

SISTEMAS LINEARES E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: RESULTADOS DE UM EPISÓDIO DE ENSINO COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Wilian Barbosa Travassos*
Veridiana Rezende**
Mariana Moran***

Resumo: Apresentamos, neste artigo, os resultados de um projeto de Iniciação Científica desenvolvido pelo primeiro autor, sob orientação das demais autoras. A pesquisa desenvolvida teve como sujeitos 15 alunos do 3º ano do Ensino Médio de um colégio público do interior do Paraná, e teve como objetivos: i) identificar os registros prévios mobilizados por alunos pertencentes ao referido contexto, mediante a resolução de situações-problema que envolvem o conceito de sistemas lineares; ii) oportunizar aos sujeitos da pesquisa a articulação entre diferentes registros de representação semiótica relacionados aos sistemas de equações lineares. Como procedimentos metodológicos, elaboramos três situações-problema relacionadas a sistemas lineares de ordem 2, que foram propostas aos sujeitos da pesquisa em horário de aula, realizadas no laboratório de Informática. As análises dos registros mostram que os alunos não se recordavam dos modos de resolução de sistemas de ordem 2, e que as atividades favoreceram a evolução dos conhecimentos dos alunos, bem como a apropriação, conversão e tratamento, mesmo que local, de diferentes registros, relacionados aos sistemas de equações lineares.

Palavras-chave: Álgebra. Ensino de Matemática. Ensino Médio.

LINEAR SYSTEMS AND RECORDS OF SEMIOTIC REPRESENTATION: RESULTS OF A TEACHING EPISODE WITH HIGH SCHOOL STUDENTS

Abstract: In this article, we present the results of the Scientific Initiation project developed by the first author, under the direction of the other authors. The work refers to a survey performed with 15 students of the 3rd year of high school in a public school in Paraná, which aimed at: i) identifying the previous records mobilized by students belonging to the referred context, by the solution of problem-situations that involve the concept of linear systems; ii) creating opportunities for the research subjects to build a link between different records of semiotic representation related to systems of linear equations. For the methodological procedures, we developed three problem-situations related to linear systems of second order, which were proposed for the research subjects in class time, held in the Computer Lab. The analyzes of the records show that the students did not remember the resolution methods for systems of second order, and that the activities enabled the development of the students' knowledge, as well as appropriation, conversion and treatment, although local, of different records related to systems of linear equations.

Keywords: Algebra. Teaching of Mathematics. High School.

Introdução

Apresentamos, neste artigo, os resultados do desenvolvimento de um projeto de Iniciação Científica¹ realizada pelo primeiro autor, sob a orientação das demais autoras. Para o desenvolvimento do projeto, estabelecemos os seguintes objetivos: i) identificar os registros prévios mobilizados por alunos do 3º ano do Ensino Médio mediante a resolução de situações-problema que envolvem o conceito de sistemas lineares; ii) oportunizar aos sujeitos da pesquisa a articulação entre diferentes registros de representação semiótica relacionados aos sistemas de equações lineares.

O desenvolvimento da pesquisa foi fundamentado na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. De acordo com Duval (2003), aprender matemática é diferente de se aprender outras ciências, como física, química ou biologia, por se tratar de uma ciência totalmente abstrata, sendo necessário o intermédio das representações, para que assim, ocorra sua apreensão. Para o pesquisador, recorrer a diversos registros de representação semiótica parece “[...] uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com sua representação e que eles possam ser reconhecidos em cada uma de sua representação” (DUVAL, 2012b, p.270).

Conhecer e articular diferentes representações de um mesmo objeto matemático é, segundo Duval (2003), um caminho para a compreensão do conceito. Nesse mesmo sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio para a disciplina de Matemática – PCNEM (BRASIL, 1999) enfatizam a importância de os alunos: reconhecerem representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações (p.42); e transcreverem mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa (p.46).

No que se refere ao conteúdo sistema linear, nota-se que ele pode ser estudado articulando diferentes registros de representação semiótica. Por exemplo, dada uma situação-problema

¹ Projeto de pesquisa intitulado SISTEMAS LINEARES E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: UM ESTUDO COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO, realizado no período de Agosto/2013 à Julho/2014.

relacionada a sistema de equações lineares, podemos interpretá-la algebricamente por meio de equações. Na sequência, é possível resolver o sistema utilizando o método de Cramer² e, ainda, construir um gráfico que representa a solução do referido sistema de equações lineares. Nesse processo, exploramos a conversão de quatro diferentes registros para os sistemas lineares: registro língua natural³, registro algébrico, registro matricial e registro gráfico.

Entretanto, os livros didáticos brasileiros de Matemática do Ensino Médio nem sempre apresentam tais coordenações entre registros relacionados a sistemas lineares. E, além disso, conforme aponta Battaglieri (2008), alguns livros priorizam o registro algébrico para o estudo deste conteúdo – fato que, segundo Duval (2012a), pode levar o aluno a confundir o objeto estudado (sistemas lineares) com a representação algébrica, que está mais presente nos livros didáticos. Sendo assim, e considerando que o livro didático ainda é o principal guia do professor em sala de aula, inferimos que as diferentes representações dos sistemas lineares nem sempre chegam às aulas de Matemática, acarretando uma aprendizagem parcial do objeto estudado.

Desse modo, com a intenção de investigar e colaborar para ampliar os conhecimentos dos alunos relacionados aos sistemas lineares, elaboramos três situações-problema envolvendo sistemas lineares, contextualizadas com vocabulários que fazem parte do cotidiano dos adolescentes, a fim de motivá-los a resolver os problemas propostos.

