

## **O USO DA GEOMETRIA DINÂMICA EM MODELAGENS GEOMÉTRICAS: POSSIBILIDADE DE CONSTRUIR CONCEITOS NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Melissa Meier\*  
Rodrigo Sychocki da Silva\*\*

**Resumo:** A proposta desse artigo é apresentar os resultados de uma pesquisa em nível de mestrado envolvendo o uso das tecnologias para o ensino de matemática onde analisamos o desenvolvimento do pensamento matemático em alunos do ensino fundamental envolvidos no trabalho com modelagem geométrica. Buscamos em Goldenberg a fundamentação teórica necessária para justificar a escolha da modelagem geométrica como proposta trabalho para as atividades realizadas. A construção de um projeto metodológico envolvendo a engenharia didática foi essencial para o andamento das atividades e análise dos resultados posteriores à realização da sequência didática. Com essa proposta, procuramos mostrar que a inserção da tecnologia nas aulas de matemática tornou-se fundamental para a construção do conhecimento matemático pelos alunos. Ao final da pesquisa, como forma de um produto, disponibilizamos na internet o ambiente virtual construído com o auxílio do software GeoGebra<sup>1</sup> e que contém a sequência de atividades proposta.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Pensamento Matemático. Sequência Didática. Tecnologia.

## **THE USE IN DYNAMIC GEOMETRY MODELING GEOMETRIC: BUILD THE POSSIBILITY OF CONCEPTS IN ELEMENTARY EDUCATION**

**Abstract:** The purpose of this paper is to present the results of a study at Masters level involving the use of technology for teaching mathematics where we analyzed the development of mathematical thinking in elementary students involved in working with geometric modeling. Goldenberg's ideas was used the theoretical foundation necessary to justify the choice of geometric modeling as a proposal for the work activities. The construction of a methodological project involving didactic engineering was essential for the progress of activities and results analysis after the completion of the instructional sequence. With this proposal we seek to show that the integration of technology in mathematics classes has become fundamental to the construction of mathematical knowledge by students. At the end of the research, as a form of a product, we provide internet virtual environment built with the aid of the software GeoGebra and contains a sequence of activities proposed.

**Keywords:** Mathematics Education. Mathematical Thought. Didactic Sequence. Technology.

---

<sup>1</sup> Software de geometria dinâmica, gratuito e disponível em <http://www.geogebra.org/> (Acesso em 03/08/2012).

## **Introdução**

A nossa experiência como professores no ensino fundamental, permitiu verificar que os alunos possuem algumas dificuldades em estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos e suas interações com o mundo. Nota-se que para uma parcela significativa de alunos, a aprendizagem matemática é apenas momentânea e mecânica. Por outro lado, em contrapartida a esta constatação, percebemos que no ensino da geometria tem-se um contexto muito propício para o envolvimento dos alunos, pois durante o processo de aprendizagem, eles precisam visualizar figuras, analisar relações entre seus elementos, identificar regularidades, fazer conjecturas sobre as propriedades identificadas, caracterizando-se assim ações que potencializam a evolução do pensamento matemático. Nesse sentido, ao utilizar softwares de geometria dinâmica, pode-se potencializar o envolvimento dos alunos nas aulas, conforme apontam Armella e Kaput (2008) e Basso e Gravina (2011).

Os softwares de geometria dinâmica, dentre eles o GeoGebra, são ferramentas que permitem a construção de figuras geométricas a partir das propriedades que as definem. A manipulação direta dos objetos construídos e que são colocados em movimento na tela do computador faz com que os alunos observem os resultados obtidos, inicialmente de forma empírica, porém após determinado tempo é possível estimular o desenvolvimento da argumentação, que visa explicar as regularidades percebidas.

Como docente da disciplina de matemática do ensino fundamental na época da pesquisa apresentada neste artigo, deparei-me com cenário escolar propício ao desenvolvimento da proposta. Com base na observação da fala dos estudantes sobre as suas percepções e trajetórias na disciplina de matemática na escola chegou-se à seguinte questão de pesquisa: *Com a modelagem geométrica é possível desenvolver hábitos de pensamento matemático no Ensino Fundamental?* Buscando inspiração nas diretrizes curriculares nacionais (DCN) e através dos estudos de Goldenberg (1998a, 1998b) envolvendo hábitos de pensamento, a proposta deste artigo é apresentar uma sequência de atividades desenvolvidas e aplicadas no Ensino Fundamental, na qual o uso da tecnologia foi essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático dos

alunos. Procura-se mostrar neste texto que através do uso da tecnologia informática, em especial no uso do software GeoGebra, foi possível estimular os estudantes na direção da construção de diversos conceitos matemáticos, envolvendo aspectos da geometria dinâmica.

### **Fundamentação teórica**

Freudenthal (1973) afirma que:

A geometria é uma das melhores oportunidades que existem para aprender matematizar com a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes (FREUDENTHAL, 1973, p.407).

Na citação anterior nota-se a importância que há na exploração de possíveis situações de aprendizagem que envolva investigação em sala de aula. Nesse sentido, as tecnologias digitais, segundo Borrões (1998) se apresentam como recursos que podem ajudar. O autor afirma que o computador, por meio de suas potencialidades em nível de cálculo, visualização, modelação e geração de micro-mundos, é um instrumento poderoso de que atualmente dispõem os professores para proporcionar momentos e construção de experiências junto aos seus alunos.

