revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A APRENDIZAGEM DA COMBINATÓRIA POR ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa*
Universidade Federal de Pernambuco
cristianepessoa74@gmail.com
Monalisa Cardoso da Silva**
Universidade Federal de Pernambuco
monalisacardoso08@yahoo.com.br

RESUMO
O presente estudo aborda a análise do ensino de Combinatória para o 9º ano do Ensino Fundamental. Foram elaboradas e realizadas intervenções baseadas em estratégias bem sucedidas de alunos da Educação Básica observadas em estudos anteriores, nos quais a *listagem de possibilidades* foi a estratégia mais constante e, por vezes, a mais bem sucedida. Foi adotada uma metodologia de ensino com destaque para quatro pilares: a *listagem de possibilidades* como estratégia, a *sistematização* da listagem, o enfoque nas propriedades *invariantes* de cada significado do problema e a *percepção de regularidade (generalização)*, envolvendo os quatro significados da Combinatória (Arranjo, Combinação, Permutação e Produto Cartesiano). Para analisar o desempenho dos alunos, foram aplicados pré-teste, intervenções e pós-teste. Observaram-se avanços em todos os tipos de problemas após as intervenções.Os alunos desenvolveram um raciocínio combinatório eficiente e o avanço em seus desempenhos demonstra que este conceito pode ser trabalhado desde cedo e não apenas no 2º ano do Ensino Médio.
Palavras-chave: Intervenções. Raciocínio Combinatório. Estratégias bem sucedidas. Sistematização de procedimentos.

THE LEARNING OF COMBINATORIAL BY STUDENTS IN THE 9 TH ELEMENTARY DEGREE

ABSTRACT
This work presents the analysis of Combinatorial teaching for the 9th elementary degree. Interventions were elaborated and realized based in well succeeded observations of Basic Education students from other searches, in which the *possibility of listing* was the most frequent strategy and, sometimes, the most well succeeded. It was adopted a methodology of teaching that has four prominent pillars: the *listing of possibility* as strategy, the *systematization* of listing, the approach in *invariants* property of each meanings problem and the *perception of regularity (generalization)*, involving the four Combinatorial meanings (Fitting, Combination, Permutation and Cartesian Product). In order analyze the students' performance, pre-test was applied, interventions and posttest. The paper has shown progress after intervention in every type of problem. The students developed efficient combinatory reasoning and the improvement in self

performance demonstrates that this concept can be used since early student time and not only in high school.
Keywords: Interventions. Combinatory Reasoning. Successful strategies. Systematization of procedures.

Introdução

O raciocínio combinatório é uma forma de pensar que permite que se levantem possibilidades e sejam analisadas as combinações das mesmas, auxiliando na compreensão de conteúdos matemáticos e de outras áreas do conhecimento, ao permitir que se levantem possibilidades e sejam analisadas as combinações das mesmas (PESSOA; BORBA, 2010).

Vergnaud (1986) defende que alguns conceitos desenvolvem-se por um longo período de tempo e para ele o saber forma-se, tanto nos aspectos práticos quanto nos aspectos teóricos, a partir de problemas a resolver, os quais ele define como *situações a dominar*. Neste sentido, acredita-se que a compreensão de conceitos como os envolvidos no *raciocínio combinatório*, pode iniciar-se antes do ensino formal e influenciar-se tanto por experiências escolares quanto extra-escolares nas quais este modo de pensar se faz necessário. Acredita-se, também, que por envolver diferentes aspectos, este raciocínio, certamente, leva um longo tempo para seu desenvolvimento.

Acredita-se que é possível desenvolver compreensões acerca do raciocínio combinatório antes de sua introdução formal na escola e que os alunos são capazes de desenvolver estratégias para resolver problemas combinatórios de diferentes tipos. Assim, é importante que se observem as estratégias por eles utilizadas – sejam as desenvolvidas diretamente por instrução escolar, sejam as aprendidas por meio de instrução indireta ou através de experiências extra-escolares – ao resolverem problemas de *Combinatória*, pois seus procedimentos de resolução podem servir de base para a construção de intervenções mais próximas das suas formas de pensar sobre os problemas.

Estudo desenvolvido por Pessoa e Borba (2009) apresenta como um dos seus resultados as estratégias desenvolvidas por 568 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas de Combinatória (Arranjo, Combinação, Permutação e

Produto Cartesiano). Estas estratégias eram, por vezes, bem sucedidas em encontrar soluções corretas e, em outras ocasiões, iniciavam-se corretamente, mas não eram totalmente bem sucedidas ao chegar ao resultado final. Um estudo desenvolvido por Pessoa e Santos (2011) também encontrou estratégias de alunos ao resolverem problemas combinatórios. Nestes estudos as autoras levantaram, além das estratégias, as explicações dos alunos pesquisados sobre o entendimento que os mesmos tiveram acerca de cada problema combinatório, sendo possível verificar quais as dificuldades/facilidades dos alunos em relação aos *invariantes* de cada situação.

Em ambos os estudos supracitados, a *listagem* de possibilidades foi a forma de resolução mais utilizada pelos alunos. Além disso, percebeu-se que os alunos que utilizavam uma estratégia mais sistematizada obtinham mais sucesso do que os que não sistematizavam seus procedimentos. Observou-se também que alunos em estágios mais avançados de desenvolvimento do raciocínio combinatório conseguiam perceber a regularidade da resolução do problema e, assim, generalizavam seus procedimentos. Por exemplo, ao iniciar listando as possibilidades de um determinado problema, o aluno identifica, a partir da pista da sua própria estratégia, que não necessita listar todas as possibilidades e encerra realizando um procedimento mais formal, como uma multiplicação. Além das pistas fornecidas através das estratégias utilizadas pelos alunos pesquisados em estudos de sondagem anteriores, acredita-se no presente estudo, que a explicitação e o destaque para os *invariantes*, ou seja, características próprias de cada tipo/*significado* de problema combinatório (Arranjo, Permutação, Combinação e Produto Cartesiano) podem ajudar os alunos a melhor compreenderem o conceito.