Os sujeitos da pesquisa foram 15 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma instituição pública do interior do Paraná, e as atividades foram implementadas em horário convencional de aula. A fundamentação teórica, a metodologia da pesquisa e o resultado das análises estão descritos a seguir.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e sistemas de equações lineares

Para o desenvolvimento desta pesquisa, inicialmente foram realizados estudos sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica do filósofo e psicólogo francês Raymond

² Método de resolução de sistemas lineares por meio de determinantes. Aplica-se apenas em sistemas lineares com n equações e n incógnitas.

³ Para o presente trabalho, entende-se por língua natural o português – língua oficial do Brasil.

Duval. A teoria de Duval, para os processos de ensino e aprendizagem, consiste em desenvolver no aluno a capacidade de coordenar diferentes representações de um mesmo objeto de modo a explorar seus conceitos e propriedades.

Ao trabalhar com objetos na matemática, trabalha-se com entes matemáticos que podem ser reconhecidos somente por meio de suas representações. Neste caso, os objetos não podem ser confundidos com suas representações, pois, desse modo, provocariam uma perda de compreensão, podendo se tornar inutilizáveis nos casos em que estiverem fora do contexto aprendido (DUVAL, 2009). Assim, surge o paradoxo da compreensão em matemática formulado por Duval (2003, p.21): “Como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?” Por isso a importância de se trabalhar com diferentes representações sem impor limites à capacidade de compreensão do aluno a respeito desses objetos.

A restrição a um único registro, então, não garante a compreensão, ou seja, não proporciona necessariamente a aprendizagem do conceito matemático que está sendo estudado. Segundo Flores (2006, p.4),

[...] permanecer num único registro de representação significa tomar a representação como sendo de fato o objeto matemático – por exemplo, $f(x) = x$ seria a função, e não uma representação do objeto matemático. Logo, para não confundir o objeto e o conteúdo de sua representação é necessário dispor de, ao menos, duas representações, de modo que estas duas devam ser percebidas como representando o mesmo objeto. Além disso, é preciso que o estudante seja capaz de converter, de transitar entre uma e outra representação (FLORES, 2006, p.4).

Duval (2012b) reflete que o transitar entre diferentes representações semióticas, além de expandir a capacidade de compreensão, auxilia nos sistemas de representação com dificuldades próprias de significado e funcionamento. Para o autor (2009, 2012b), as formas de representar objetos ocorrem em sistemas semióticos que cumprem basicamente três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

1. a formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: com regras de utilização, de identificação, de reconhecimento da representação e possibilidades de utilização para tratamentos; 2. o tratamento: “O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro” (DUVAL, 2012b, p.272).

Como exemplos de tratamentos, temos: a paráfrase e a inferência, que são formas de tratamento em língua natural cumprindo o papel de reformular um determinado enunciado com o objetivo de explicá-lo ou substituí-lo; a reconfiguração, que é um tipo particular de tratamento para as figuras geométricas; a anamorfose, uma forma de tratamento figural que consiste em modificações óticas da figura; e o cálculo, que é um tratamento feito sobre a escrita simbólica de algarismos e letras (DUVAL, 2009, 2012a, 2012b).

Sendo assim, para cada registro, existem regras de tratamento específicas que resultam em uma representação de mesmo registro que a (representação) de partida. Um exemplo de tratamento bem simples, no registro algébrico, é a resolução de um sistema linear até chegar a sua solução, conforme o quadro 1:

Quadro 1: Exemplos de tratamentos

TRATAMENTO ALGÉBRICO - SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES COM 2 INCÓGNITAS	
MÉTODO DA ADIÇÃO	MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO
$\begin{aligned} (i) \quad & \begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 84 \end{cases} \\ \\ & \begin{cases} -2x - 2y = -60 \\ \underline{4x + 2y = 84} \end{cases} \\ \\ & 2x = 24 \quad \rightarrow \quad x = 12 \\ \\ (i) \quad & (12) + y = 30 \quad \rightarrow \quad y = 18 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (i) \quad & \begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 84 \end{cases} \\ \\ (i)' \quad & x = y = 18 \\ \\ (i)' \rightarrow (ii) \quad & 4(30 - y) + 2y = 84 \\ \\ 120 - 4y + 2y = 84 \quad & \rightarrow \quad y = 18 \\ \\ (i) \quad & x + (18) = 30 \quad \rightarrow \quad x = 12 \end{aligned}$

Fonte: Autores

1. *a conversão:*

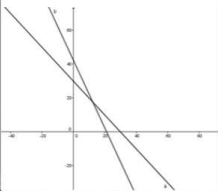
A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter) (DUVAL, 2012b, p.272).

Duval também deixa explícito que a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento, e que pode ser observada em situações simples, como, por exemplo, no cálculo numérico:

Alunos podem, muito bem, efetuar a adição de dois números com sua expressão decimal e com sua expressão fracionária e podem não pensar em converter, se isto for necessário, a expressão decimal de um número em sua expressão fracionária (e reciprocamente), ou mesmo não conseguir efetuar a conversão. Muitas vezes é este tipo de exemplo que é colocado para explicar porque os alunos chegam ao ensino médio e não sabem calcular. É esquecer que a expressão decimal, a expressão fracionária e a expressão com expoente constituem três registros diferentes de números (DUVAL, 2012b, p. 272-273).

