Pythagorean paradigm and the paradigm Euclidean. The main objective of this study was to identify whether the discovery of measures to incommensurable magnitudes caused disruption in the development of mathematical science, identifying the historical elaboration of this knowledge a discontinuity in the construction of mathematical knowledge. As a result, we found that the theory can be applied in kuhniana aspects central to the epistemological and historical study of mathematics, in particular, in changing the Pythagorean mathematics to Euclidean geometry.

**Keywords:** Irrational numbers. Incommensurable magnitudes. Paradigms. Scientific revolution.

### **Introdução**

Na comunidade matemática, a representação de continuidade na constituição do conhecimento pode ser dada pela metáfora dos tijolos sobrepostos, formando a parede do conhecimento matemático, sendo que cada tijolo representa uma parte do conhecimento acumulado com o passar do tempo. Essa ideia geralmente se sobrepõe a qualquer visão

epistemológica que possa contrariar tal crença. Kuhn (2007) caracteriza esse modo de desenvolvimento científico cumulativo como desenvolvimento científico normal, para o autor, “A ciência normal é aquela que produz os tijolos que a pesquisa científica está sempre adicionando ao crescente acervo de conhecimento científico” (KUHN, 2007, p.23).

Admitindo, portanto, a aplicação da teoria kuhniana ao desenvolvimento da matemática, é legítimo supor que conceitos ou teorias matemáticas também apresentem rupturas no sentido kuhniano em sua constituição. Analisando a história da matemática, julgamos que no período de desenvolvimento da matemática grega, especificamente a passagem da matemática pitagórica, baseada numa aritmética dos números inteiros, para a matemática desenvolvida a partir da escola platônica, baseada na construção por régua e compassos e difundida pelos *Elementos* de Euclides, podem ser constatadas todas as etapas estabelecidas pela epistemologia kuhniana para que haja uma revolução científica, ou seja, a constituição de um paradigma, chamado de paradigma pitagórico, o surgimento de anomalias, ciências extraordinárias e o nascimento de um novo paradigma, que chamaremos de paradigma euclidiano.

No presente trabalho, o objetivo é a análise, fundamentada pela teoria kuhniana, das consequências no desenvolvimento da matemática, causadas pela constatação dos pitagóricos de que nem sempre é possível a representação de duas grandezas por um par de inteiros<sup>1</sup>, da qual advêm os números irracionais. Dito de outra forma: investigar se a passagem da matemática produzida pelos pitagóricos para a geometria euclidiana apresenta rupturas, no sentido dado pela teoria de Thomas S. Kuhn, a exemplo do que foi identificado por Gilli Martins<sup>2</sup> (2005) quando analisa o desenvolvimento do primeiro período de pesquisa normal da álgebra. Essa tarefa se traduziu, portanto, em identificar e descrever, no desenvolvimento histórico da matemática grega - que vai aproximadamente do século V a.C. com o surgimento da escola pitagórica até o século IV a.C. com a elaboração da teoria das proporções, o método da exaustão, ambos de Eudoxo e o

---

<sup>1</sup> Este problema é geralmente apresentado fazendo a relação da medida do lado de um quadrado com a medida de sua diagonal.

<sup>2</sup> Em sua tese de doutorado intitulada “Sobre Revoluções Científicas na Matemática”, Gilli Martins mostra uma mudança paradigmática no desenvolvimento da matemática, mais especificamente na Álgebra.

*Órganon* de Aristóteles - as etapas estabelecidas na teoria de Thomas Kuhn no processo de construção do conhecimento matemático.

### **Um breve esboço da teoria kuhniana**

Kuhn (2007) afirma que a história apresenta um papel fundamental na construção e compreensão da ciência. Todavia, a maioria dos cientistas utiliza apenas “anedotas e cronologias” na produção de seus textos, em especial os livros didáticos. Esses textos são usados no ensino, em qualquer nível, e contribuem, segundo Kuhn (2007), para persuadir as mentes que continuarão a reproduzir suas crenças, teorias e técnicas, as quais, por sua vez, direcionarão as pesquisas científicas.

Para que possamos entender o que Kuhn propõe, é necessário primeiro compreender os elementos fundamentais em sua teoria: *período pré-paradigmático, ciência normal, paradigma, anomalia de um paradigma, pesquisa extraordinária e incomensurabilidade*.

O período em que ocorrem os primeiros estágios do desenvolvimento de uma ciência é denominado por Kuhn (2007) de *escolas*, ou de *período pré-paradigmático*. Quando uma dessas escolas se sobressai perante as outras, suas crenças e preconceitos característicos começam a serem praticadas pela maioria dos cientistas (KUHN, 2007).

Kuhn (2007) denomina *ciência normal* as atividades científicas fundadas em uma ou mais realizações passadas e a gama de problemas a serem atacados pelo grupo de cientistas que compartilham as mesmas crenças, ferramentas, compromissos teóricos e metodológicos norteados por estas realizações. A pesquisa científica aprofunda-se praticamente apenas em períodos de ciência normal, com a comunidade de estudiosos que concordam com as “regras” e “estrutura de pesquisa” vigente, se empenhando em resolver problemas que Kuhn denomina de “quebra-cabeças” ou “enigmas”.

Esse grupo de cientistas é chamado de comunidade científica e os problemas que serão resolvidos por ela comumente são apresentados em textos que servem de base para as pesquisas da comunidade.

O conjunto de problemas e as crenças teóricas que norteiam as pesquisas no período de *ciência normal*, também chamada de pesquisa normal, são definidos por Kuhn (2007) como *paradigmas*. Dito de outra forma, o *paradigma* é que determina quais perguntas e regras são permissíveis e admitem respostas dentro da atividade de ciência normal.