A hipótese defendida no presente estudo é a de que o uso da *listagem* de possibilidades como estratégia, o destaque para os *invariantes* de cada tipo de problema combinatório, a *sistematização* da listagem e a *percepção de regularidade (generalização)* facilitam a compreensão da Combinatória. Portanto, objetiva-se utilizar estratégias bem sucedidas, como as desenvolvidas pelos alunos pesquisados em Pessoa e Borba (2009) e em Pessoa e Santos (2011) como ponto de partida para a elaboração e execução de intervenções baseadas nos quatro pilares acima descritos (listagem, sistematização, explicitação de invariantes e percepção de regularidade), que possam auxiliar no ensino-aprendizagem da Combinatória com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Estratégias de Resolução de Problemas

Para Vergnaud (1990), um problema se relaciona a qualquer situação, seja no âmbito escolar ou fora dele, que, na busca de sua solução, traz a necessidade de descobrir relações e de explorá-las, de elaborar hipóteses e verificar essas hipóteses. Ele defende que no caso do conhecimento matemático, o processo de elaboração de relações por ele discutidas assume sentido ao fazer parte de estruturas mais amplas e complexas em momentos evolutivos posteriores (Vergnaud, 1990). Este estabelecimento de relações se torna possível em situações desafiadoras como as propostas em problemas.

A partir da Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1986) considera que existem muitos fatores que influenciam na formação e desenvolvimento dos conceitos, que surgem a partir de problemas a resolver. Portanto, é necessário que se ofereçam situações diversas para a resolução de problemas, para que, assim, os alunos possam fazer reflexões, estabelecendo relações e construindo novas aprendizagens.

O tipo de problema, em termos de significado, é uma variável importante no processo de resolução e compreensão de um conceito, pois, dependendo do problema, o aluno utiliza relações lógicas diferentes, alguns são mais simples e outros mais complexos do ponto de vista do cálculo relacional (VERGNAUD, 1991), ou seja, do ponto de vista da compreensão da lógica do problema. A forma de representar um problema também reflete a maneira como o aluno o está compreendendo. Assim, o tipo de problema poderá também gerar formas diferentes de representação. Por estas razões, é necessário que a escola esteja atenta à necessidade de diversificação das situações para que o aluno possa pensar sobre um determinado conceito a partir de diferentes perspectivas. Os diferentes invariantes – relações e propriedades – também interferem na forma de compreensão por parte do aluno, pois, se consegue percebê-los, a interpretação de um problema pode ser uma, e, se não há consciência dos invariantes envolvidos no conceito, a maneira de lidar com o problema é outra.

Raciocínio Combinatório: Conceitos/Definições

A Combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias (listagem, árvore de possibilidades, quadro, diagrama, desenho, fórmula, por exemplo), pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um. Assim, no presente estudo, entende-se o *raciocínio combinatório* como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. De acordo com Pessoa e Borba (2010), na Combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem.

Produto Cartesiano, Permutação, Arranjo e Combinação

Baseadas em Merayo (2001) e classificações anteriores (NUNES. BRYANT, 1997; VERGNAUD, 1983, 1991; BRASIL, 1997), Pessoa e Borba (2008) fazem uma organização única de problemas que envolvem *raciocínio combinatório*. Os problemas de *Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação e Combinação* foram considerados como característicos do pensamento combinatório, contribuindo, dessa forma, para a reflexão teórica da necessidade de se considerar este conjunto de problemas no ensino e aprendizagem da Combinatória no Ensino Básico. A seguir estão colocados os significados presentes na Combinatória (tipos de problemas), com seus exemplos e *invariantes* (relações e propriedades que se mantêm constantes):

- ✓ <u>Produto Cartesiano</u> - **Ex.:** Para a festa de São João da escola, há 3 meninos e 4 meninas que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

  Invariantes: (1) dados dois (*ou mais*) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto e a natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado. (2) a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.
- ✓ <u>Permutação</u> - **Ex.:** Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.

  Invariantes: (1) todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.
- ✓ <u>Arranjo</u> - **Ex**.: O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

  Invariantes: (1) tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com $\mathbf{0} < \mathbf{p} < \mathbf{n}$, sendo **p** e **n** números naturais; (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.
- ✓ <u>Combinação</u> - **Ex**.: Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

  Invariantes: (1) tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com $\mathbf{0} < \mathbf{p} < \mathbf{n}$, **p** e **n** naturais; (2) a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Os problemas podem ser resolvidos por meio de diferentes formas de *representação*: desenhos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, dentre outras. As diferentes simbologias ocorrem tanto no que se refere às formas como os alunos resolvem as questões, quanto à forma como a questão é apresentada para ser resolvida.

No presente estudo, pretende-se partir de estratégias bem sucedidas desenvolvidas por alunos pesquisados por Pessoa e Borba (2009) e por Pessoa e Santos (2011) ao resolverem problemas combinatórios, para realizar intervenções com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental envolvendo os quatro problemas básicos de raciocínio combinatório (Arranjo, Combinação, Permutação e Produto Cartesiano), utilizando a explicitação dos *invariantes* dos problemas combinatórios, a *listagem* de possibilidades como estratégia, a *sistematização* da listagem e a *generalização* de procedimentos; comparar o desempenho dos alunos, em relação à Combinatória, entre o pré-teste, as intervenções e o pós-teste; analisar os tipos de respostas e as estratégias desenvolvidas no pré-teste, nas intervenções e no pós-teste pelos alunos pesquisados.