Jorge Filho (2006) e Goulart (2009), afirmam que o uso do computador tem um grande potencial para provocar o interesse e a motivação dos alunos. Neste caso, um aluno motivado compromete-se mais com as atividades que acontecem em sala de aula e isto tem conseqüentemente reflexos em sua aprendizagem. Entretanto, é importante compreender o papel do professor nas práticas de ensino que agregam a tecnologia em sua metodologia de trabalho. Neste caso, o professor tem a tarefa de definir e acompanhar as atividades a serem realizadas pelos estudantes. Sobre isso, já nos primeiros anos de uso do computador em sala de aula, D'Ambrosio (1988) dizia:

[...] o uso do computador como meio institucional não torna dispensável o professor, antes, pode liberá-lo de algumas tarefas e reservar um espaço maior para o contato interativo entre ele e o aluno, necessário a um ensino que valorize a aprendizagem da descoberta. O computador não é o fim em si mesmo, mas um meio, um recurso instrumental a mais, cuja eficácia dependerá da capacidade daqueles que o utilizam (D'AMBROSIO, 1988, p.88).

Nesse sentido, a tecnologia transforma a aula em um momento de construção de conceitos, no qual professores e alunos trabalham juntos. Porém, isso não significa afirmar que a tecnologia seja o elemento principal deste processo. Com relação a isso, Moran *et al* (2003) afirma que se ensinar dependesse apenas da tecnologia, já teríamos encontrado as melhores soluções há muito tempo. O autor defende que as tecnologias são importantes, mas não resolvem a questão a fundo. O ato de ensinar e aprender são desafios que enfrentamos e encontramos em todas as épocas.

Desse modo, ao optar pela utilização do computador nas aulas de matemática, torna-se necessário compreender que, ao fazer a escolha de um software para a aplicação de uma atividade matemática, precisa-se ter o cuidado de verificar se os recursos disponíveis favorecem as experiências que possibilitam a construção do conhecimento.

Segundo Basso e Gravina (2011, p.14), os softwares devem: “a) ser instrumento para externar, consolidar e comunicar o saber matemático; b) ser instrumento que dá suporte aos pensamentos, mais especificamente aos processos cognitivos que produzem conhecimento matemático”.

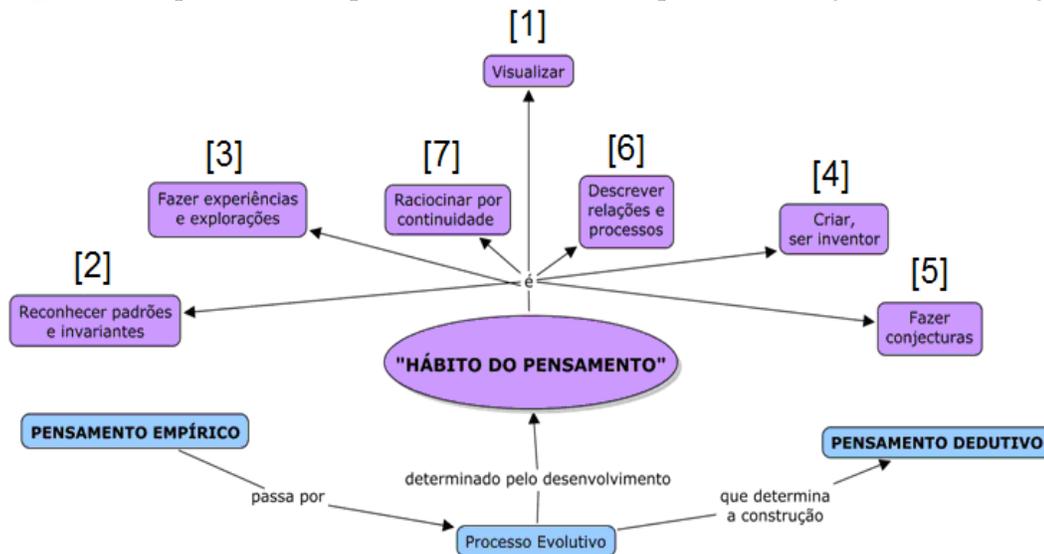
É importante destacar que, para o ensino da matemática, muitos são os softwares que atendem estas duas funções anteriormente mencionadas. Os softwares de geometria dinâmica são ferramentas que permitem a construção de figuras geométricas a partir das propriedades que as definem. Como indica Gravina *et al* (2011a), estes softwares possuem um interessante recurso de estabilidade sob ação de movimento. A interface interativa dos softwares de geometria dinâmica propicia a criação de situações que potencializam o desenvolvimento do pensamento matemático. A manipulação direta de objetos na tela do computador, com análise imediata da construção concorre para este desenvolvimento.

Nas palavras de Gravina e Santarosa (1998), referentes aos ambientes de geometria dinâmica, nota-se as possibilidades destes ambientes quanto ao desenvolvimento dos hábitos de pensamento:

Inicialmente, as construções dos alunos são desenhos do tipo “a mão livre”, reproduções de formas conhecidas, como quadrados e retângulos – predomina aí a percepção. Ao movimentarem o desenho, os alunos constatam que a forma colapsa e deixam de apresentar a impressão visual desejada. Os recursos de “estabilidade sob ação de movimento” desafia os alunos a construir formas sob controle geométrico, isto é, submetidas a propriedades geométricas por eles escolhidas. Na tela do computador, os objetos vão se concretizando sob gradativo controle, na espiral *ação/ formulação/validação* (GRAVINA *et al*, 1998, p.88).

Neste contexto, Paul Goldenberg apresenta uma proposta de organização do currículo da matemática centrada nos “hábitos do pensamento”, que se inserem como estratégias e modos de pensar que contribuam para desenvolvimento do pensamento, ou seja, podem influenciar o surgimento e desenvolvimento de habilidades fundamentais para a matemática tais como: experimentar, testar, descobrir, raciocinar, generalizar e argumentar. Goldenberg (1998a) define “hábitos do pensamento” como os modos de pensar que adquirimos e tornamos naturais onde os incorporamos completamente em nosso repertório e que se transformam em hábitos mentais. A Figura 1 apresenta um esquema organizando os hábitos de pensamento segundo Goldenberg.