Como exemplo de conversão relacionada ao sistema linear, temos uma situação-problema que parte da língua natural para a linguagem simbólica, chegando ao registro figural, conforme o quadro 2:

Quadro 2: Exemplos de conversões a partir de uma situação - problema

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO - SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES COM 2 INCÓGNITAS																														
LÍNGUA NATURAL	SIMBÓLICA		GRÁFICA																											
SITUAÇÃO PROBLEMA Num parque de diversões, o ingresso para a roda gigante mais o ingresso para montanha russa custa R\$30,00. Sabendo que os preços são fixos, João comprou 4 ingressos para roda gigante e 2 ingressos para montanha russa, pagando R\$84,00. Quanto custa cada ingresso?	ALGÉBRICA	NUMÉRICA	PLANO CARTESIANO 																											
	SISTEMA $\begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 84 \end{cases}$	MATRICIAL $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 84 \end{bmatrix}$		TABULAR <table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">1ª Equação</th> <th colspan="2">2ª Equação</th> </tr> <tr> <th>x</th> <th>y</th> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-2</td> <td>32</td> <td>-2</td> <td>46</td> </tr> <tr> <td>-1</td> <td>31</td> <td>-1</td> <td>44</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>30</td> <td>0</td> <td>42</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>29</td> <td>1</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>28</td> <td>2</td> <td>38</td> </tr> </tbody> </table>	1ª Equação		2ª Equação		x	y	x	y	-2	32	-2	46	-1	31	-1	44	0	30	0	42	1	29	1	40	2	28
1ª Equação		2ª Equação																												
x	y	x	y																											
-2	32	-2	46																											
-1	31	-1	44																											
0	30	0	42																											
1	29	1	40																											
2	28	2	38																											

Fonte: Autores

De acordo com as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná - DCE (PARANÁ, 2008), os sistemas lineares devem ser estudados no Ensino Médio, e fazem parte do conteúdo estruturante Números e Álgebra. Trata-se de um conteúdo que favorece a resolução de diversos problemas do cotidiano e que pode envolver duas ou mais variáveis matemáticas. Conhecer os diferentes tipos de problemas envolvendo sistemas lineares, e a possibilidade de diferentes representações, como a língua natural, a representação gráfica e a algébrica, é, de acordo com a teoria de Duval (2003), um caminho para a compreensão do conceito de sistemas lineares.

Duval (2003) considera que o funcionamento do pensamento em Matemática apresenta certas especificidades em relação a outros domínios do conhecimento. Sobretudo, por ser uma ciência abstrata, é preciso considerar as diferenças existentes entre a atividade cognitiva em Matemática e em outras Ciências, tais como Biologia, Física ou Química, nas quais os conceitos podem ser observados ou manipulados por meio de experiências.

De acordo com o pesquisador, para a compreensão de um conceito matemático, é primordial se considerar as representações semióticas. Duval (2003) chama atenção para o desenvolvimento da história da Matemática, observando que “[...] o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático” (p.13). Ele cita o caso dos números, explicando que seu acesso está associado à utilização de um sistema de representação (um símbolo) que permite designá-los.

No entanto, além da importância dos registros de representação, Duval (2003) considera a diversidade de representações semióticas que deve ser utilizada em Matemática. O pesquisador cita os sistemas de numeração, as escritas algébricas, as figuras geométricas, as representações gráficas e a língua natural. Desse modo, o autor (DUVAL, 2003) defende que a compreensão em Matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica, ou seja, passar de um registro para outro registro é essencial para a compreensão de um conceito matemático.

Para Duval (2011), os registros são sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos que satisfazem, basicamente, duas condições:

1. Produzem representações que permitem acesso e exploração a objetos inacessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente.
2. Permitem transformações em novas representações.

Sabemos que o livro didático ainda é o principal guia dos professores em sala de aula. Por isso, considerando a importância da diversidade de registros e conversões entre registros para a compreensão de um conceito matemático, conforme apontado por Duval, consideramos pertinente que os livros didáticos de Matemática explorem diferentes registros de um mesmo conceito matemático e oportunizem a conversão entre os registros.

No entanto, no que se refere ao conceito de sistema linear, a pesquisa de Battaglieri (2008) mostra que os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio nem sempre favorecem a conversão entre os registros. Em sua dissertação de mestrado, a pesquisadora analisou três livros didáticos de Matemática do Ensino Médio à luz da teoria de Registros de Representação Semiótica, e constatou que as conversões estão pouco presentes neles, e que a conversão relacionada aos sistemas lineares predominante nos livros parte da língua natural para o algébrico. Battaglieri (2008) detectou carência, tanto nos exemplos e exercícios resolvidos quanto nos exercícios para resolver, quanto às conversões do gráfico para o algébrico, do algébrico para a língua natural, e do gráfico para a língua natural, relacionadas a sistemas lineares.

É preciso ressaltar que a não coordenação entre os registros de representação, conforme vem ocorrendo nos livros didáticos de Matemática, está intimamente ligada ao fato de os alunos não compreenderem a essência e o verdadeiro significado dos conceitos matemáticos, ficando limitados ao conhecimento de apenas um dos registros de representação do objeto.

Para o episódio de ensino aqui relatado, elaboramos três situações-problema, que foram propostas aos sujeitos da pesquisa com a intenção de identificar seus registros prévios e oportunizar a mobilização entre diferentes registros de representação relacionados ao conceito de sistema linear.