Método

Inicialmente foi feito um levantamento de estratégias bem sucedidas encontradas em estudos anteriores de Pessoa e Borba (2009) e de Pessoa e Santos (2011), a fim de que as mesmas fossem utilizadas durante as intervenções.

A pesquisa foi realizada em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, composta por 20 alunos com idades variando entre 14 e 16 anos, dos quais foram selecionados para a análise apenas os que fizeram parte dos quatro momentos do processo: pré-teste, duas sessões de intervenção e pós-teste, havendo então 16 participantes.

Foi aplicado um pré-teste elaborado pelas pesquisadoras, contendo oito problemas de raciocínio combinatório, sendo dois de cada tipo (Arranjo, Combinação, Permutação e Produto Cartesiano). Quatro dos problemas, um de cada tipo, levavam a resultados com menores possibilidades (até 10) e os outros quatro problemas levavam a resultados com maior número de possibilidades (até 30).

Foram feitas duas intervenções, nas quais houve destaque para a explicitação dos *invariantes* de cada significado de problema combinatório; a *listagem de possibilidades* como estratégia; a *sistematização* da listagem; e a *percepção de regularidade (generalização).* Na primeira sessão de intervenção, foram trabalhados com os alunos seis problemas, sendo os três primeiros de Produto Cartesiano e os três últimos de Permutação. Na segunda sessão de intervenção, também foram trabalhados seis problemas, sendo os três primeiros do tipo Combinação e os três últimos do tipo Arranjo. Nas duas intervenções, o primeiro problema de cada um dos tipos resultava em um número menor de possibilidades (grandeza numérica até 10) e o segundo e o terceiro problema levavam a um número maior de possibilidades (grandeza numérica até 30).

Trabalhou-se da seguinte forma: foi resolvido com o conjunto da turma (no quadro-negro) o primeiro problema, destacando os pilares supracitados (explicitação de *invariantes*, *listagem* de possibilidades, *sistematização* da listagem e *percepção de regularidade (generalização)*). Após esse momento, pediu-se que eles respondessem, individualmente, ao segundo problema. Dado o tempo para que eles respondessem o segundo problema, foi feita a resolução no quadro, com participação da turma. O processo foi repetido durante a resolução do terceiro problema.

Tal modo de intervenção ocorreu de forma similar com cada um dos tipos de problemas combinatórios. A seguir é possível visualizar o que se destacou em ambas as intervenções. Para tal caracterização, será tomada como exemplo uma das situações-problema para cada tipo de problema combinatório:

<u>1ª Intervenção:</u>

Produto cartesiano - Problema: *A mãe de Pedrinho fez oito tipos de suco (maracujá, laranja, acerola, goiaba, uva, manga, abacaxi e caju) para a comemoração do dia das crianças na escola do seu filho. Ela levou copos descartáveis de quatro cores (amarelo, branco, cinza e preto). Quantas combinações diferentes poderão ser formadas, combinando todos os sucos com todos os copos?*

Na intervenção, destacou-se o fato de que existiam dois grupos (sucos – oito tipos, e copos – quatro cores) e que para formar as combinações possíveis, seria necessário juntar um elemento de um grupo com cada elemento do outro grupo, formando assim um terceiro conjunto. Além disso, questionou-se os alunos sobre a ordem exercer ou não influência, levando-os a ratificar a ideia já existente de que, nesse tipo de problema, formadas as combinações, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. A organização dos elementos foi feita através da *listagem* das possibilidades

Sobre a *sistematização*, sendo tal prática adotada durante a resolução de todos os tipos de problemas, em ambas as intervenções, sempre que se iniciava a resolução de um problema no quadro, orientava-se que a listagem fosse feita de forma organizada. Para tal organização sugeria-se a *sistematização*, organizando todas as possibilidades para o primeiro elemento e depois todas para o segundo elemento e assim sucessivamente.

Para destacar a *percepção de regularidade (generalização)*, nesse tipo de problema especificamente, chamou-se a atenção para o fato de que se para cada tipo de suco disponível havia a possibilidade de combinação com quatro cores diferentes de copos, e que existiam 8 tipos de sucos, a multiplicação 4x8 responderia ao problema.

Permutação - Problema: *Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?*

Escrevendo os nomes “pai”, “mãe” e “irmão” no quadro, intencionando enfatizar a *listagem*, foi perguntado aos alunos quais arrumações eram possíveis. Supondo que eles sugeriram colocar no quadro as seguintes possibilidades: “pai, mãe e irmão; mãe, pai e irmão; irmão, mãe e pai”, perguntava-se: “Mas só tem essas possibilidades? O porta-retrato do pai só pode vir em primeiro lugar uma vez, que é acompanhado da mãe e do irmão?”, “Será que não tem outras formas de organizar?” Essas questões buscam enfatizar um dos *invariantes* da Permutação, segundo o qual a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Ao término do problema, quando já haviam sido escritas todas as possibilidades, era feita a *generalização* junto com eles. “Quantas possibilidades nós temos nas quais aparecem o pai em primeiro lugar?” Feita a contagem, eles diziam: “duas”. Alguns dos alunos já percebiam, nesse momento, que para os demais elementos também haveria duas possibilidades, chegando à conclusão de que a multiplicação 2x3 também resolvia o problema, sem que fosse necessário escrever todas as possibilidades.

Estando todos os problemas resolvidos, buscou-se também fazer a comparação entre os dois tipos de problemas trabalhados durante a aula, havendo destaque para as semelhanças e diferenças existentes entre os mesmos.