**Figura 1** - Mapa conceitual apresentando os hábitos de pensamento segundo Goldenberg



Fonte: os autores

O autor defende uma proposta de ensino fundamentado no desenvolvimento de hábitos mentais que possibilite ao estudante a criação de uma estrutura que possa ser aplicada em suas interações com o mundo. Neste contexto, um currículo de matemática pode ser considerado coerente quando tem um “enredo”, ou seja, a matemática não é o conteúdo, mas o raciocínio que descobre, reúne e dá sentido aos conteúdos; a matemática é, em parte, um modo de pensar, um conjunto de hábitos de pensamento (GOLDENBERG, 1998a).

Acredita-se que conteúdos e habilidades devam ser selecionados para construir um currículo, porém deve-se considerar principalmente o modo como eles são selecionados e, em especial, a maneira como são organizados, pois, isto determina o tipo de formação escolar pretendida. Logo, ao propor uma metodologia envolvendo a compreensão da matemática e seus métodos, possibilita-se ao estudante uma formação que lhe permitirá uma atuação crítica dentro da sociedade, uma vez que a matemática estudada e aprendida se tornará instrumento para entender e transformar o mundo.

## **Procedimentos metodológicos**

Como inspiração para o trabalho, adotou-se a engenharia didática como uma possibilidade metodológica para a pesquisa, pelo fato desta ir além da pesquisa apenas teórica, evidenciando a necessidade de experimentação e reflexão por parte do professor envolvido com as atividades propostas em sala de aula. Segundo Artigue (1996), a engenharia didática vista como metodologia de pesquisa de investigação, caracteriza-se por ser um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino.

A partir da concepção de engenharia didática, constata-se que o professor tem a oportunidade de repensar e avaliar sua ação como docente e, assim, redirecionar o trabalho que desenvolve. Neste modelo de metodologia de trabalho o professor procura compreender as dificuldades apresentadas pelos estudantes na sala de aula e, desta forma, procura fazer um exercício de reflexão sobre sua ação docente.

O desenvolvimento de uma engenharia didática ocorre a partir da escolha de um ponto problemático no sistema didático. Assim, identificado e escolhido o problema para investigação, a engenharia didática se desenvolve, segundo Artigue (1996), em quatro diferentes etapas: análise prévia e concepção do experimento; análise *a priori* e formulação de hipótese; a experimentação; e finalmente a análise *a posteriori* e a validação das hipóteses.

Inicialmente, nesta pesquisa, um ponto observado foi a dificuldade que os alunos do Ensino Fundamental relatavam e apresentavam no estudo de conceitos matemáticos relacionados com a geometria. A constatação foi baseada na limitação ou, em alguns casos, na inexistência do pensamento matemático, o qual se considera ser constituído pelos estudantes a partir de observações, estabelecimento de relações, experiências, conjecturas, erros e reconsiderações das hipóteses durante as atividades propostas em sala de aula.

As análises prévias foram fundamentadas pela proposta de Goldenberg (1998a, 1998b) sobre o desenvolvimento dos hábitos do pensamento matemático. Conforme já mencionado,

Goldenberg apresenta que os hábitos do pensamento devam ser trabalhados com os estudantes com o propósito de possibilitar o desenvolvimento do pensamento matemático. A escolha didática para essa investigação foi trabalhar com a geometria dinâmica através do possível desenvolvimento de hábitos do pensamento.

Ainda nesse aspecto, a proposta contemplava a ideia de desenvolver atividades que investigavam a construção de modelos geométricos, iniciando com a exploração de modelos virtuais, depois avançando progressivamente no estudo das propriedades envolvidas nestas construções e, finalmente, propondo para os alunos a construção de um modelo geométrico dinâmico pelo qual fosse possível estabelecer relações com o conteúdo anteriormente explorado.

Para a aplicação do experimento didático foi desenvolvido o site *Geometria em Movimento*<sup>2</sup> conforme ilustrado na Figura 2. Este site apresenta uma barra de navegação que organiza um conjunto de oito aulas que apresentam o estudo de três modelos geométricos: “Porta Pantográfica”, “Janela Basculante” e “Balanço Vai e Vem”. Também é possível acessar os conteúdos de geometria que são necessários para o estudo e desenvolvimento dos modelos.

**Figura 2** - Página principal do site *Geometria em Movimento*.



**Fonte:** os autores

<sup>2</sup> Disponível em:

[http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/produto\\_didatico/objetos/melissa/modelagemgeometrica/index.html](http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/produto_didatico/objetos/melissa/modelagemgeometrica/index.html) (Acesso em: 03/09/2013)

A partir do material disponibilizado no site, o experimento didático se organizou em quatro blocos de estudo: os três primeiros tratavam, respectivamente, da modelagem da Porta Pantográfica, da Janela Basculante e do Balanço Vai e Vem e no quarto bloco os alunos produziram uma modelagem de sua escolha. O trabalho realizado nos três primeiros blocos foi organizado em três etapas nos quais possuíam os seguintes objetivos:

- Primeira Etapa: O modelo geométrico foi apresentado ao aluno, o qual fez uma primeira investigação sobre as características e possibilidades de movimento do modelo, esboçando tentativas de identificar os padrões matemáticos envolvidos.
- Segunda Etapa: O aluno realizou atividades direcionadas para o entendimento das relações matemáticas envolvidas na construção do modelo e respondeu aos questionamentos propostos.
- Terceira Etapa: O aluno construiu um modelo semelhante ao estudado na primeira etapa considerando suas ideias, percepções e conclusões.