Os problemas que surgem no período de pesquisa normal e dos quais se ocupam os cientistas da comunidade são, basicamente, de dois tipos. Os do primeiro tipo são aqueles que podem ser resolvidos apenas com o aprimoramento do paradigma, isto é, depois de algum tempo aparece um resultado proveniente da pesquisa normal que solucionará o problema. Já os do segundo tipo são aqueles que, apesar dos esforços incessantes da comunidade, não encontram solução aceitável dentro das regras do paradigma vigente. Surge, então, o que Kuhn chama de *anomalia* (KUHN, 2007).

Quando uma anomalia é encontrada pelos cientistas, a tendência é que eles ignorem e migrem para outro campo de pesquisa, ou, continuem tentando resolver o problema com as ferramentas disponíveis pelo paradigma vigente. Entretanto, não expõem suas tentativas frustradas para outros membros da comunidade com medo de ficar explicitado seu próprio insucesso (KUHN, 2007).

Quando a anomalia toma proporções grandiosas na comunidade científica, chamando a atenção da maioria dos seus membros, inicia-se uma crise no atual paradigma. Consequentemente, haverá busca pela solução, e o problema não será incorporado pelo paradigma. É o período que Kuhn chama de *pesquisa extraordinária*, no qual os resultados não são mais cumulativos e contínuos.

Os cientistas passam a se sentir inseguros em sua profissão quando problemas sérios começam a ser explicitados - pela anomalia - no paradigma, e ainda, suas crenças começam a perder força, e as regras deste paradigma tendem a se amolecer. Cientistas começam a demonstrar inquietação e descontentamento com o paradigma e já lançam de artifícios filosóficos e metafísicos para defender seus pontos de vista que, baseado no atual paradigma, são contraditórios.

Neste período de crise-revolução a insegurança impera entre a comunidade e o paradigma norteador das pesquisas é abandonado e revolucionariamente substituído por outro. Mas por qual razão a aceitação de uma nova teoria, ou de um novo fenômeno, deve exigir a rejeição de um paradigma mais antigo? Sobre isso, Kuhn afirma que:

[...] se as novas teorias são chamadas para resolver as anomalias presentes na relação entre uma teoria existente e a natureza, então a nova teoria em algum ponto se difere nas predições de sua predecessora! Esta diferença não poderia ocorrer se as duas teorias fossem logicamente compatíveis. No processo de sua assimilação, a nova teoria, esta deve ocupar o lugar da anterior (KUHN, 2007, p.131).

A rejeição se dá pelo fato das duas teorias serem *incomensuráveis*<sup>3</sup>, ou seja, os significados dos termos utilizados na construção teórica possuem ontologias distintas, por exemplo, o conceito de movimento para Aristóteles e o conceito de movimento para Newton.

De um modo diferente da teoria epistemológica de Kuhn, a concepção positivista de que o conhecimento matemático é produzido de maneira contínua e acumulativa, restringe o alcance de novas teorias, já que estas não podem contradizer de modo algum as que as precederam, e assim, novas teorias nunca são incomensuráveis com uma teoria anterior.

Diferenciando-se da posição positivista de como ver os avanços científicos, Kuhn mostrou em sua teoria que os principais avanços de uma ciência só podem ocorrer por meio de rupturas, parciais ou totais, com o antigo paradigma, e o paradigma emergente será validado pela comunidade científica que irá compartilhá-lo.

### **A constituição do paradigma pitagórico**

---

<sup>3</sup> Termo usado por Kuhn, metaforicamente, fazendo alusão ao termo incomensurabilidade da matemática: “Recordemos de onde veio o termo ‘incomensurabilidade’. A hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles é incomensurável relativamente a qualquer um dos catetos do triângulo, assim como a circunferência de um círculo o é com respeito ao raio do círculo, no sentido que não há nenhuma unidade de comprimento pela qual ambos os elementos do par possam ser divididos, sem deixar resto, um número inteiro de vezes” (KUHN, 2006, p. 50).

O problema fundamental que norteou as reflexões de filósofos como *Tales, Anaximandro, Anaxímenes, Heráclito e Pitágoras* na passagem do século VII para o século VI a.C. foi o chamado problema da *arkhé* ( $\acute{\alpha}\rho\chi\eta^4$ ). “Os primeiros filósofos buscam a *arkhé*, o princípio absoluto (primeiro e último) de tudo que existe” (CHAUI, 2002, p.46). Cada filósofo abordava e apresentava explicações para tal questão. Interpretações diversas sobre a origem do universo, ou a origem das coisas, foram discutidas na Grécia Antiga, particularmente entre os pré-socráticos<sup>5</sup>, dos quais podemos citar: Tales, Anaximandro, Anaxímenes, Pitágoras, Zenão, Parmênides e Demócrito.

A resposta encontrada pelos pitagóricos para o problema da *arkhé* se fundamenta numa física em que o número se torna a origem das *coisas*. Posteriormente, em sua *Metafísica*, Aristóteles afirma que para os pitagóricos os números são os elementos que constituem a matéria. A filosofia pitagórica era nutrida pela matemática e, segundo Aristóteles (1979), os pitagóricos, impregnados por estas disciplinas (as matemáticas), julgaram que estas eram o princípio de todos os seres, e conseqüentemente, como os números eram o princípio destas, julgaram, “[...], portanto o número a substância de todas as coisas” (ARISTÓTELES, 1979, p.23). Esta concepção - a do número como *arkhé* - aparece em alguns fragmentos deixados por Aristóteles e pelos doxógrafos<sup>6</sup>. De acordo com Spinelli (1998, p.109), Proclo<sup>7</sup> atribuiu a Pitágoras a seguinte descoberta: “[...] a existência de uma estrutura de formas do Universo”.

De fato, foram várias justificativas desenvolvidas pelos pitagóricos para subsidiar a ideia de que todas as coisas têm um número, e que sem ele nada se pode compreender. O empenho dos pitagóricos em legitimar suas convicções pode ser depreendido das palavras de Aristóteles, “[...] se nalguma parte algo faltasse, supriam logo com as adições necessárias, para que toda teoria se

---

<sup>4</sup> Problema que é ao mesmo tempo o da origem das coisas e o da matéria primordial dos diversos corpos da realidade sensível (MICHEL *et al*, 1959). “Em Homero, *arké* significa o que está no começo, no princípio, na origem de alguma ação, de algum discurso, o ponto de partida, donde arquétipo (o tipo ou modelo primitivo de uma coisa). Em Píndaro, significa poder, comando autoridade, soberania por extensão, arconte (magistrado) (CHAUI, 2002, p.46)”.