Descrição da implementação e análises das atividades

As atividades foram implementadas pelo aluno de Iniciação Científica, primeiro autor deste trabalho, em horário de aula convencional, em três aulas de aproximadamente 35 minutos cada, em dias distintos, com 15 alunos do 3^a ano do Ensino Médio de um colégio público situado em uma cidade do interior do Paraná.

As aulas foram realizadas no laboratório de informática do colégio, com a finalidade de explorar as representações gráficas dos sistemas de equações utilizando o *software GeoGebra*, além dos recursos lápis e papel. Os laboratórios contêm aproximadamente 20 computadores, porém, na primeira aula, apenas dez funcionaram e, na segunda, apenas sete, durante a implementação das atividades. Por esse motivo, as atividades foram realizadas em duplas ou em trios.

As três situações-problema elaboradas são relacionadas a sistemas de equações lineares envolvendo duas equações e duas incógnitas. Para a elaboração dos problemas na língua natural, foram escolhidos temas e vocabulários que acreditamos fazerem parte do cotidiano dos alunos, relacionados à lanchonete de sua cidade, redes sociais e televisão. A intenção foi elaborar problemas que pudessem atrair a atenção dos alunos, de maneira que despertassem o interesse pela resolução em busca do resultado. As atividades estão disponibilizadas no quadro 3 a seguir.

O objetivo inicial era trabalhar com situações envolvendo três equações e três incógnitas. Porém, o professor de Matemática que ministrou aulas para essa mesma turma no ano anterior (2^o ano) nos informou que, em relação a sistema linear, ele havia trabalhado os métodos algébricos da Adição, Subtração e Escalonamento de situações-problema, observando que os alunos tinham dificuldades em acompanhar o conteúdo. O registro gráfico não havia sido trabalhado com os alunos.

Desse modo, elaboramos o primeiro problema envolvendo duas equações e duas incógnitas para que os alunos resolvessem com seus conhecimentos prévios, e também para identificarmos seus registros e resoluções. Após a implementação, percebemos as dificuldades dos alunos com a resolução algébrica e gráfica, e, por esse motivo, optamos por continuar com a

implementação de outros dois problemas de ordem 2, no lugar de avançar o conteúdo para três equações e três incógnitas, mas procurando aumentar o grau de dificuldade dos problemas elaborados.

Quadro 3: Atividades implementadas nesta pesquisa

Problema 1: Elizabeth chamou suas amigas para ir à Lanchonete *Maresia*⁴. Chegando lá, encontrou um cartaz com as seguintes informações:



Dados fictícios

Para dividir as despesas com as amigas, Elizabeth precisa saber o preço unitário do sanduíche e do suco.

- Como Elizabeth pode resolver seu problema?
- Resolva o problema e determine os preços unitários do suco e do sanduíche.
- Você saberia resolver este problema por meio de gráfico? Em caso positivo, resolva-o utilizando gráficos.

Problema 2: Luís e Ana resolveram criar grupos nas redes sociais para divulgar informações e simulados do ENEM para os alunos do Colégio Estadual 14 de Dezembro. Eles criaram dois grupos, sendo um grupo no *Facebook*, e outro no *Instagram*. Sabe-se que, no primeiro dia, o número de seguidores do *Facebook* mais o número de seguidores do *Instagram* atingiu 59 seguidores. No segundo dia, o número de seguidores do *Facebook* foi 4 vezes maior que o primeiro dia, enquanto o número de seguidores do *Instagram* dobrou, totalizando 178 seguidores.

- Quantos seguidores cada rede social (*Facebook* e *Instagram*) obteve no primeiro dia?
- E no segundo dia, quantos seguidores cada rede social (*Facebook* e *Instagram*) obteve?
- Você saberia determinar a quantidade de seguidores de cada rede social no primeiro dia utilizando gráficos?

Problema 3: Atualmente, é costume entre os jovens a troca de mensagens por meio do celular. Com o aumento desta tendência, foi desenvolvido um aplicativo para celular chamado *WhatsApp*. O *WhatsApp* é capaz de enviar mensagens, fotos, gravações de áudio e vídeo entre smartphones que possuem o aplicativo instalado, utilizando apenas a conexão com a internet.

João utiliza o *WhatsApp* para trocar informações com seus amigos. No primeiro dia de férias, João

⁴ Maresia é o nome da principal lanchonete da cidade em que foram realizadas as atividades.

enviou 67 informações entre mensagens e gravações de áudio. No dia seguinte, João dobrou a quantidade de mensagens enviadas e triplicou o número de gravações de áudio, enviando no total, 139 informações.

- a) Qual foi o número de mensagens e gravações de áudio que João enviou no primeiro dia?
- b) Você saberia resolver este problema por meio de gráfico? Em caso positivo, resolva-o utilizando gráficos.

Fonte: Autores

Para cada aluno, foi entregue uma folha contendo uma atividade impressa. Como os alunos cursavam o 3º ano do Ensino Médio e, segundo o professor da turma, já haviam estudado sistema de equações lineares de três equações e três incógnitas no ano anterior, pedimos que eles resolvessem o problema utilizando seus conhecimentos prévios.

Ao término de cada atividade, as folhas eram recolhidas a fim de analisar os registros dos alunos e, em seguida, a atividade era resolvida no quadro pelo primeiro autor deste trabalho, utilizando o registro algébrico e o método da adição. Para a resolução envolvendo o registro gráfico, foi utilizado o *software GeoGebra*, sendo que, inicialmente, foi realizada uma explicação sobre como manuseá-lo e, em seguida, um acompanhamento da resolução pelos alunos em cada computador. A correção das atividades acontecia após o término da resolução pelos alunos para não influenciarmos em suas respostas.