No total, o experimento foi planejado para ocorrer em oito aulas organizadas conforme descrito anteriormente. A tabela 1 apresenta a organização destes blocos. Nele fazemos referência às oito aulas que estão disponibilizadas no site Geometria em Movimento.

**Tabela 1** - Quadro-resumo dos blocos de estudo disponíveis no site *Geometria em Movimento*

BLOCO DE ESTUDO	AULA	TAREFA	DURAÇÃO
<b>BLOCO I</b> Modelagem da Porta Pantográfica	1	Etapa I: Exploração do modelo Etapa II: Realização das atividades guiadas da “Aula 1”	2 horas
	2	Etapa II: Realização das atividades guiadas da “Aula 2”.	2 horas
	3	Etapa III: Realização da atividade guiada da “Aula 3” e construção do modelo de uma Porta Pantográfica.	2 horas
<b>BLOCO II</b> Modelagem da Janela Basculante	4	Etapa I: Exploração do modelo Etapa II: Realização das atividades guiadas da “Aula 4”	2 horas
	5	Etapa III: Construção do modelo de uma Janela Basculante.	2 horas
<b>BLOCO III</b> Modelagem do Balanço Vai e Vem	6	Etapa I: Exploração do modelo Etapa II: Realização das atividades guiadas da “Aula 6”	2 horas
	7	Etapa III: Construção do modelo de um Balanço Vai e Vem.	2 horas
<b>BLOCO IV</b> Modelagem livre	8	Construção do modelo geométrico do objeto escolhido.	2 horas

Fonte: os autores

Com o conhecimento construído nos três primeiros blocos da sequência didática os alunos foram convidados a produzir uma modelagem de mecanismo ou situação de sua escolha, caracterizando o quarto bloco do experimento. Através de observações feitas durante as atividades, salienta-se que o estudo das três etapas anteriores possibilitou a criação e desenvolvimento de diferentes hábitos do pensamento e, desta forma, acredita-se que o estudante conseguiu de alguma maneira compreender a matemática envolvida nas construções, a ponto de conseguir ser autor de um projeto, construído a partir de um modelo geométrico.

Ao concluir os três blocos iniciais, nota-se que o aluno percebeu a necessidade de pensar nas relações geométricas que fazem parte do objeto escolhido para reproduzir. Isso implicou na elaboração de estratégias para sua construção, de modo que a forma e as propriedades geométricas deveriam ser mantidas quando o mecanismo é movimentado. Assim, após a conclusão das etapas iniciais da proposta, os alunos avançaram para a atividade do quarto bloco, onde se notou êxito dos sujeitos envolvidos na construção de objetos virtuais dinâmicos que simulavam alguns objetos comuns do cotidiano.

### **O experimento didático**

A sequência didática foi aplicada com uma turma de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, do turno da manhã, na escola Olímpio Vianna Albrecht, escola pública da rede municipal da cidade de São Leopoldo no estado do Rio Grande do Sul. A turma observada possuía um total de 32 alunos, com idades variando entre 11 e 15 anos.

A dinâmica do trabalho ocorreu da seguinte forma:

- Todos os encontros aconteceram no laboratório de informática da escola, com alunos trabalhando em duplas. Os alunos que optaram por trabalhar juntos espontaneamente formaram duplas, e os demais foram agrupados por sorteio. No total, foram formadas dezesseis duplas, sendo a metade formada por afinidade e a outra metade por sorteio. O laboratório utilizado nas aulas possuía 28 computadores com acesso à internet e um projetor multimídia.

- Em todos os encontros, os alunos fizeram registros de suas ideias e responderam aos questionamentos propostos criando um documento digital com extensão HTML<sup>3</sup>. O software utilizado para a criação destes documentos foi o Kompozer<sup>4</sup>, um editor de páginas HTML disponibilizado gratuitamente na internet.

- Ao final de cada encontro, o professor conduziu momentos de apresentação dos trabalhos desenvolvidos pelas duplas, propondo uma discussão coletiva em grupo. Esse momento da aula consistiu no compartilhamento com os demais da turma sobre o conhecimento produzido nos momentos de trabalho em dupla.

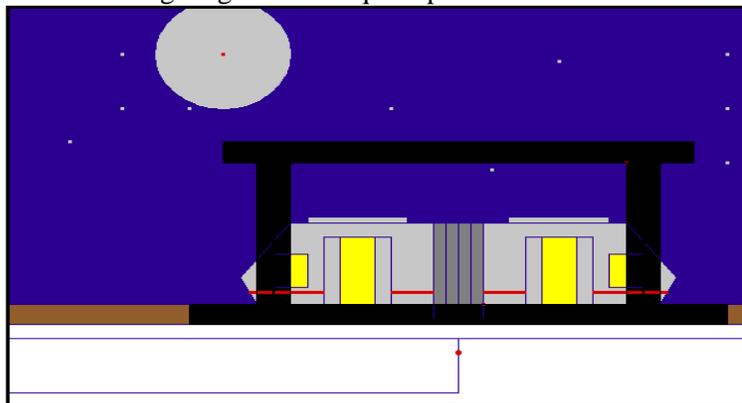
Destaca-se que a concepção inicial do experimento didático foi readaptada durante os momentos de sua aplicação, através da reestruturação de algumas atividades, isto porque se percebeu a necessidade de intervenção em momentos que não estavam previstos, de forma a esclarecer as dúvidas que se apresentavam e também contribuir para o desenvolvimento de hábitos do pensamento que se mostraram pouco compreendido pelos estudantes no início da sequência didática. Quanto à modelagem que ocorreria no bloco IV, antes do início da aplicação do experimento didático, abordou-se o que seria construir um modelo geométrico. Para essa abordagem, utilizou-se como exemplo o modelo geométrico ilustrado na Figura 3. Através do movimento de pontos previamente construídos é possível movimentar os elementos do cenário sem alterar as propriedades ou deformar a construção. Essa construção serviu como um primeiro exemplo de mecanismo envolvendo modelagem geométrica e geometria dinâmica.