<sup>5</sup> Pré-socráticos são os filósofos que viveram em sua grande maioria antes da época de Sócrates e investigaram a origem das coisas e as transformações da natureza. Sócrates, em outro caminho, parte para uma explicação do homem na natureza (HACK, 2008).

<sup>6</sup> “Os que recolheram e reuniram (por assunto ou por cronologia) os fragmentos a partir do discípulo de Aristóteles, Teosfrato, o primeiro dos doxógrafos” (CHAUI, 2002, p.51)

<sup>7</sup> Filósofo neoplatônico do século V d. C.

tornasse coerente” (ARISTÓTELES, 1979, p.22). Este empreendimento dos pitagóricos, corroborado pela citação de Aristóteles, nos induz, de certa forma, a escrever o que Kuhn diz sobre a natureza da ciência normal: “[...] esse empreendimento parece ser uma tentativa de forçar a natureza a encaixar-se dentro dos limites preestabelecidos e relativamente inflexíveis fornecidos pelo paradigma” (KUHN, 2007, p.44).

Segundo Diôgenes Laértios (1987), Alexândros<sup>8</sup> afirma ter extraído das *Memórias Pitagóricas* os seguintes dogmas:

A mônada é o princípio de todas as coisas; da mônada nasce a díade indefinida, que serve de substrato material à mônada, sendo esta a causa; da mônada e da díade indefinida nascem os números; dos números nascem os pontos, destes nascem as linhas e destas nascem as figuras planas; das figuras planas nascem as figuras sólidas; destas nascem os corpos perceptíveis pelos sentidos, cujos elementos são quatro: o fogo, a água, a terra e o ar (LAËRTIOS, 1987, p.234).

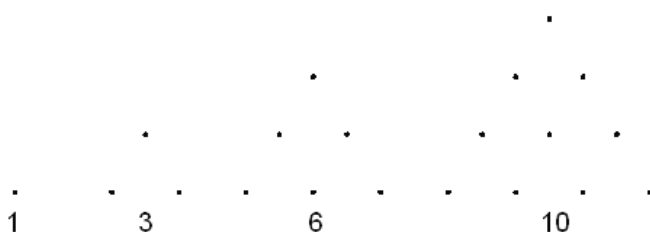
Com esta forma de estruturação do Universo, os pitagóricos elaboraram sua resposta para o problema da *arkhé*. A identificação das coisas do universo com os números inteiros era a base do paradigma pitagórico. Isso norteava os pitagóricos a concentrarem seus esforços na comprovação desta identificação, gerando uma grande quantidade de pesquisas aritméticas, cujos resultados produziram uma variada classificação para os números, como números primos, compostos, figurados, entre outros. A crença dos pitagóricos de que os números traduziam a harmonia universal, fez com que eles produzissem várias justificativas para tal afirmação, que vai além da filosofia, e abrange também a geometria, a música e a astronomia.

Como a geometria era uma forma de representar o mundo, ao buscarem estabelecer a identificação entre formas geométricas e números inteiros buscavam, também, legitimar as afirmações pitagóricas de que as leis matemáticas traduzem o funcionamento do universo. Dessa tentativa de identificação das formas geométricas com os números, surgiram o que os pitagóricos denominaram de números *figurados*, ou seja, quantidades que podem ser representadas por figuras geométricas planas.

---

<sup>8</sup> Na *Sucessão dos Filósofos* Alexândros diz ter encontrado nas *Memórias dos Filósofos* estes dogmas pitagóricos.

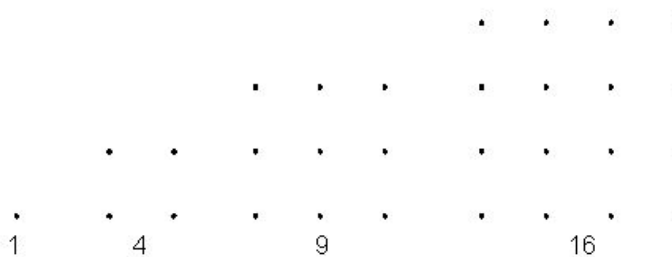
**Figura 1** - Representação espacial dos números triangulares.



**Fonte:** (MLODINOW, 2004, p.31)

Na figura 1, observa-se que a adjunção sucessiva de pontos, respeitando certo arranjo geométrico, produz sempre triângulos equiláteros a partir dos outros triângulos equiláteros. Os pitagóricos chamavam os números que hoje podem ser expressos na forma  $\frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  de números *triangulares*. De forma semelhante, formavam-se também os chamados números *quadrados*, conforme a figura:

**Figura 2** - Representação espacial dos números quadrangulares.



**Fonte:** (MLODINOW, 2004, p.31)

A lei que descreve aritmeticamente esta formação é dada por:

$$1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16, \dots, 1+2+3+\dots+(2n-1)=n^2$$



As propriedades dos números quadrados e triangulares fascinaram Pitágoras. [...] Enquanto que os números quadrados são todos iguais à soma de todos os números ímpares consecutivos, Pitágoras percebeu que, do mesmo modo, os números triangulares são as somas de todos os números consecutivos, tanto pares como ímpares. E que números quadrados estão relacionados; se adicionarmos um número triangular ao número triangular anterior ou ao próximo, obteremos um número quadrado (MLODINOW, 2004, p.30).