O primeiro problema, além dos números menores em relação aos outros problemas, contém uma imagem que favorece a interpretação de um sistema linear na forma algébrica. Por exemplo, considerando x como suco e y como sanduíche, a representação algébrica do problema 1 é:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Os segundo e terceiro problemas, além de não terem o apoio da imagem, levam os alunos a interpretarem as informações para representá-las algebricamente. Além disso, estes problemas envolvem informações relacionadas ao dobro e triplo de uma quantidade, vocabulários matemáticos com os quais nem todos os alunos estavam familiarizados.

Consideramos, também, que a dificuldade do terceiro problema em relação ao segundo, principalmente no que diz respeito ao uso do método de resolução por tentativa e erro, está relacionada ao fato que a diferença entre os valores solução destes problemas são maiores. Pois, nesse processo de resolução os alunos atribuíam a metade do resultado da primeira equação para cada incógnita e, a partir disso, subtraíam uma unidade de uma incógnita e adicionavam uma unidade na outra, até que a igualdade para as duas equações fossem satisfeita. Assim, quanto maior fosse a diferença entre os valores das incógnitas, maior seria o número de tentativas para encontrarem a solução.

Assim, considerando que os alunos não estavam familiarizados com a resolução dos problemas apresentados, e considerando que o grau de dificuldade dos problemas, no que se refere às informações presentes, aumentava gradativamente, percebemos um avanço de seus conhecimentos diante das atividades implementadas.

A turma consistia de 15 alunos. No entanto, apenas 7 compareceram em todas as aulas durante a nossa pesquisa. Sendo assim, para a análise deste trabalho, consideramos apenas os registros destes 7 alunos, atribuindo um código de A1 a A7 para preservar seu anonimato.

Uma síntese dos registros utilizados pelos alunos nas três atividades está apresentada no quadro 4:

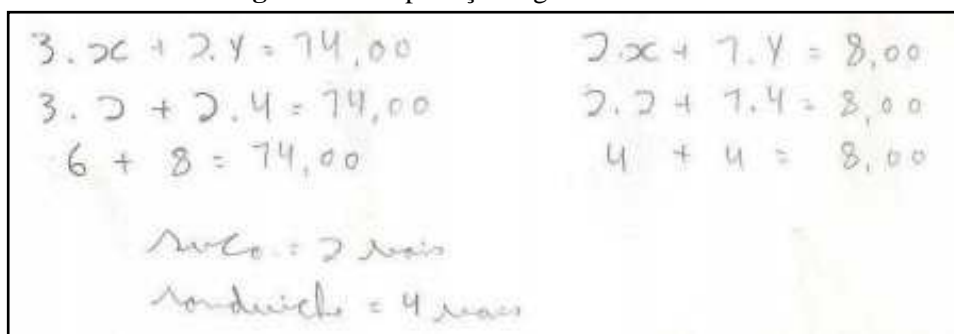
Quadro 4: Síntese dos registros dos alunos

Atividades	Realizou corretamente a conversão Língua Natural - Algébrico		Resolveu o problema utilizando o método:		
	Sim	Não	Adição	Tentativa e erro	Não fez ou errou
Atividade 1	Nenhum aluno	A1, A2, A3 A4, A5, A6 A7	Nenhum aluno	A1, A2, A3 A4, A5, A6, A7	Nenhum aluno
Atividade 2	A2	A1, A3, A4 A5, A6, A7	A2, A3	A1, A4, A5, A6 A7	A1, A3
Atividade 3	A2, A3, A4, A5 A6, A7	A1	A2, A3, A5 A6, A7	Nenhum aluno	A1, A4

Fonte: Autores

As três atividades implementadas referem-se a problemas que podem ser resolvidos com sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas. No entanto, na primeira atividade, nenhum aluno conseguiu resolver o problema algebricamente. Apenas dois alunos, A2 e A6, apresentaram indicativos de interpretação algébrica do problema, conforme exemplifica figura 1, que diz respeito à interpretação algébrica do aluno A2:

Figura 1: Interpretação algébrica do aluno A2



$3x + 2y = 74,00$	$2x + 7y = 8,00$
$3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 74,00$	$2 \cdot 2 + 7 \cdot 4 = 8,00$
$6 + 8 = 74,00$	$4 + 4 = 8,00$
$\text{Sanduiche} = 2 \text{ reais}$	
$\text{Suco} = 4 \text{ reais}$	

Fonte: Autores

No entanto, todos os alunos apresentaram a resposta correta para o problema proposto. Eles resolviam o problema pelo método tentativa e erro e apresentavam a resposta em língua natural, atribuindo valores e conferindo o resultado na calculadora do celular ou no computador. Esse fato não ocorreu apenas com os 7 alunos cujas respostas analisamos, mas com os 15 alunos que estavam presentes nesta aula. O método por tentativa e erro é denominado pelos alunos como “conta de mais”, conforme exemplifica o registro a seguir, no qual o aluno comenta que *é só ir tentando* (atribuindo valores para x e y) *que dá o valor*:

Figura 2: Resposta do aluno A8

a) Como Elizabeth pode resolver seu problema?

Resposta:

o suco ele já sabe quanto que vai dar
e ele usa o resto de 7

b) Resolva o problema e determine os preços unitários do suco e do sanduíche.