---

<sup>3</sup> Sigla para “*Hyper Text Markup Language*”, que significa “Linguagem de Marcação de Hipertexto”. Consiste em uma linguagem para a criação páginas na Web.

<sup>4</sup> Disponível em <http://www.kompozer.net/> (Acesso em: 03/10/2012).

**Figura 3** - Modelagem geométrica que representa o metrô de Porto Alegre.



Fonte: [http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades\\_galeria\\_trabalhos/ativ\\_cabri\\_2002\\_1/trensurb/trensurb.htm](http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_galeria_trabalhos/ativ_cabri_2002_1/trensurb/trensurb.htm)

Na próxima seção do artigo apresentam-se as construções dos alunos referentes ao bloco IV do experimento didático, acompanhado de alguns elementos produzidos nas análises *a posteriori*. Organizou-se nossa análise através dos registros escritos pelos estudantes no software Kompozer, os arquivos criados no software GeoGebra, a coletânea de modelagens geométricas construídas e, também, nos registros de observação realizados durante os momentos de trabalho e apresentação das duplas. Ao final, retomamos a questão inicial da pesquisa, procurando apresentar possíveis argumentos para justificar nossa resposta para o questionamento proposto na introdução desse texto.

### **Construção do modelo matemático – Bloco IV**

O último bloco da sequência didática foi reservado para a construção dos modelos escolhidos pelos estudantes. Foi com entusiasmo que os alunos se engajaram nas suas produções. Entre os modelos produzidos, encontramos muitos brinquedos, mas também automóveis, teleféricos, elevadores, portas, janelas e um palhaço malabarista. Aqui é importante destacar que foi no uso do site *Geometria em Movimento* que os estudantes da turma pesquisada tiveram o seu primeiro contato com geometria dinâmica. Naturalmente, nesse sentido, muitas das produções apresentadas podem ser classificadas como básicas e baseadas nas modelagens que foram

estudadas nos blocos I, II e III. Quando se compara as ideias iniciais apresentadas pelos estudantes sobre os modelos que programariam, apresentadas no início da experiência, com a construção efetivamente realizada, percebemos que, de modo geral, o desafio de trabalhar com a modelagem geométrica foi bem aceito.

Dentre as dezesseis duplas de trabalho, apenas quatro duplas não indicaram o modelo que seria construído. Ao considerar as duplas que fizeram uma indicação de modelo (12 duplas), constata-se que: nove mantiveram a escolha inicial conseguindo completar a construção (em alguns casos com pequenas adaptações) do modelo escolhido e três alteraram sua escolha inicial.

**Tabela 2** - Quadro comparativo entre os modelos propostos pelos alunos antes do experimento didático e o que eles realmente produziram

DUPLA	MODELO INDICADO NO INÍCIO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO	MODELO APRESENTADO NO FINAL DO EXPERIMENTO DIDÁTICO
1	Asa Delta sobrevoando um viaduto com automóveis em movimento e um campo de futebol com jogadores.	Ônibus
2	Prédio com porta abre e fecha + pessoas entrando e saindo.	Prédio com porta abre-fecha (modelo incompleto).
3	<i>Não indicaram o modelo escolhido</i>	Roda Gigante (modelo esteticamente incompleto)
4	Skatista fazendo manobras em uma pista.	Teleférico
5	Teleférico	Teleférico
6	<i>Não indicaram o modelo escolhido</i>	Roda Gigante
7	Ônibus + pessoas entrando e saindo.	Ônibus
8	Parque de diversão	Parque de diversão
9	Elevador	Elevador
10	Pracinha de brinquedos	Pracinha de brinquedos
11	Palhaço malabarista	Aluno A – Palhaço Malabarista
		Aluno B – Teleférico
12	Carro de corrida em pista (competição).	Carro de corrida em pista (competição).
13	Pula-pula + Gira-gira	Roda Gigante
14	<i>Não indicaram o modelo escolhido</i>	Porta Pantográfica (incompleta)
15	<i>Não indicaram o modelo escolhido</i>	Fachada da residência
16	Barco Viking	Barco Viking

Fonte: os autores

Constatou-se que nas duplas em que houve a troca do modelo a ser construído, o modelo previamente concebido foi tratado como muito complexo em sua elaboração, por exemplo: asa delta sobrevoando um viaduto com automóveis em movimento, campo de futebol com jogadores em movimento e skatista fazendo manobras em uma pista. Notou-se também, que os novos modelos indicados (ônibus, teleférico e roda gigante) já haviam sido escolhidos por outras duplas da turma. Nesse sentido, acredita-se que não houve a intenção de apenas cumprir a tarefa proposta visto que se tratava do mesmo grau de dificuldade já existente para a outra dupla.