É desse modo de escrever que vem o termo usado hoje “quadrado de um número” (MLODINOW, 2004). E este estudo prosseguiu também com os números *pentagonais* e *hexagonais*. Outros exemplos de categorizações dos números atribuídas aos pitagóricos são os *números amigáveis*, *números primos*, *números compostos* e os *números perfeitos*. Porém, a formalização do estudo dos chamados números *pitagóricos*<sup>9</sup>, no entanto, impressionou pela sua beleza e simplicidade (CARAÇA, 1984), por possibilitar a regulação à estrutura de uma figura geométrica. Os gregos tinham conhecimento de que um triângulo de lados com medidas 3, 4 e 5, era um triângulo retângulo. Então, começaram a investigar quais outros triângulos têm lados cujas medidas dos comprimentos são múltiplos inteiros de uma unidade de comprimento, formulando o famoso teorema denominado *Teorema de Pitágoras*, que é expresso algebricamente na forma:  $a^2 + b^2 = c^2$ , em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas dos lados de um triângulo retângulo qualquer.

As tentativas realizadas pelos pitagóricos com a intenção de exprimir a natureza por meio de relações numéricas encontraram respaldo até em coisas “não corporais” como o som. Por exemplo: a harmonia musical poderia ser traduzida por relações numéricas muito simples. Podemos dizer que o primeiro registro de uma experiência científica foi a de Pitágoras usando um monocórdio<sup>10</sup> (CARAÇA, 1984).

Por experiências feitas no monocórdio, ele (Pitágoras) verificou que os comprimentos das cordas que, com igual tensão, dão notas em intervalo de *oitava*, estão entre si na razão de 2 para 1; em intervalo de *quinta*, na razão 3 para 2; em intervalo de *quarta*, na razão de 4 para 3 (CARAÇA, 1984, p.71).

---

<sup>9</sup> Todas as soluções inteiras da equação  $a^2 + b^2 = c^2$ .

<sup>10</sup> Instrumento de uma só corda.

Chauí (2002) diz que, ao perceber os sons da lira órfica ou da lira tetracorde, Pitágoras e seus seguidores observaram princípios e regras de harmonia que podem ser expressas por relações numéricas (proporções) e conclui:

Ora, se o som é, na verdade, número, por toda a realidade - enquanto harmonia ou concordância dos discordantes como o seco e o úmido, o quente e o frio, o bom e o mau, o justo e o injusto, o masculino e o feminino - não seria um sistema ordenado de proporções e, portanto número? (CHAUI, 2002, p.69).

As relações numéricas estabelecidas entre os comprimentos das cordas e as notas correspondentes, fez supor [os pitagóricos], segundo Mariás (1987), as distâncias entre os planetas.

[...] como as distâncias dos planetas correspondem aproximadamente aos intervalos musicais, pensou-se que cada astro emitia uma nota, compondo todas juntas a chamada harmonia das esferas ou música celestial, que não ouvimos por ser constante e sem variações. As idéias astronômicas dos pitagóricos foram profundas e penetrantes: Ecfanto chegou a afirmar a rotação da Terra (MARIÁS, 1987, p.39).

## **A anomalia**

A principal realização atribuída à escola pitagórica no campo da geometria foi o *Teorema de Pitágoras*, que ironicamente foi também um responsável por abalar as explicações pitagóricas acerca da origem e natureza do Universo: a de que todas as coisas poderiam ser expressas por números inteiros. Essa ferramenta validada e muito utilizada pelos pitagóricos (e pelos matemáticos em geral) constituiu o “pano de fundo” para o aparecimento de uma anomalia. Ao buscarem medir grandezas geométricas utilizando dados aritméticos, os pitagóricos, de acordo com Godefroy (1997, p.45), “[...] vão ser os primeiros a fazer a experiência de como pode ser delicado [...] exprimir o *contínuo* com a ajuda do *discreto*”. Especificamente, a anomalia começou com as tentativas de se determinar a medida da diagonal de um quadrado, utilizando dados aritméticos, decorrentes do *Teorema de Pitágoras*.

Não é possível comprovar se os pitagóricos realizaram realmente alguma demonstração de que a medida encontrada da diagonal do quadrado não era uma razão de dois inteiros, porém, fundado em alguns fragmentos deixados por pitagóricos após a morte de Pitágoras, podemos supor algumas formas de como eles conseguiram demonstrar tal feito, como sugeriu Omnès: “[...] Ignoramos como ele procedeu no pormenor, mas as possibilidades não são muitas, e os testemunhos deixados pelos matemáticos que o seguiram pouco depois deixam poucas dúvidas a este respeito” (OMNÈS, 1996, p.30).

Portanto, os pitagóricos estavam diante de um resultado aceito por sua “comunidade científica”, o *Teorema de Pitágoras*, que quando utilizado na resolução de um problema originou uma contradição. Assim, a impossibilidade da associação de um número racional à medida da diagonal de um quadrado deixou evidente que o *Teorema de Pitágoras* e a crença de que tudo é número são incompatíveis, porque a aplicação de um resulta na falseabilidade do outro. Quer seja mediante uma constatação aritmética quer seja pelas vias geométricas, o fato da medida da diagonal do quadrado não poder ser explicitada como razão entre medidas dos lados do próprio quadrado utilizando números inteiros causou espanto e inquietação entre os pitagóricos. Dessa forma, a partir da perspectiva kuhniana, a descoberta da incomensurabilidade evidencia uma *anomalia*.

Como uma relação tão simples na matemática contemporânea, como a razão de medidas de dois segmentos de reta, não pôde ser entendida? Os pitagóricos se viram, portanto, diante de uma relação geométrica aparentemente simples em que todas as ferramentas, crenças, mitos, e teorias estabelecidas advindas da pesquisa normal do paradigma pitagórico, não eram suficientes para esclarecê-la. Segundo Kuhn (2007, p.58) “O objetivo da ciência normal não consiste em descobrir novidades substantivas”.