Resposta:

suco: R\$ 2 reais
sanduíche: R\$ 4 reais

Fonte: Autores

No que diz respeito ao item c da primeira atividade, que solicitava a resolução gráfica do problema, nenhum aluno construiu o gráfico no plano cartesiano. Dois alunos, A3 e A4, apresentaram, de modo incorreto, um gráfico de colunas, como pode ser verificado na resposta de A3:

Figura 3: Registro do aluno A3



Fonte: Autores

As análises das respostas dos alunos para a primeira atividade mostram que, apesar de eles cursarem o 3º ano do Ensino Médio, não indicaram conhecimentos precisos a respeito do conteúdo sistema linear. Esta afirmação é baseada no fato de que nenhum aluno resolveu

algebricamente o problema proposto: todos utilizaram o método por tentativa e erro para apresentarem a resposta ao problema. Como o problema envolvia valores baixos e uma situação próxima do cotidiano deles, consideramos que isso favoreceu o teste de valores que satisfaziam o problema proposto. Porém, um modo formal de resolver o problema algebricamente não foi apresentado por nenhum dos alunos.

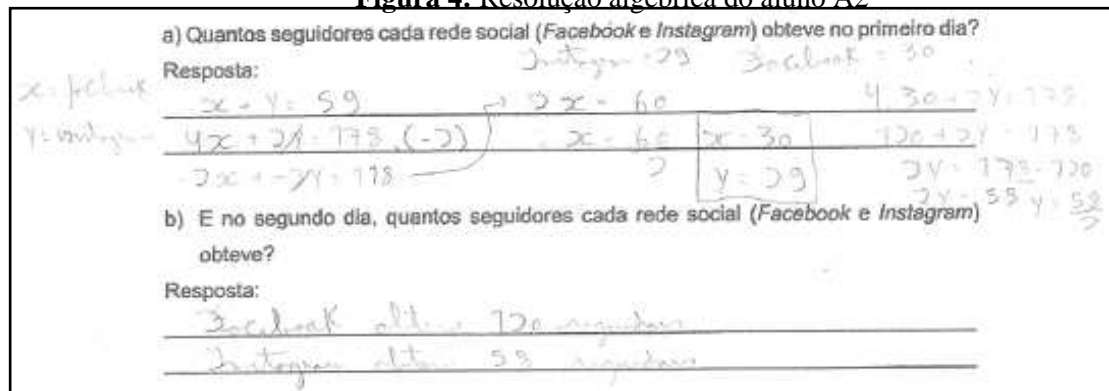
Em relação à resolução gráfica, nenhum aluno a apresentou corretamente por meio de representação no plano cartesiano. O registro gráfico apresentado por dois alunos foi o gráfico de colunas, que não faz sentido para apresentar a solução do problema proposto.

Assim que os alunos terminaram a resolução da atividade proposta, as folhas foram recolhidas e, na aula seguinte, o primeiro autor deste trabalho resolveu o problema no quadro, utilizando o método algébrico da adição. Em seguida, explicou aos alunos sobre a interpretação gráfica das soluções de sistemas lineares no plano cartesiano, e realizou a representação com o auxílio do *software GeoGebra*.

Tínhamos a intenção de que, nos próximos problemas, os alunos fossem se aprimorando nos conceitos e registros trabalhados, e que eles pudessem interpretar e resolver os problemas algebricamente e graficamente.

Em relação ao problema 2, apenas o aluno A2 o interpretou e resolveu corretamente pelo método da adição, como pode ser conferido na figura 4:

Figura 4: Resolução algébrica do aluno A2



a) Quantos seguidores cada rede social (Facebook e Instagram) obteve no primeiro dia?
Resposta: $x = 60$, $y = 59$

b) E no segundo dia, quantos seguidores cada rede social (Facebook e Instagram) obteve?
Resposta: Facebook obteve 720 seguidores
Instagram obteve 58 seguidores

Fonte: Autores

Porém, outros três alunos, A3, A6 e A7, embora não tenham conseguido resolver corretamente o problema, apresentaram tentativas de interpretação algébrica do problema proposto, indicando um avanço em seus conhecimentos em relação à atividade 1. Estes alunos se confundiram em algumas etapas, e optaram novamente pelo método tentativa e erro, como apresenta o fragmento de diálogo⁵ entre o pesquisador (aluno de Iniciação Científica) e o aluno A1:

Pesquisador: *E o sistema, conseguiram montar?*

Aluno A1: *Não, o sistema não... Eu consegui aqui, deu 30 e 29, está certo?*

Pesquisador: *Não sei... como você fez?*

Aluno A1: *Eu fiz 28 mais 29 e deu 57! Aí eu fiz 30 mais 29 e deu 59.*

Pesquisador: *Então você foi atribuindo valores até encontrar a resposta?*

Aluno A1: *Sim!*

Pesquisador: *Você conferiu a conta e deu certo?*

Aluno A1: *Aham! Eu fiz daí... Facebook teve 120 no segundo dia, é que eu fiz vezes 4... 30 vezes 4! Aí o Instagram eu fiz vezes 2 embaixo!*

Percebemos que o aluno A1 tinha certa preferência por resolver os exercícios utilizando o método tentativa e erro, não apresentando, dessa forma, interesse em tentar montar o sistema de equações. Diante das análises dos registros, percebemos que alguns alunos atribuíam a metade do resultado à incógnita x e a outra metade para a incógnita y e, a partir daí, iam alterando valores até encontrarem a solução. Assim, para incentivar os alunos a utilizarem o modo algébrico de resolução, a terceira atividade foi elaborada com uma diferença maior entre os valores solução do problema.