Sobre o desenvolvimento dos “hábitos do pensamento”, verificou-se que o experimento didático conseguiu cumprir os objetivos pensados inicialmente. A partir da análise feita sobre as modelagens geométricas apresentadas pelos estudantes foram determinados seis diferentes níveis de produção. São estes:

- **Nível 0**: não é possível identificar o desenvolvimento de hábitos do pensamento.
- **Nível 1**: houve o desenvolvimento das habilidades de criar, inventar.
- **Nível 2**: houve o desenvolvimento das habilidades de criar, inventar; visualizar; reconhecer padrões e invariantes e raciocinar por continuidade.
- **Nível 3**: ocorreu o desenvolvimento das habilidades de criar, inventar; de visualizar; reconhecer padrões e invariantes; explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra e raciocinar por continuidade.
- **Nível 4**: houve o desenvolvimento das habilidades de criar, inventar; visualizar; reconhecer padrões e invariantes; explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra conseguindo-se estabelecer dois movimentos, não simultâneos dentro do modelo e de raciocinar por continuidade.
- **Nível 5**: notou-se o desenvolvimento das habilidades de criar, inventar; visualizar; reconhecer padrões e invariantes; explorar novas possibilidades, novos menus do GeoGebra conseguindo-se estabelecer dois movimentos simultâneos ao modelo e raciocinar por continuidade.

Os níveis de produção acima citados foram criados a partir dos hábitos do pensamento apresentados na Figura 1, sendo que os esforços dos pesquisadores foram concentrados em identificar a evolução do estudante, desde o planejamento até a construção dos modelos apresentados. Na tabela 3 apresenta-se uma classificação das duplas de acordo com os níveis de produção definidos anteriormente.

**Tabela 3** - Classificação dos modelos apresentados pelas duplas de acordo com o Nível de Produção.

<b>Níveis de Produção</b>	<b>Dupla – Modelo Geométrico</b>
Nível 0	Dupla 3 – Roda Gigante Dupla 14 – Porta Pantográfica
Nível 1	Dupla 2 – Prédio com porta abre e fecha
Nível 2	Dupla 5 – Teleférico Dupla 12 – Carro em pista de corrida Dupla 11 (Aluno B) - Teleférico Dupla 1 – Ônibus
Nível 3	Dupla 16 – Barco Viking Dupla 13 – Roda Gigante Dupla 6 – Roda Gigante
Nível 4	Dupla 4 – Teleférico Dupla 8 – Parque de diversão Dupla 9 – Elevador Dupla 11 (Aluno A) – Palhaço Malabarista Dupla 15 – Fachada da residência
Nível 5	Dupla 10 – Pracinha de brinquedos Dupla 7 – Ônibus

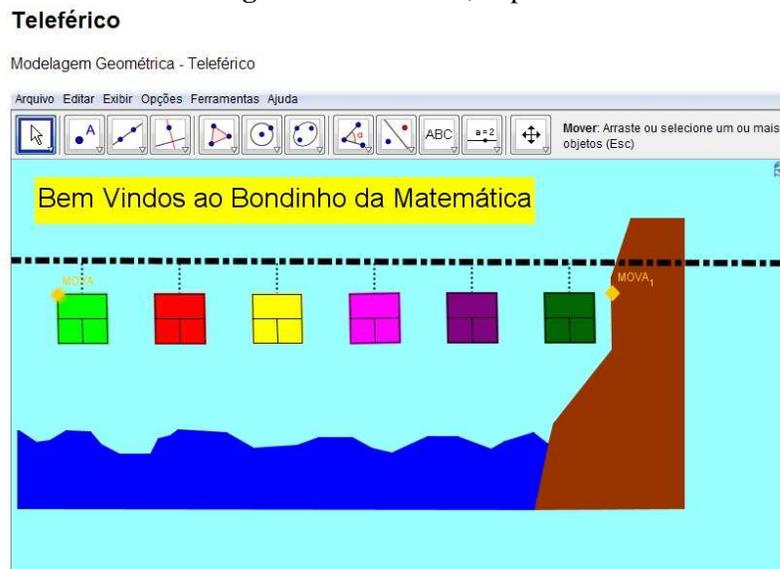
Fonte: os autores

### **Alguns objetos virtuais construídos pelos estudantes**

Na presente seção apresentamos alguns projetos desenvolvidos pelos estudantes, referentes à proposta do bloco IV de atividades. Todos os arquivos podem ser visualizados e obtidos no site Geometria em Movimento. Destaca-se que todas as figuras apresentadas a seguir

constituem modelagens de situações que possuem aspectos de geometria dinâmica, onde a sincronia dos movimentos ocorre pela movimentação de um único ponto na tela.

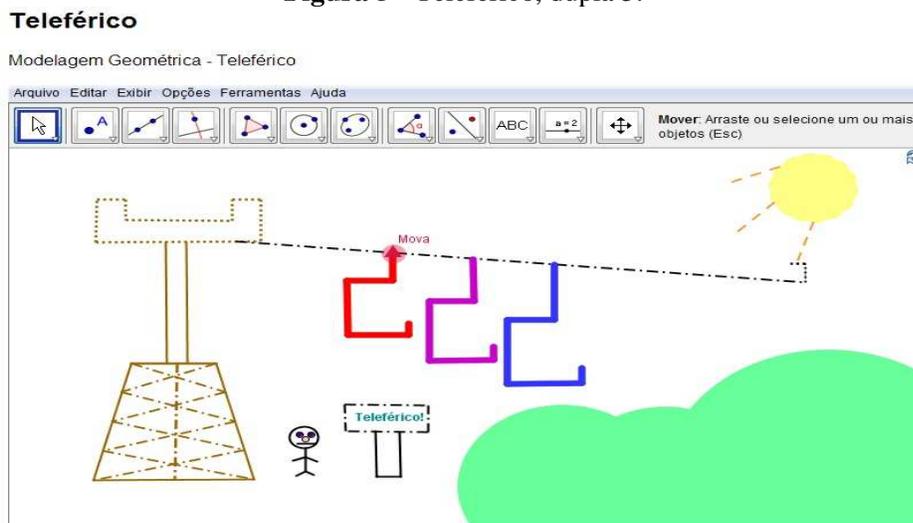
**Figura 4 - Teleférico, dupla 4.**



Dupla 4, criado com o [GeoGebra](http://www.geogebra.org)