### **A crise**

O mais célebre dos resultados delegados aos pitagóricos, o *Teorema de Pitágoras*, deu suporte para explicitar no seio do paradigma, que era fundado na crença de que todas as coisas

podem ser identificadas com os números inteiros, possivelmente a primeira crise conhecida nos fundamentos da matemática. Essa crença caiu por terra ante a descoberta de que: “[...] na própria geometria, os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas” (BOYER, 1974, p.53). O mais provável é que, de imediato, os pitagóricos tentaram esconder a *anomalia* - alguns escritos dão conta desta ação desesperada de conter a propagação do ocorrido, que são representados por algumas lendas como a de que a sociedade secreta dos pitagóricos mandou matar *Hipaso de Metaponto*, um de seus seguidores, porque ele havia revelado o segredo dos incomensuráveis (OMNÈS, 1996). As atitudes de negação dos pitagóricos frente ao problema dos incomensuráveis podem ser identificadas pela epistemologia kuhniana quando Kuhn (2007) afirma que os cientistas, mesmo quando defrontados com contraexemplos de suas teorias não as abandonam, “[...] embora possam começar a perder sua fé e a considerar outras alternativas, não renunciam ao paradigma que os conduziu à crise” (KUHN, 2007, p.107).

Com os esforços dos pitagóricos em preservar as teorias que norteavam seus estudos e os resultados obtidos, podemos concluir que estavam empenhados em “salvar” o paradigma, tentando tornar o que era anômalo em previsível no paradigma. Porém, como as tentativas de resolver o problema dos incomensuráveis não surtiram efeito, os pitagóricos assumem a existência de comprimentos que não podiam ser expressos por racionais, os *alagon*<sup>11</sup>. As tentativas dos pitagóricos foram constantemente rebatidas, principalmente pelas críticas à teoria das mônadas, elaboradas pelas escolas gregas que sucederam a dos pitagóricos, particularmente com a contradição lógica nos argumentos da escola pitagórica encontrada por *Zenão de Elea*<sup>12</sup>, discípulo de *Parmênides*. Zenão, objetivando mostrar aos matemáticos da época as incoerências decorrentes da tentativa de se completar grandezas contínuas com um número infinito de pequenas partículas, apresentou alguns paradoxos, sustentados no seguinte argumento:

[...] ou o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis ou existe um menor elemento indivisível de tempo (um instante) e de espaço (um ponto). Em dois de

---

<sup>11</sup> Àqueles que não pertenciam à razão, ou seja, não racionais!

<sup>12</sup> Em alguns livros ou traduções Zenão de Elea, aparece como Zenon de Elea.

seus paradoxos, no da “Dicotomia” e no de “Aquiles e a Tartaruga”, Zenon argumenta que, se o tempo e o espaço são divisíveis “*ad infinitum*”, o movimento é impossível (GALARDA *et al*, 1999, p.20).

Os paradoxos criados por Zenão deixam explícitas as situações contraditórias que surgiram da utilização do argumento de que se o número de elementos de um segmento de reta (as mônadas) fosse infinito, isto poderia explicar os segmentos incomensuráveis enquadrando-os no paradigma vigente. Para Zenão, as explicações dos pitagóricos para o movimento eram cheias de contradições, pois ao tentar “atomizar” o espaço necessariamente surgem os paradoxos, que em última instância, se remetia aos infinitésimos, sendo estes não compreendidos pelos gregos da época. Os argumentos e os paradoxos estabelecidos por Zenão deram origem, segundo Caraça (1984), ao medo e repúdio a processos infinitos na matemática que perduraram vários séculos e provocaram consequências tanto positivas quanto negativas no desenvolvimento da matemática. De positivo, podemos destacar o método da exaustão que, segundo Struik (1992), foi uma resposta aos argumentos de Zenão e, de negativo, a demora na aceitação e compreensão dos infinitesimais.

### **Entre a crise e a revolução**

Após os pitagóricos terem se defrontado com as grandezas incomensuráveis e de suas tentativas em enquadrar o problema no paradigma vigente serem contestadas por Zenão, a escola de Platão se ocupou, de certa forma, em tentar compreender essas medidas, inclusive, rivalizando com a escola de Eléa. Os filósofos Teodoro (465 a 398 a.C.), Teeteto (414 a 369 a.C.), Eudoxo (408 a 355 a.C.) e Euclides (360 a 295 a.C.), ligados à academia de Platão, são nomes que contribuíram para a compreensão das medidas de grandezas incomensuráveis em suas produções matemáticas.

Na abordagem da escola platônica referente aos números irracionais e/ou às medidas de grandezas incomensuráveis, há uma preocupação em desenvolver técnicas geométricas que permitissem, de alguma forma, “manejar matematicamente” as medidas incomensuráveis, pois

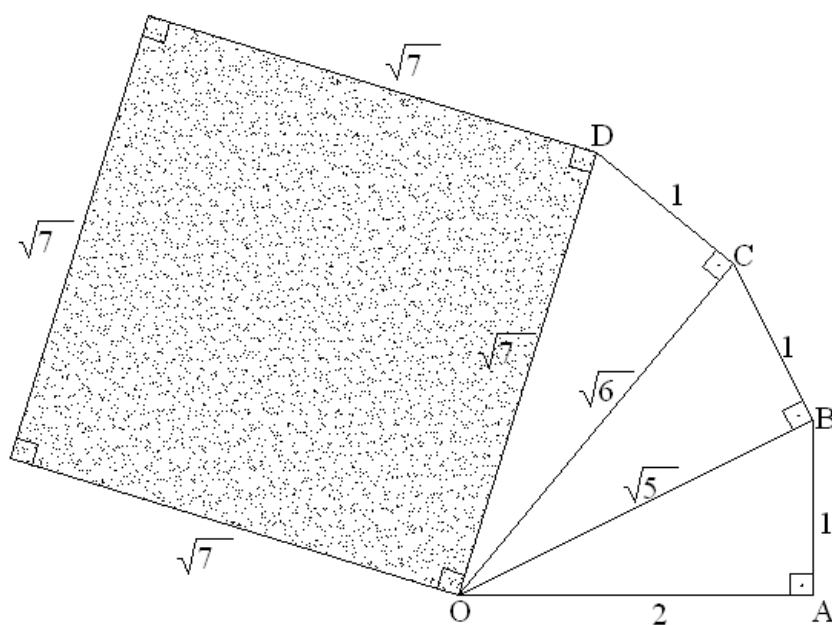
“[...] ninguém duvida da existência da diagonal do quadrado” (GODEFROY, 1997, p.50). Se não podiam nominá-los – os irracionais - não tinham, por outro lado, como negá-los, já que eles existiam enquanto segmentos de reta construtíveis em régua (não graduada) e compasso. Podemos inferir que os matemáticos da Academia de Platão não se submetiam ao paradigma pitagórico, pois aceitavam a existência dos irracionais, embora não soubessem operar com eles ou sequer “nominá-los”. Os platônicos se dedicaram a essa tarefa, iniciando um processo de investigação que pode ser caracterizado como uma *pesquisa extraordinária*, no sentido da teoria kuhniana.