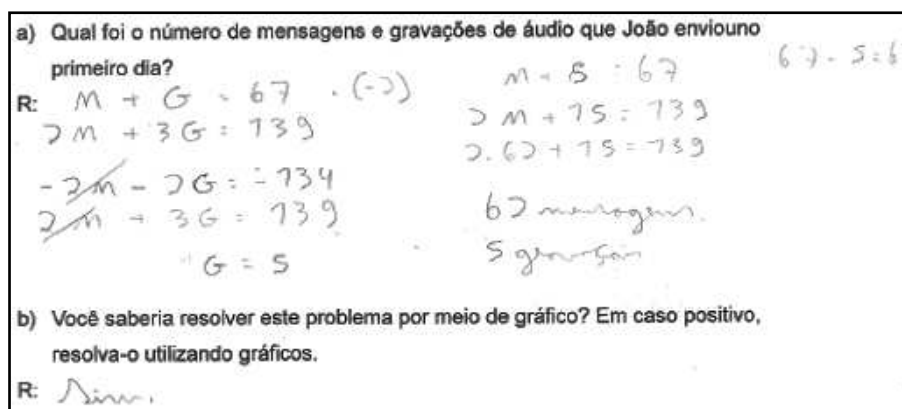
Em relação ao registro gráfico da atividade 2, apenas o aluno A2 conseguiu representá-lo, afinal, ele foi o único que realizou corretamente a conversão do registro língua natural para o registro algébrico, oportunizando digitar as equações obtidas no *GeoGebra* e obter o registro gráfico que representa a solução do sistema. Porém, percebemos que os alunos sabiam da

⁵ Transcrição de fragmento de diálogo entre pesquisador e aluno, gravado em áudio durante a implementação das atividades.

possibilidade de verificar a resposta do exercício por meio do gráfico, conforme mostram os registros dos alunos A2, A6 e A7. No entanto, eles não tinham obtido as equações para transpor para o *software*.

No que se refere à terceira atividade, apenas o aluno A1 não apresentou a conversão do registro língua natural para o registro algébrico. Os demais alunos interpretaram corretamente o problema, utilizando o registro algébrico. No que se refere aos cálculos algébricos (tratamento), 5 dentre os 7 alunos resolveram o problema utilizando o método da adição, conforme registro do aluno A2:

Figura 5: Conversão língua natural para registro algébrico e tratamento algébrico pelo aluno A2



a) Qual foi o número de mensagens e gravações de áudio que João enviou primeiro dia?

R: $M + G = 67$ $(\cdot (-2))$ $m + 8 = 67$ $67 - 5 = 62$
 $2M + 3G = 139$ $2M + 75 = 139$
 $-2M - 2G = -134$ $2 \cdot 62 + 75 = 139$
 $2M + 3G = 139$ 62 mensagens
 $G = 5$ 5 gravações

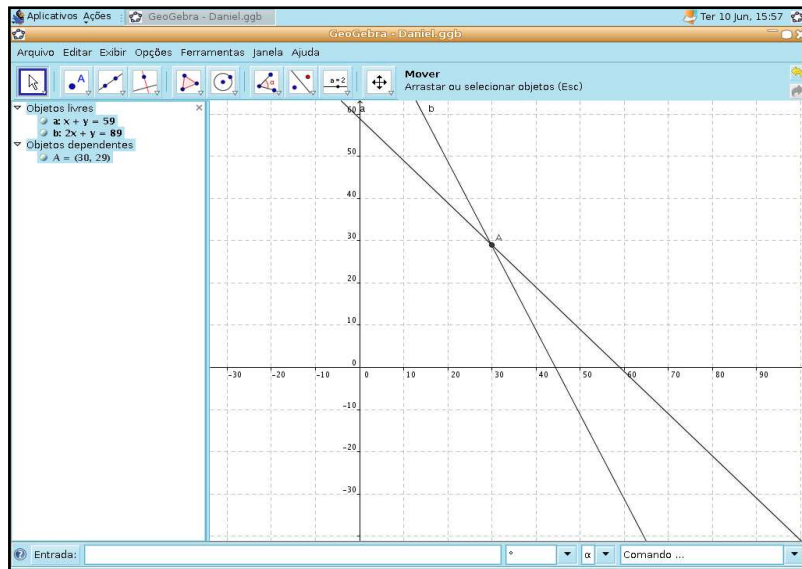
b) Você saberia resolver este problema por meio de gráfico? Em caso positivo, resolva-o utilizando gráficos.

R: Não.

Fonte: Autores

Em relação ao registro gráfico, dentre os 6 alunos que realizaram corretamente a conversão para o registro algébrico, 4 resolveram o exercício utilizando a representação gráfica por meio do *GeoGebra*. A figura 6 apresenta um *Print Screen* da construção gráfica de um dos alunos:

Figura 6: Print Screen da atividade 2



Fonte: Autores

Considerando o fato de que as atividades foram desenvolvidas em apenas três aulas com cerca de 35 minutos cada, e que a representação gráfica era o último processo a ser realizado no exercício, alguns alunos não conseguiram concluir o exercício por falta de tempo. Porém, percebemos que todos compreenderam que o ponto pertencente à intersecção das retas está relacionado com a resposta do exercício, sendo a coordenada x o valor referente à primeira incógnita, e a coordenada y, o valor referente à segunda incógnita. Assim, podemos inferir que houve aprendizagem por parte dos alunos no decorrer destas atividades, tanto em relação à conversão do registro língua natural para o registro algébrico, quanto em relação à interpretação gráfica dos problemas propostos.