Fonte: <http://odin.mat.ufrgs.br/modelagem/dupla4.html> (Acesso em 18/10/2012)

**Figura 5 - Teleférico, dupla 5.**



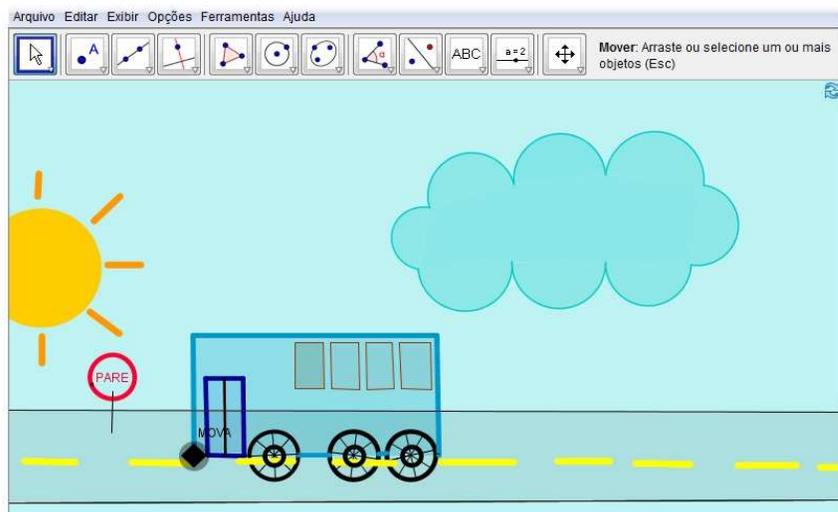
Dupla 5, criado com o [GeoGebra](http://www.geogebra.org)

Fonte: <http://odin.mat.ufrgs.br/modelagem/dupla5.html> (Acesso em 18/10/2012)

**Figura 6 - Ônibus, dupla 7.**

### Ônibus

Modelagem geométrica - Ônibus



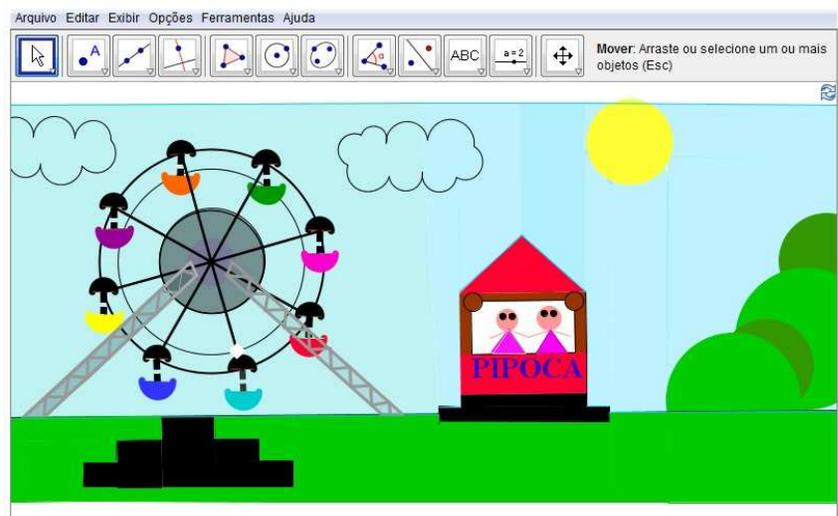
Dupla 7, criado com o [GeoGebra](http://www.geogebra.org)

Fonte: <http://odin.mat.ufrgs.br/modelagem/dupla7.html> (Acesso em 18/10/2012)

**Figura 7 - Roda gigante, dupla 6.**

### Roda Gigante

Modelagem Geométrica - Roda Gigante



Dupla 6, criado com o [GeoGebra](http://www.geogebra.org)

Fonte: <http://odin.mat.ufrgs.br/modelagem/dupla6.html> (Acesso em 18/10/2012)

### **Síntese das análises *a posteriori* e avaliação dos resultados**

O encaminhamento das atividades propostas no experimento didático buscou verificar e desenvolver os hábitos do pensamento conforme propõe Goldenberg (1998a, 1998b). Entende-se que ao identificar movimentos que estão presentes no cotidiano e com isso perceber a geometria envolvida, os estudantes puderam observar o mundo sob uma ótica da matemática. Assim, eles iniciaram a construção de seus próprios modelos geométricos, com aprofundamento dos hábitos do pensamento e, conseqüentemente, das diversas formas do pensamento matemático.

Com a realização da seqüência didática aliada ao uso de recursos tecnológicos, considera-se que a proposta foi além do tradicional estudo de ponto, reta e plano presente na matemática escolar do Ensino Fundamental. O software GeoGebra, com suas inúmeras possibilidades, permitiu que fosse feita uma abordagem dinâmica de diversos assuntos da geometria. Nesse sentido, entende-se que a atividade de modelagem geométrica funcionou como um incentivo para a aprendizagem dos estudantes e, desta forma, a geometria dinâmica potencializou o trabalho voltado para o desenvolvimento dos hábitos do pensamento matemático. Sobre o trabalho desenvolvido destacam-se os seguintes aspectos:

- Houve aceitação positiva dos alunos em relação ao software GeoGebra e ao site Geometria em Movimento, o que potencializou o estudo e o entendimento das relações matemáticas trabalhadas durante o experimento didático.
- A utilização do software Kompozer para a elaboração dos registros escritos dos alunos foi importante, pois ao final do experimento didático as ideias e construções dos alunos estavam organizadas em textos que facilitavam a leitura dos pesquisadores e também dos demais colegas da turma.
- Notou-se comprometimento e interesse dos alunos na realização das atividades, onde poucos momentos de dispersão ocorreram durante as aulas.
- Os alunos demonstraram autonomia para fazer explorações com o software, em decorrência da familiaridade e confiança na utilização de tecnologias;

- Os alunos demonstraram um maior desenvolvimento neste experimento didático, do quarto hábito do pensamento, caracterizado pelo ato de criar, inventar, o que já era esperado considerando o caráter investigativo proporcionado na atividade de modelagem geométrica.
- Uma dificuldade percebida diante da turma foi no momento de efetuar os registros escritos das relações matemáticas observadas, o que evidenciou não ser a redação de textos matemáticos uma forma de comunicação escrita das ideias um hábito cultivado permanentemente na escola.