<u>2ª Intervenção:</u>

Combinação – Problema: *Para brincar no pula pula do parque, podem entrar duas crianças de cada vez. Amanda, Lívia, Gisele, Joaquim, Lorena, Marcos, Pedro e Fabiana estão aguardando para brincar. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas as duplas para entrar no pula pula?*

Inicialmente foram escritos os elementos "Amanda, Lívia, Gisele, Joaquim, Lorena, Marcos, Pedro e Fabiana" no quadro, solicitando que os alunos formassem as duplas. Para destacar os *invariantes*, foi enfatizado o fato de que o problema lista vários elementos, mas que nem todos serão utilizados, de uma só vez, na formação das possibilidades. Além disso, os alunos foram levados a refletirem sobre a importância ou não da ordem, com perguntas como: "Se eu disser que Amanda e Lívia é a dupla que vai entrar no pula-pula ou se eu disser Lívia e Amanda é a dupla que vai entrar no pula-pula, vai fazer diferença?" Com tal pergunta, o objetivo era o de chamar a atenção para o *invariante* de que, nesse tipo de problema, a ordem não exerce influência durante a formação das possibilidades.

Quando surgia, pelos alunos, a formação de alguma dupla já existente, a mesma era colocada no quadro e após o término da escrita das possibilidades, eram feitas algumas perguntas tais como: "as duas crianças vão entrar no parque, certo? Vai ser diferente eu dizer que Amanda e Lívia entraram no parque ou eu dizer que Lívia e Amanda entraram no parque?" Com tais indagações, pretendia-se chamar a atenção para um dos invariantes da Combinação, em que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Arranjo – Problema: *Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?*

Iniciamos *listando* os elementos no quadro junto com os alunos (a partir do que eles diziam) e, dependendo do que eles diziam, enfatizava-se a importância da *sistematização* na organização dos elementos e, visando à percepção dos *invariantes*, chamou-se a atenção para o fato de que nesse tipo de problema é fornecido um grupo e desse grupo são retirados elementos para formar subgrupos. Ainda visando ao destaque dos *invariantes*, perguntou-se também se as combinações “Joana e Vitória” e “Vitória e Joana” eram a mesma coisa.

Sobre a *percepção de regularidade (generalização),* tomando como exemplo o problema acima colocado, os alunos eram levados a perceberem quantas vezes cada um dos elementos (acompanhados dos vices), podiam ser colocados em primeiro lugar (como prefeitos, no caso). Assim, chegando-se à conclusão de que cada um deles poderia ocupar o primeiro lugar, com segundos lugares (vices) diferentes, por duas vezes, e que a quantidade de elementos era de três, uma possível solução para o problema seria a multiplicação 2x3, que resulta na resposta seis possibilidades.

Cinco dias após as intervenções foi aplicado o pós-teste, o qual seguia a mesma natureza e quantidade de questões dos problemas do pré-teste.

A análise foi feita de duas formas: análise do avanço na quantidade de acertos entre o pré-teste e o pós-teste e análise dos tipos de respostas e estratégias, desenvolvidas pelos alunos no pré-teste e no pós-teste para verificar as possíveis diferenças na qualidade das respostas.

Resultados e Discussão

- ✓ **Análise dos acertos totais**

Nesta fase de análise, os principias resultados obtidos foram analisados de forma a perceber os avanços dos alunos na quantidade de acertos entre o pré-teste e o pós-teste.

Os Quadros 1 e 2 e a Tabela 1 a seguir mostram o desempenho dos alunos entre o Pré-teste e o pós-teste, considerando, neste caso, apenas os acertos totais, os quais são aqueles em que o aluno resolveu acertando a resposta final do problema, ou seja, esgotando todas as possibilidades.

Quadro 1: Acertos totais por aluno no pré-teste

ALUNOS	PROBLEMAS								TOTAL DE ACERTOS
	1º PC-[1]	2º PC+	3º A-	4º A+	5º C-	6º C+	7º P-	8º P+	
1	X	X					X		3
2									0
3	X	X							2
4	X	X	X		X		X		5
5	X								1
6	X	X	X					X	4
7									0
8	X								1
9	X	X	X		X		X		5
10	X	X	X		X		X		5
11	X	X	X						3
12	X	X			X				3
13	X	X			X				3
14	X	X			X		X		4
15	X	X			X				3
16	X								1

Quadro 2: Acertos totais por aluno no pós-teste

ALUNOS	PROBLEMAS								TOTAL DE ACERTOS
	1º PC-	2º PC+	3º A-	4º A+	5º C-	6º C+	7º P-	8º P+	
1	X	X	X		X		X	X	6
2							X		1
3	X				X		X		3
4	X	X	X	X	X				5
5					X		X		2
6	X	X	X				X		4
7	X	X	X	X	X		X	X	7
8	X	X			X				3
9	X	X	X		X		X	X	6
10	X	X			X		X	X	5
11	X	X	X		X		X	X	6
12	X	X		X	X			X	5
13	X	X	X		X		X	X	6
14	X	X	X		X		X		6
15	X	X	X		X		X	X	6
16	X	X			X				3

Tabela 1: Comparação do percentual de acertos entre o pré-teste e o pós-teste

Testes	PERCENTUAL DE ACERTOS POR PROBLEMAS							
	1º PC-	2º PC+	3º A-	4º A+	5º C-	6º C+	7º P-	8º P+
Pré-teste	87,5	68,75	31,25	0	43,75	0	31,25	6,25
Pós-teste	87,5	81,5	56,25	18,75	87,5	0	75	50

Visualizando os Quadros 1 e 2, é possível observar que os alunos no pré-teste apresentaram um maior número de acertos nos problemas de Produto Cartesiano, seguido dos de Combinação que levavam a números com menos possibilidades. Entretanto, no que diz respeito aos outros tipos de problemas, há um quantitativo muito baixo de acertos. Além disso, no pré-teste a quantidade de acertos foi bastante inferior ao do pós-teste.