Quando [...] uma anomalia parece ser algo mais do que um novo quebra-cabeça da ciência normal, é sinal que se iniciou a transição para a crise e para a ciência extraordinária. A própria anomalia passa a ser mais comumente reconhecida como tal pelos cientistas. Um número cada vez maior de cientistas eminentes do setor passa a dedicar-lhe uma atenção sempre maior (KUHN, 2007, p.114).

Na presença da anomalia e o conseqüente aprofundamento da crise paradigmática, abriu-se um período de pesquisa extraordinária que permitiu que matemáticos como Teodoro de Cirene, fundados em novas crenças, em outras metafísicas e em outros modelos, buscassem outros caminhos, um novo paradigma para a matemática daquele período.

Os matemáticos platônicos, segundo Godefroy (1997), tiveram suas atividades científicas concentradas na produção de técnicas para a resolução de problemas de quadratura, ou seja, a construção de quadrados cuja área da superfície é igual à área de outra superfície de uma figura dada. Nessas técnicas eles utilizavam facilmente a  $\sqrt{n}$  - raiz de n - para tal feito. Por exemplo, a construção geométrica de um segmento, de modo que esse segmento seja o lado de um quadrado de área igual a 7 unidades quadradas. Este problema se resume em construir um segmento de medida igual a  $\sqrt{7}$ , e a técnica utilizada pelos matemáticos da escola platônica, para a resolução de tal problema, pode ser observada na seguinte figura:

**Figura 3** - A razão  $\frac{OD}{AB} = \sqrt{7}$ .



**Fonte:** Adaptado de Godefroy (1997, p.51).

Para enfrentar a anomalia gerada pela incomensurabilidade, os platônicos procuraram distanciar-se cada vez mais do paradigma aritmético. Desse modo, passaram a utilizar os métodos geométricos para a construção de grandezas incomensuráveis. Esta posição dos platônicos se justifica na medida em que não se podia negar a existência das diagonais de um quadrado, pois estas poderiam facilmente ser construídas sem que, contudo, a aritmética dos pitagóricos sustentasse teoricamente tais objetos matemáticos.

Além do desenvolvimento de técnicas para o tratamento envolvendo grandezas incomensuráveis, os seguidores de Platão discutiram, também, a demonstração da não comensurabilidade dessas grandezas.

No *Diálogos de Platão*<sup>13</sup>, é relatada uma dessas discussões, entre Teeteto, Teodoro de Cirene e Sócrates, na qual, Teeteto, em seu diálogo com Sócrates, comenta que foi demonstrada a irracionalidade dos seguintes números:  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{15}$  e  $\sqrt{17}$ .

*Teeteto* - A respeito de algumas potências, Teodoro, aqui presente, mostrou que a de três pés e a de cinco, como comprimento não é comensurável com a de um pé. E assim foi estudando uma após a outra, até a de dezessete pés. Não sei por que parou aí (PLATÃO, 1988, p.9).

Como já foi dito neste trabalho, Godefroy (1997) acredita que os pitagóricos não demonstraram a incomensurabilidade de alguns segmentos via aritmética, pois, caso contrário, Teodoro, de posse deste conhecimento, não teria motivo, como é explicitado em seu diálogo com Sócrates, parado em seus estudos de incomensurabilidade no número dezessete.

Ao contrário de Godefroy (1997), acreditamos que, influenciados pelo paradigma que os regiam, essencialmente aritmético, o mais provável é que os pitagóricos tenham esboçado uma demonstração aritmética para a incomensurabilidade da diagonal do quadrado. Acreditamos mais, que em função da insuficiência dos números inteiros em responderem a crise explicitada pelo *Teorema de Pitágoras*, os matemáticos que sucederam os pitagóricos, em específico os matemáticos platônicos, deixam de se submeter às regras da matemática pitagórica. O matemático Eudoxo dedicou a maioria de seus trabalhos na exploração do obstáculo da incomensurabilidade e foi por isso considerado um dos mais importantes matemáticos da Grécia Antiga. Seu nome hoje é comumente ligado à *teoria das proporções* e ao *método da exaustão*<sup>14</sup>. Essas duas teorias foram as que começaram a resolver, por meio de outro método, de outras leis gerais, de novos critérios, a crise levantada pela descoberta dos incomensuráveis.

Para contornar o problema, Eudoxo, em vez de usar números para comparar duas grandezas de mesma espécie (dois comprimentos, duas áreas, dois volumes etc.), adotou o conceito de “razão entre duas grandezas”. Assim, segundo Lintz (1999, p.150), “[...] com essa

<sup>13</sup> Platão 427-347 a.C. Teeteto-Crátilo. Trad. Carlos Alberto Nunes, 1988.

<sup>14</sup> O termo “exaustão” aparece pela primeira vez em Grégoire de Saint - Vincent, em 1647 (STRUICK, 1992, p. 86)



teoria das proporções, pode-se reabilitar a geometria, que se apresentava incompleta como deixada pelos pitagóricos [...]”.