Nessa pesquisa, evidenciou-se que a partir do momento que professor considera a possibilidade de trabalhar com a modelagem geométrica em suas aulas, ocorre uma modificação no olhar dos alunos diante das situações cotidianas onde se visualiza a presença da matemática. Com os dados coletados nesta pesquisa evidenciou-se uma lacuna na formação matemática dos alunos; e esta se manifesta na comunicação por escrito das ideias matemáticas e aqui, reafirma-se a importância de ser considerada essa questão na elaboração do planejamento pedagógico do professor.

### **À guisa de algumas conclusões**

Através das ideias de Goldenberg procurou-se com essa pesquisa mostrar que a modelagem geométrica pode ser uma proposta para o professor abordar conceitos de geometria no Ensino Fundamental. Através de uma metodologia de trabalho baseada nos princípios da engenharia didática, concebeu-se uma sequência didática que possibilitasse estimular a percepção, observação e a construção de elementos matemáticos necessários para o desenvolvimento e construção de conceitos da matemática.

O site Geometria em Movimento é um possível produto, resultado dessa pesquisa. Durante a aplicação das atividades, o site serviu como um canal de comunicação entre professor e estudantes, ampliando-se consideravelmente a fronteira do tempo e espaço da aprendizagem, uma vez que foi possível estender a discussão para além da sala de aula. Com a pesquisa, constatou-se

que a abordagem dos conceitos: ponto, reta, semi-reta, segmento de reta, retas paralelas, retas perpendiculares, ponto médio, ângulos e quadriláteros ganharam um novo significado através da geometria dinâmica, onde no início notava-se que os estudantes esperavam ser guiados pelo professor e à medida que as aulas ocorriam, eles aumentavam gradualmente a autonomia e poder de investigação na execução das atividades.

E, finalmente, a questão apresentada na introdução do texto: *Com a modelagem geométrica é possível desenvolver hábitos de pensamento matemático no Ensino Fundamental?* Acredita-se que sim; os ambientes de geometria dinâmica são fundamentais para que ocorra esse tipo de experimento didático. Nos ambientes de geometria dinâmica o aluno pode construir, simular movimentos e manipular construções diretamente na tela do computador, onde os efeitos produzidos pela sua construção provocam nos alunos uma vontade de constante aperfeiçoamento. E em cada novo aperfeiçoamento, são novos hábitos de pensamentos que estão criados ou sendo melhorados a cada instante.

### **Notas**

\*Mestre em Ensino de Matemática (UFRGS). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense (IFC), campus Camboriú. Email: melissa@ifc-camboriu.edu.br

\*\*Mestre em Ensino de Matemática (UFRGS). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), campus Caxias do Sul. E-mail: rodrigo.silva@caxias.ifrs.edu.br

### **Referências**

ARMELLA, L. M., KAPUT, J. J. **From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives**. 2008. Disponível em: [http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm\\_2008\\_v68/11semiotic.pdf](http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/11semiotic.pdf). Acesso em 03/10/2012

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. Didáticas das matemáticas (Dir. Jean Brun). Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. (Horizontes Pedagógicos).

BASSO, M. A., GRAVINA, M. A. **Mídias Digitais na Educação Matemática**. In: Matemática, Mídias Digitais e Didática – tripé para a formação de professores de Matemática. Porto Alegre. Cap. 1, p.4-25. 2011.

BORRÕES, M. **O Computador na Educação Matemática**. Programa Nônio Século XXI. 1998.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**. São Paulo: Ática, 1988.

FREUDENTHAL, H. Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel, 1973, p.407. In: FONSECA, Maria da Conceição F. R. et al. **O ensino de geometria na escola fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais**. Belo Horizonte, Autêntica, 2001.

GOLDENBERG, E. P.. **“Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (I)**. Educação e Matemática, 47, 31-35. 1998(a).

\_\_\_\_\_. **“Hábitos de pensamento” um princípio organizador para o currículo (II)**. Educação e Matemática, 48, 37-44. 1998(b).

GOULART, J.B. **O estudo da equação  $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$  utilizando o software Grafeq – Uma proposta para o ensino médio**. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. UFRGS. 2009.

GRAVINA, M. A., SANTAROSA, L. M.. **Aprendizagem Matemática em ambientes informatizados**. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.

GRAVINA, M. A.; DIAS, M. T.; BARRETO, M. M.; MEIER, M.. **Geometria Dinâmica na Escola**. In: Matemática, Mídias Digitais e Didática – tripé para a formação de professores de Matemática. Porto Alegre. Cap. 2, p.26-45. 2011(a).

JORGE FILHO, A. **Revista “Construir Notícias”**. Novembro/Dezembro, nº 31, ano 5. 2006.

MORAN, J. M; BEHRENS, M.A; MASETTO, M.T. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica**. Campinas. São Paulo: Papyrus. 2003.

**Recebido em: Agosto de 2014**  
**Aprovado em: Abril de 2015**