No estudo de Pessoa e Santos (2011), realizado com crianças do 5º ano do Ensino Fundamental, o problema de Combinação foi apresentado como o de mais fácil resolução pelas crianças, seguido dos problemas de Produto Cartesiano, Permutação e Arranjo. No estudo atual, realizado com adolescentes, são observadas semelhanças quanto aos problemas de maior dificuldade, porém, no presente estudo os de Produto Cartesiano foram de mais fácil resolução que os de Combinação. Essa relação é semelhante ao que ocorreu no estudo de Pessoa e Borba (2009, 2010), no qual o problema de mais fácil resolução foi o de Produto Cartesiano. O fato de no presente estudo os problemas de Produto Cartesiano serem de mais fácil resolução pode ser justificado por se tratar de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental e ser um tipo de problema multiplicativo geralmente estudado desde os Anos Iniciais, sendo menos trabalhadas as características e singularidades dos outros tipos de problemas combinatórios.

Com os resultados do pós-teste, foram percebidos avanços importantes na quantidade de acertos, por tipo de problema e por aluno individualmente. Os problemas de Permutação, que apresentaram um quantitativo baixo de acerto no pré-teste, no pós-teste ganharam destaque, apresentando os maiores avanços nos problemas que levavam a resultados com menores possibilidades e nos que levavam a um maior número de possibilidades.

Individualmente, todos os alunos apresentaram melhor desempenho após as intervenções, seja no quantitativo de acertos ou na qualidade das estratégias. Como exemplo, podem-se apontar os avanços do Aluno 7 no Quadro 3, a seguir.

Quadro 3: Desempenho do aluno 7 entre o pré-teste e Pós-teste

Testes	PROBLEMAS								TOTAL DE ACERTOS
	1º PC-	2º PC+	3º A-	4º A+	5º C-	6º C+	7º P-	8º P+	
Pré-teste									0
Pós-teste	X	X	X	X	X		X	X	7

O Aluno 7, que no pré-teste apresentou baixo desempenho, não conseguindo acertar os problemas, no pós-teste o aproveitamento passou a ser de 87,5%, deixando de acertar apenas o problema de Combinação que levava a um maior número de possibilidades. É possível perceber que mesmo após as intervenções, os alunos apresentam dificuldades quanto à resolução dos problemas de Combinação com maior número de possibilidades, no qual a maioria ainda não conseguia sistematizar de forma regular até chegar ao esgotamento de possibilidades, mesmo listando diversas delas.

A seguir, realizamos uma análise mais qualitativa, focando nos tipos de respostas e nos tipos de estratégias dos alunos pesquisados.

- ✓ **Tipos de respostas e de estratégias apresentadas pelos alunos antes e após as intervenções**

Como afirmado na análise de desempenho, para a análise quantitativa foram considerados como acertos os acertos totais, entretanto, entre todas as respostas apresentadas foram encontradas diferentes possibilidades, estratégias e tipos de respostas que fazem com que se reflita sobre como os alunos pensam em relação à Combinatória. Os tipos de respostas mais frequentes dos alunos em relação aos problemas propostos estão apresentados no Quadro 4 e as suas estratégias de resolução estão no Quadro 5.

Quadro 4[2]: Tipos de respostas apresentadas pelos alunos pesquisados ao resolverem os problemas de *Combinatória* propostos.

1. Em branco	Não se sabe, nestes casos se o aluno não respondeu porque não sabia, porque não se interessou, porque não quis fazer ou se considerou o problema de difícil resolução.
2. Apenas resposta incorreta	O aluno deu apenas a resposta errada para o problema proposto, embora seja possível, muitas vezes, inferir qual a operação por ele realizada.
3. Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação correta	Incompreensão do problema – o aluno apresentou uma resposta incorreta e na sua resolução não há indícios de relação com a questão proposta.
4. Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática	Apresenta certa compreensão do problema – o aluno errou a resposta ou não conseguiu completá-la, entretanto, sua estratégia de resolução é válida para o que é solicitado, mantém uma relação com a lógica do problema, entretanto, não organizou sistematicamente a estratégia, listando, desenhando, fazendo árvore de possibilidades, quadros, diagramas ou outra estratégia de maneira não sistemática, sem controlar os elementos, não conseguindo esgotar todas as possibilidades.
5. Resposta incorreta ou incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática	O aluno também apresentou certa compreensão do problema, entretanto, apesar de utilizar uma estratégia mais organizada e sistemática, errou a resposta ou não conseguiu chegar ao final da resolução. Sua estratégia de resolução é válida para o que é solicitado, mantém relação com a lógica do problema, entretanto, na maioria das vezes, neste caso, o aluno não conseguiu esgotar todas as possibilidades para o tipo de problema proposto.
6. Apenas resposta correta	O aluno deu apenas a resposta certa para o problema proposto, embora seja possível, muitas vezes, inferir qual a operação por ele realizada.
7. Resposta correta (explicitando estratégia)	O aluno conseguiu compreender a lógica do problema e chegar à resposta correta, utilizando e explicitando uma estratégia válida e encontrando formas de esgotar todas as possibilidades.

Quadro 5: Estratégias apresentadas pelos alunos pesquisadosao resolverem os problemas de *Combinatória* propostos.