A teoria das proporções de Eudoxo pôde dar um novo significado para o objeto matemático *diagonal de um quadrado*. Essa grandeza geométrica causava espanto e surpresa para os pitagóricos, como vimos anteriormente, por não se adequar à crença de que tudo no universo deveria em última instância se resumir a números inteiros.

A teoria das proporções de Eudoxo pôs de parte a teoria aritmética dos pitagóricos, que se aplicava apenas a quantidades comensuráveis. Era uma teoria puramente geométrica, que, na sua forma estritamente axiomática, tornava supérflua qualquer referência a grandezas comensuráveis ou incomensuráveis (STRUİK, 1992, p.84).

As tentativas dos pitagóricos em tentar transformar o que era anômalo em previsível pelo paradigma foram todas refutadas por Zenão. No entanto, Zenão não apresentou, em contrapartida, uma saída para a anomalia. A escola platônica, mais especificamente Eudoxo, propõe o “novo”. De fato, o que denominamos hoje por critério de convergência, foi elaborado por Eudoxo, e aparece na proposição I do livro X dos Elementos:

Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta (EUCLIDES, 2009, p.354).

Essa proposição serviu como preparação para que se pudesse dar uma definição para grandezas incomensuráveis, que é a proposição II do Livro X de Euclides: Caso sendo subtraída, de duas magnitudes [expostas] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis (EUCLIDES, 2009, p.355).

As técnicas desenvolvidas pelos platônicos, principalmente pela Teoria das Proporções e pelo Método da Exaustão, elaboradas por Eudoxo, são um dos pilares de uma nova tradição matemática que mais tarde é difundida nos Elementos de Euclides.

## **O desabrochar do novo paradigma**

A revolução científica na matemática, resultante da crise gerada pela descoberta dos incomensuráveis, termina com o desabrochar do novo paradigma: a geometria das construções com régua (não graduada) e compasso. A incomensurabilidade, a partir de então, passou a ser estudada usando-se o método da exaustão de Eudoxo, com o suporte da lógica aristotélica. As realizações matemáticas que participaram do florescimento desse novo paradigma na matemática na Antiguidade Grega são: as *Teorias das Proporções*, o *Método da Exaustão* - ambas de Eudoxo - e o *Órganon*, obra de Aristóteles.

Todo conhecimento, à época dos platônicos, passava pela filosofia. Uma evidência disso são os trabalhos produzidos por Aristóteles e, dentre esses, o *Órganon*, que estabelece as bases do pensamento lógico-dedutivo, que viria a ser fundamental aos *Elementos* de Euclides. A influência de Aristóteles na elaboração dos *Elementos* foi pouco considerada, o que é compreensível pela visão dominante, atualmente, de que a filosofia, àquela época, era compartimentada, à moda do conhecimento científico. Os pilares deste novo paradigma – As teorias de Eudoxo e o *Órganon* de Aristóteles - são os mesmos pilares que, em nossa compreensão, serviram de base para quase toda matemática apresentada nos *Elementos* de Euclides. Segundo Lintz (1999), Aristóteles, mesmo não sendo matemático de profissão, exerceu grande influência no desenvolvimento da geometria com sua coleção de trabalhos sobre lógica conhecidos como *Órganon*.

A obra de Euclides surgiu depois da morte de Aristóteles, mas Euclides baseou-se nas pesquisas de seus predecessores, e estes dedicaram ao menos parte de seu pensamento ao elemento que viria a ser característica distintiva da ciência geométrica euclidiana (BARNES, 2002, p.43).

Paralelamente ao novo significado dado por Eudoxo para as grandezas geométricas, e como proceder para classificá-las, Aristóteles influenciou Euclides, que apresentou um novo método lógico de demonstração que se tornou uma das principais características do novo paradigma. Esta importante contribuição e como foi estruturado este novo método também é citado por Mlodinow:

[...] primeiro, tornar explícitos os termos, formulando definições precisas e garantindo assim a compreensão mútua de todas as palavras e símbolos. Em seguida, tornar explícitos os conceitos apresentando de forma clara os axiomas ou postulados (estes termos são intercambiáveis) de modo que não possam ser usados entendimentos ou pressuposições não declarados. Finalmente, deduzir as conseqüências lógicas do sistema empregado somente regras de lógica aceitas, aplicadas aos axiomas e aos teoremas previamente demonstrados (MLODINOW, 2004, p.40).

Para Kuhn (2007, p.63) “[...] somente uma modificação nas regras do jogo poderia ter oferecido uma outra alternativa [...] o estudo das tradições da ciência normal revela muitas outras regras adicionais”. De fato, os gregos abandonaram a aritmética pitagórica substituindo-a pela geometria euclidiana, mudando-se as regras de montagem dos “quebra-cabeças”. A organização da matemática na época do helenismo, de acordo com Ribnikov (1987, p.66), “[...] *presenta una sucesión lógica de terremas y problemas sobre construcciones y que utiliza un mínimo de condiciones iniciales*”. Esta será a principal característica da matemática euclidiana. Deste modo, o caráter abstrato com que os objetos matemáticos passam a ser tratados e os métodos de demonstração que foram estabelecidos neste novo paradigma constituem os principais fatores para o estabelecimento de uma nova tradição na matemática, a de uma ciência dedutiva.

### **Considerações finais**

Todas as atividades desenvolvidas pelos pitagóricos, conforme aqui apresentado, eram norteadas pela suposição de que tudo no Universo eram números inteiros. Este *paradigma* norteou os pitagóricos no desenvolvimento da matemática pitagórica, o que pode ser comprovado pela característica exclusivamente aritmética das produções matemáticas desta comunidade, caracterizando assim um período de *ciência normal*.

Com a constatação da existência das medidas de grandezas incomensuráveis, um forte abalo no *paradigma* pitagórico foi sentido, causando uma *crise* na matemática pitagórica. Esta *crise* foi estabelecida principalmente pela insuficiência da matemática pitagórica em resolver a *anomalia* evidenciada por sua maior realização matemática: o *Teorema de Pitágoras*.