Após a realização das três atividades, solicitamos aos alunos que respondessem duas questões: 1) *Comente sobre o que você aprendeu com as atividades das três últimas aulas de Matemática.* 2) *Você já havia estudado sobre sistemas lineares? Comente sua resposta.* Com estas questões, tivemos a intenção de verificar o *feedback* dos alunos após o término das atividades em relação ao conceito de sistemas lineares, visto que, no primeiro dia de aula, os alunos disseram, e demonstraram na resolução das atividades, não se lembravam de tal conceito.

No que se refere à primeira questão, os alunos A2, A5, A6 e A7 disseram que as aulas oportunizaram lembrar das possibilidades de como resolver sistemas lineares; o aluno A3 alegou entender como resolver os sistemas; o aluno A1 disse compreender que “nem tudo é conta de mais”; e três alunos, A2, A6 e A7, disseram aprender a resolver o problema por meio de gráficos.

Em relação à segunda questão, apenas o aluno A1 disse não ter estudado sobre sistemas lineares. Os demais alunos afirmaram ter estudado o conteúdo no 2º ano. Porém, alguns disseram não se recordar do modo de resolução, como exemplifica a resposta de A3: *Sim, mas não me recordava como resolvia os problemas.*

Considerações finais

Para o desenvolvimento desta pesquisa, tivemos como objetivos: i) identificar os registros prévios mobilizados por alunos do 3º ano do Ensino Médio, mediante a resolução de situações-problema que envolvem o conceito de sistemas lineares; ii) oportunizar aos sujeitos da pesquisa a articulação entre diferentes registros de representação semiótica relacionados aos sistemas de equações lineares.

Ao iniciar a implementação das atividades, os registros mostraram que os alunos investigados não se recordavam dos métodos de resolução de sistemas de equações lineares de ordem 2. Embora todos os alunos tenham apresentado a solução correta para a atividade 1, o procedimento utilizado foi o método tentativa e erro, considerado uma resolução numérica na qual eles testavam se suas respostas estavam corretas com o auxílio da calculadora do celular ou do computador. Na primeira atividade, nenhum aluno resolveu o problema algebricamente, e nenhum aluno o interpretou graficamente de modo correto no plano cartesiano.

Contudo, durante a implementação das atividades, percebemos avanço dos conhecimentos dos alunos com relação a sistemas de equações lineares, pois, na terceira atividade, apenas um aluno não realizou corretamente a conversão do registro língua natural para o registro algébrico; dentre os 7 alunos, 6 interpretaram o problema algebricamente, 5 resolveram corretamente o

sistema utilizando o método da adição, e 4 construíram e interpretaram graficamente a solução do problema, denotando o ponto pertencente à intersecção das retas como os valores correspondentes às incógnitas x e y do sistema.

Assim, percebemos que, com o decorrer das atividades, os conhecimentos dos alunos avançaram em relação aos diferentes registros e, conseqüentemente, em relação à aprendizagem de sistemas de equações lineares. Apenas com estas três atividades e com as análises realizadas, não podemos garantir a construção do conceito de sistema linear por parte dos alunos envolvidos. Porém, é possível observar a evolução de seus conhecimentos, manifestação de diferentes registros, como o algébrico e o gráfico, e a conversão do registro língua natural para o algébrico, e tratamento algébrico, que não faziam parte do repertório inicial dos alunos.

Para Duval, compreender os conceitos em Matemática começa no momento em que o aluno é capaz de mobilizar e coordenar espontaneamente ao menos dois registros de representação para um mesmo objeto, fato que pôde ser constatado durante esta pesquisa. Desse modo, notamos que, com o decorrer das atividades, os alunos indicaram compreender a resolução de problemas por meio de sistemas lineares, e que seus conhecimentos avançaram em relação ao primeiro dia de participação como sujeitos desta pesquisa.

Notas

*Licenciando em Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) - *Campus* de Campo Mourão, aluno do Programa de Bolsas de Iniciação Científica, bolsista da Fundação Araucária, wilians@hotmail.com.br.

**Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), docente da UNESPAR/Campo Mourão, Paraná, rezendeveridiana@gmail.com.

***Doutoranda em Educação para a Ciência e a Matemática da UEM, docente da UNESPAR/Campo Mourão, Paraná, marianamorabar@gmail.com.

Referências

BATTAGLIORI, Carla dos Santos Moreno. **Sistemas Lineares na Segunda série do Ensino Médio: um olhar sobre os livros didáticos**. Dissertação. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. PUC – SP, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília, 1999.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: **Aprendizagem em Matemática**. Machado, S. D. A. (org.). pp. 11-33. Campinas, SP: Papyrus, 2003.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. Org.: Tânia M. M. Campos; tradução: Marlene Alves Dias. 1ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.07, n.1, p.118-138, 2012a.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012b.

FLORES, Cláudia Regina. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Boletim de Educação Matemática**, vol. 19, 26, p. 1-22, 2006.

PARANÁ, **Diretrizes Curriculares de Matemática para as séries finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio: Matemática** – Curitiba: Secretaria de Estado da Educação, 2008, 50p.

Recebido em: Fevereiro de 2015
Aprovado em: Maio de 2015