1. Não explicitou estratégia	Quando o aluno apenas forneceu a resposta, correta ou incorreta. Desse modo fica difícil precisar com certeza qual estratégia foi utilizada para a resolução.
2. Árvore de possibilidades	O aluno construiu uma árvore de possibilidades, podendo apresentar uma resposta *correta* ou *incorreta*, *com ou sem sistematização dos elementos*, *com* ou *sem esgotamento de possibilidades*.
3. Quadro / diagrama	O aluno construiu um quadro ou um diagrama para representar o processo de solução. Pode haver resposta *correta* ou *incorreta*, *com* ou *sem sistematização*, *com* ou *sem esgotamento de possibilidades*.
4. Listagem de possibilidades	O aluno listou as possibilidades de forma escrita, com os nomes ou com símbolos, podendo a resposta ser *correta* ou *incorreta*, *havendo*, ou *não*, o *estabelecimentode relação* e/ou o *esgotamento de todas as possibilidades*.
5. Multiplicação inadequada	O aluno relacionou o problema a um produto, entretanto, em situações nas quais ela não se aplica. A resposta é *incorreta sem relação*.
6. Multiplicação	O aluno relacionou o problema a um produto, com a possibilidade correta de seu uso. A

adequada	resposta pode ser *correta* ou *incorreta*.
7. Percepção ou busca de regularidade	Quando o aluno iniciou a resolução através de uma estratégia qualquer, geralmente a listagem ou a árvore de possibilidades ou o quadro/diagrama e, no decorrer desta, percebeu que pode generalizar as descobertas iniciais para os casos seguintes. A resposta pode ser *correta* ou *incorreta*.

As tabelas a seguir apresentam os tipos de respostas e os tipos de estratégias utilizadas pelos alunos. A Tabela 2 apresenta resultados referentes ao tipo de resposta por tipo de problema e por ordem de grandeza, pois, além da compreensão dos invariantes de cada tipo de problema, a quantidade de possibilidades que a questão exige também influencia na dificuldade/facilidade na resolução do problema. Assim, torna-se importante analisar de forma específica os avanços levando-se em consideração o tipo de problema e a ordem de grandeza dos resultados.

Tabela 2: Percentuais de tipo de resposta por tipo de problema e por ordem de grandeza no pré-teste.

			Em Branco	Apenas resposta incorreta	Resposta incorreta sem relação correta	Resposta incorreta ou incompleta com relação e estratégia não sistemática	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia sistemática	Apenas resposta correta	Resposta correta (explicitando estratégia)
Problemas	PC	NP		6,25	6,25			31,25	56,25
		NG		18,75	6,25	6,25		31,25	37,5
	Ar	NP		25	18,75		25		31,25
		NG	6,25	37,5	18,75	12,5	25		
	Comb	NP	6,25	31,25	6,25	6,25	6,25	12,5	31,25
		NG		50	31,25	18,75			
	Perm	NP	12,5	31,25		6,25	18,75	6,25	25
		NG	6,25	50		31,25	6,25		6,25

Obs.1: PC= Produto Cartesiano; Perm. = Permutação; Ar = Arranjo; Comb. = Combinação.
Obs. 2: NG = números grandes; NP= números pequenos.

Percebe-se no pré-teste que, com relação aos tipos de respostas, a categoria *em branco* apresenta percentuais relativamente baixos, indicando que mesmo não compreendendo as relações implícitas nas situações, eles procuram de alguma forma responder as questões.

Com relação aos outros tipos de respostas apresentadas, percebe-se um quantitativo alto de *apenas resposta incorreta*, assim como de *respostas incorretas sem apresentar a compreensão da relação combinatória*, expressando a dificuldade que os alunos possuíam na compreensão deste conteúdo antes das intervenções.

As *respostas incorretas com ou sem relação e com ou sem o uso de estratégia sistemática*, apresentam percentuais semelhantes, diferenciando por tipo de problemas. Isso demonstra que os tipos de respostas no pré-teste não se concentram em apenas um tipo, mas distribuem-se em várias categorias.

Com relação às respostas corretas, as que não apresentaram estratégias em sua resolução, concentram-se mais nos problemas do tipo Produto Cartesiano, o que pode ser justificado por ser um problema resolvido por uma multiplicação direta, assim sendo solucionado com facilidade através de um cálculo mental, por exemplo. Já nos outros tipos de problemas, mesmo apresentando estratégias, a expressividade de tipos de respostas corretas ainda não se perfaz em todos os tipos de problemas.

A seguir, na Tabela 3, apresentam-se os tipos de respostas utilizadas pelos alunos no pós-teste.

Tabela 3: Percentuais de tipo de resposta por tipo de problema e por ordem de grandeza no pós-teste.

			Em Branco	Apenas resposta incorreta	Resposta incorreta sem relação correta	Resposta incorreta ou incompleta com relação e estratégia não sistemática	Resposta incorreta ou incompleta com relação, com estratégia sistemática	Apenas resposta correta	Resposta correta (explicitando o estratégia)
Problemas	PC	NP	6,25				6,25	18,75	68,75
		NG	12,5	6,25				12,5	68,75
	Ar	NP	6,25	12,5		6,25	18,75	6,25	50
		NG	12,5	31,25			37,5	6,25	12,5
	Comb	NP	6,25				6,25	18,75	68,75
		NG	18,75	31,25	6,25	6,25	37,5		

	Perm	NP			12,5		12,5	6,25	68,75
		NG	6,25	6,25	12,5		25	18,75	31,25

Obs.1: PC= Produto Cartesiano; Perm. = Permutação; Ar = Arranjo; Comb. = Combinação.
Obs. 2: NG = números grandes; NP= números pequenos.

Observando a Tabela 3, referente ao pós-teste, percebe-se que o percentual de *apenas resposta incorreta*, de *resposta incorreta sem relação* e de *resposta incorreta com relação com estratégia não sistemática* (três categorias de respostas que evidenciam pouca compreensão combinatória), apresentaram uma queda no percentual. Assim, pode-se observar que os alunos, após as intervenções, apresentaram respostas melhor elaboradas no que diz respeito à compreensão dos significados da Combinatória, assim como na qualidade das estratégias.