A medida da diagonal de um quadrado causou grande espanto a esta comunidade pelo simples fato: utilizando a ferramenta mais importante estabelecida pelos pitagóricos - o *Teorema de Pitágoras* - na procura da medida desta diagonal, os pitagóricos não chegaram a um entendimento lógico, pois esta medida não poderia ser expressa pelos números (inteiros), base de toda crença pitagórica.

Os matemáticos gregos, logo após o aparecimento de grandezas incomensuráveis, principalmente aqueles ligados à academia de Platão, assumindo que estavam diante de uma anomalia que precisava ser entendida, começaram, de certo modo, a produzir métodos para que se pudessem operar com estas grandezas. As pesquisas dos matemáticos gregos do século IV a.C. podem ser interpretadas como um período intermediário entre dois paradigmas, ou seja, segundo Kuhn (2007), este período é denominado de *pesquisa extraordinária*.

Com a elaboração da *teoria das proporções* e do *método da exaustão*, ambos de Eudoxo, e o *Órganon* de Aristóteles, apareceram os subsídios necessários que lançaram as bases para uma nova tradição na matemática grega. Eudoxo deu uma nova definição para a medida da diagonal do quadrado - aquela que causava espanto aos pitagóricos. Deste modo, a diagonal do quadrado deixou de ser supostamente número, crença esta dos pitagóricos, e passou a ser considerada como um objeto geométrico.

É nessa nova forma de ver grandezas, tal como a diagonal do quadrado, e o novo modo de estruturação do conhecimento matemático apresentado nos *Elementos* de Euclides influenciado pela obra de Aristóteles, o *Órganon*, que está talvez a primeira *revolução científica* na matemática ocidental, isto é, houve naquele momento uma mudança de significado de um objeto matemático.

A emergência do novo paradigma, aqui denominado *paradigma euclidiano*, referência aos *Elementos* de Euclides por ter sido a obra que difundiu as bases deste paradigma, trouxe uma nova tradição para o desenvolvimento matemático a partir de então. Fundada principalmente nas obras de Eudoxo e nas idéias do filósofo Aristóteles, a matemática passa a ser constituída seguindo os princípios do pensamento dedutivo.

Por fim, os estudos a que nos dedicamos reafirmaram nossa crença de que o processo de constituição do conhecimento matemático, em particular a constituição do paradigma pitagórico e sua substituição pelo paradigma euclidiano, permitem explicitar fases do desenvolvimento de uma ciência sob a ótica da teoria de Kuhn.

### **Notas**

\*Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Doutorando pelo programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Professor Assistente do Departamento de Matemática. Universidade Estadual de Paraná – Campus de Campo Mourão. Email: [jhlorin@fecilcam.br](mailto:jhlorin@fecilcam.br)

\*\*Doutora em Educação. Docente no Centro Universitário Maringá. Professora convidada do Programa de Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Email: [voclelia@gmail.com](mailto:voclelia@gmail.com)

### **Referências**

ARISTÓTELES, 348-322 A.C. **Metafísica: livro 1 e livro 2**; Ética a Nicômaco; Poética/Aristóteles. Trad. Vincenzo Cocco, et al. São Paulo: Abril Cultural, 1979.

BARNES, J. **Aristóteles**. São Paulo: Loyola, 2002.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá Costa, 1984.

CHAUÍ, M. **Introdução a História da Filosofia**: dos pré-socráticos a Aristóteles. Vol. 1. 2ª Ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2002.

EUCLIDES. **OS Elementos/Euclides**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

GALARDA, L. J., et al, **A evolução do Cálculo Através da História**. Vitória: Editora da Universidade Estadual do Espírito Santo - EDUFES, 1999.

GODEFROY, G. **A Aventura dos Números**. Trad. Antônio Viegas. Lisboa - Portugal: Instituto Piaget, 1997.

GILLI MARTINS, J. C. **Sobre revoluções científicas na Matemática.** Tese de Doutorado – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

HANK, O. C.; SILVA, M. J. A. **Filosofia Ciência & Vida Especial:** Grécia, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 36-47, 2008.

KUHN, T.S. **A Estrutura das Revoluções Científicas.** 9º Ed. Trad. B. V. Boeira & N. Boeira. São Paulo: Editora Perspectiva S. A, 2007.

KUHN, T.S. **O Caminho desde a Estrutura:** ensaios filosóficos, 1970-1993 com uma entrevista autobiográfica. Trad. Cesar Mortari. São Paulo: Editora Unesp, 2006.

LAËRTIOS, D. **Vidas e Doutrinas dos Filósofos Ilustres.** Trad. do grego, introdução e notas Mário da Gama Kury. 2ª Ed. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1987.

LINTZ, R. G. **História da Matemática.** Blumenau: Ed. da FURB, 1999.

MARÍAS, J. **História da Filosofia.** 8ª Ed. Trad. Alexandre Pinheiro Torres. Porto: Edições Sousa & Almeida Ltda, 1987.

MICHEL, P. H., et al, **História Geral das Ciências - tomo I.** A ciência Antiga e Medieval - vol. 2. Trad. Fausto, R. e Ghinzberg G. K. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1959.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides:** a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. Trad. de Enésio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

OMNÈS, R. **Filosofia da ciência contemporânea.** Trad. Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Editora Unesp, 1996.

PLATÃO, 427-347 a.C. **Diálogos: Teeteto e Crátilo.** Trad. do grego Carlos Alberto Nunes. Belém: Universidade Federal do Pará, 1988.

RÍBNIKOV, K. **Historia de las Matemáticas.** Trad. del ruso por Concepción Valdès Castro. Moscú: Editorial Mir, 1987.

SPINELLI, M. **Filósofos pré-socráticos:** primeiros mestres da filosofia e da ciência grega. Porto Alegre: Edipucrs, 1998.

STRUICK, D. J. **História Concisa das Matemáticas.** 2º ed. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradativa Publicações Ltda, 1992.

**Recebido em: Fevereiro de 2015**  
**Aprovado em: Novembro de 2015**