Mesmo não acertando algumas questões, os alunos passaram a apresentar respostas mais sistemáticas, chegando muito próximo do resultado correto, demonstrando uma maior compreensão dos problemas. Desta forma, a categoria *resposta correta explicitando estratégia*, apresentou resultados expressivos comparados ao pré-teste e ao próprio pós-teste com relação à categoria *apenas resposta correta*. Assim, é possível perceber que ao utilizarem estratégia na resolução e sendo ela sistemática, os resultados entre os testes apresentaram avanços importantes.

As Tabelas 4 e 5 apresentam resultados referentes ao tipo de estratégia por tipo de problema e por ordem de grandeza no pré-teste e no pós-teste, respectivamente.

Tabela 4: Percentual de tipo de estratégia por tipo de problema e por ordem de grandeza no pré-teste.

			Não explicitou estratégia	Árvore de possibilidades	Quadro / Diagrama	Listagem	Multiplicação inadequada	Multiplicação adequada	Percepção ou busca de regularidade
Problemas	PC	NP	37,5	6,25		56,25			
		NG	50			25		12,5	12,5
	Ar	NP	25		6,25	68,75			
		NG	43,75			43,75	12,5		
	Comb	NP	50			50			

		NG	50			37,5	12,5		
	Perm	NP	50			50			
		NG	56,25			37,5			6,25

Obs.1: PC= Produto Cartesiano; Perm. = Permutação; Ar = Arranjo; Comb. = Combinação.
Obs. 2: NG = números grandes; NP= números pequenos.

Analisando a Tabela 4, com relação às estratégias encontradas no pré-teste, é possível perceber que das apresentadas, as que foram utilizadas em sua maioria foi a *não explicitação de estratégia* e a *listagem*. Em sua maioria, os alunos que não utilizaram estratégia foram aqueles que não se saíram bem na resolução dos problemas. A *listagem* de possibilidades desde cedo aparece como sendo uma estratégia utilizada pelos alunos, precisando apenas da sistematização para que, de forma organizada, chegue-se ao resultado correto. E ainda para eles, a *percepção das regularidades* para a generalização não se apresenta clara, para a resolução dos problemas com grandezas maiores. Os outros tipos de estratégias apresentaram percentuais baixos de utilização.

Já na Tabela 5, a seguir, que trata das estratégias utilizadas no pós-teste, os alunos continuaram a resolver através da *listagem*, assim como apresentaram avanços importantes no uso de *multiplicação adequada* nos problemas de Produto Cartesiano. Outro aspecto perceptível é que a *não explicitação de estratégia* quase não diminui em relação aos testes, demonstrando que talvez os alunos ainda continuem utilizando o cálculo mental. Entretanto, no pós-teste eles apresentam maior número de acertos.

Tabela 5: Percentual de tipo de estratégia por tipo de problema e por ordem de grandeza no pós-teste.

			Não explicitou estratégia	Árvore de possibilidades	Quadro / Diagrama	Listagem	Multiplicação inadequada	Multiplicação adequada	Percepção ou busca de regularidade
Problemas	PC	NP	18,75	12,5		56,25		12,5	
		NG	31,25			25		31,25	12,5
	Ar	NP	25		12,5	56,25			6,25
		NG	50			31,25			18,75

	Com b	NP	25			75			
		NG	50			37,5	6,25		6,25
	Perm	NP	6,25		6,25	75	12,5		
		NG	31,25			18,75	12,5	6,25	31,25

Obs.1: PC= Produto cartesiano; Perm. = Permutação; Ar = Arranjo; Comb. = Combinação.
Obs. 2: NG = números grandes; NP= números pequenos.

A partir da Tabela 5, percebe-se que além do acréscimo no número de acertos, os alunos que obtiveram êxito nas respostas utilizaram estratégias mais elaboradas na resolução dos problemas. Como exemplo, apresentamos as soluções do Aluno 13.

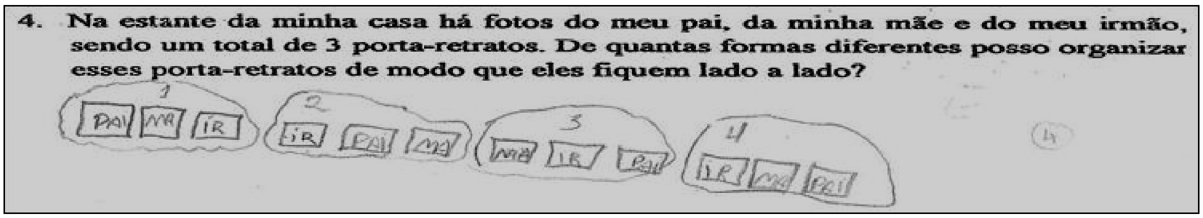


Figura 1. Solução do Aluno 13 para o problema de Permutação com número menor de possibilidades no pré-teste, com resposta incorreta com listagem não sistemática.

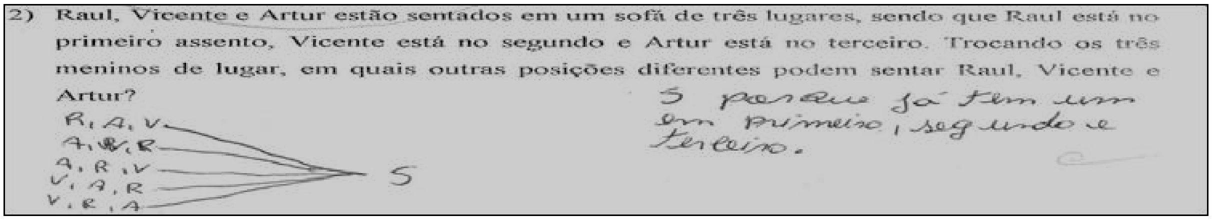
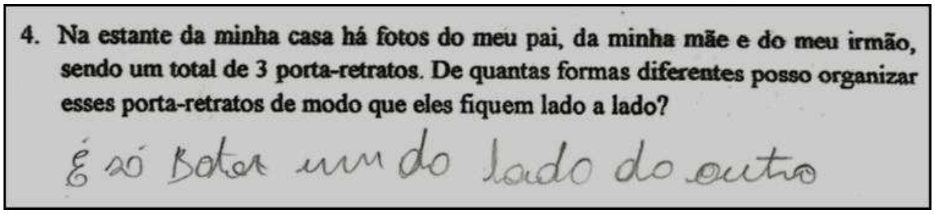


Figura 2. Solução do Aluno 13 para o problema de Permutação com número menor de possibilidades no pós-teste, com resposta correta com listagem sistemática.

As soluções deste aluno evidenciam que, no pós-teste, através da *listagem* de forma sistemática e organizada, o mesmo conseguiu chegar ao número exato de possibilidades que o problema exigia, o que não ocorreu no pré-teste, fazendo com que o mesmo não tivesse um controle das possibilidades listadas. Ele responde que são cinco maneiras diferentes, por não sentir a necessidade de contar a primeira posição dos três elementos já exposta pelo problema, o que é evidenciado na sua fala ao lado da resposta.

revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

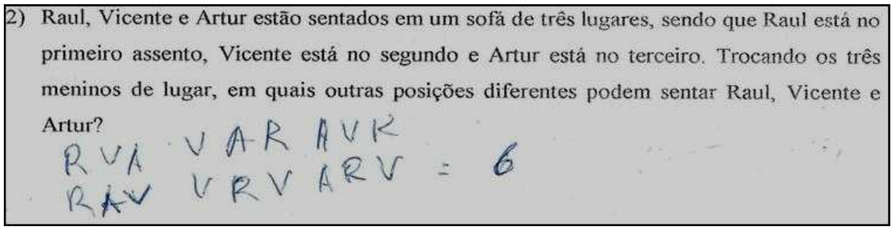
Avanços ainda mais visíveis podemos perceber ao analisarmos as resoluções dos Alunos 2 e 5 no pré e no pós-teste (Figuras 3, 4, 5 e 6).



4. Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?

É só botar um do lado do outro

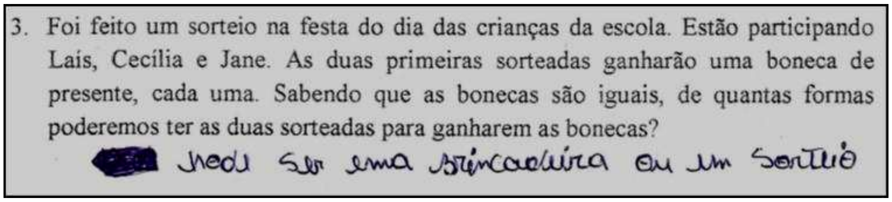
Figura 3. Solução do Aluno 2 para o problema de Permutação com número menor de possibilidades no pré-teste, com resposta incorreta sem relação combinatória.



2) Raul, Vicente e Artur estão sentados em um sofá de três lugares, sendo que Raul está no primeiro assento, Vicente está no segundo e Artur está no terceiro. Trocando os três meninos de lugar, em quais outras posições diferentes podem sentar Raul, Vicente e Artur?

RVA VAR AVR
RAV VRA ARV = 6

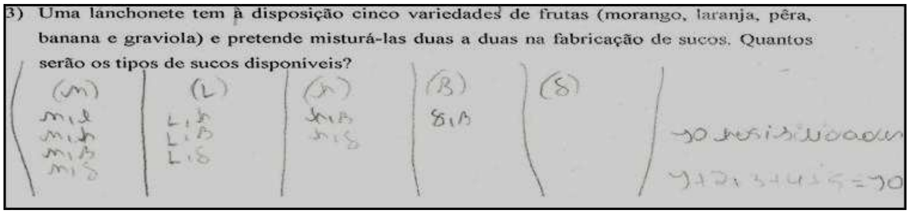
Figura 4. Solução do Aluno 2 para o problema de Permutação com número menor de possibilidades no pós-teste, com resposta correta com listagem sistemática.



3. Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Laís, Cecília e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas?

[redacted] pode ser uma brincadeira ou um sorteio

Figura 5. Solução do Aluno 5 para o problema de Combinação com número menor de possibilidades no pré-teste, com resposta incorreta sem relação combinatória.



3) Uma lanchonete tem à disposição cinco variedades de frutas (morango, laranja, pêra, banana e graviola) e pretende misturá-las duas a duas na fabricação de sucos. Quantos serão os tipos de sucos disponíveis?

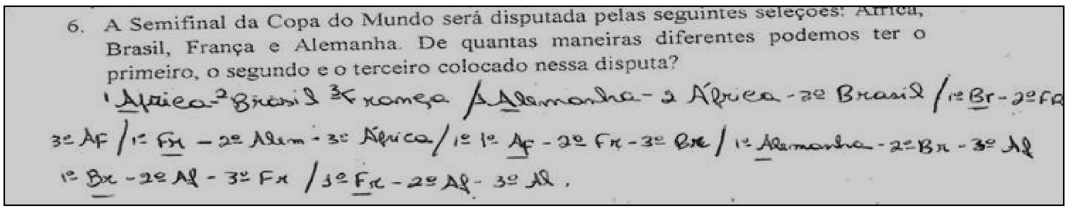
(M) (L) (P) (B) (G)
M,L L,P P,B G,B
M,P L,B P,G
M,B L,G
M,G

10 possibilidades
4+3+2+1=10

Figura 6. Solução do Aluno 5 para o problema de Combinação com número menor de possibilidades no pós-teste, com resposta correta com listagem sistemática.

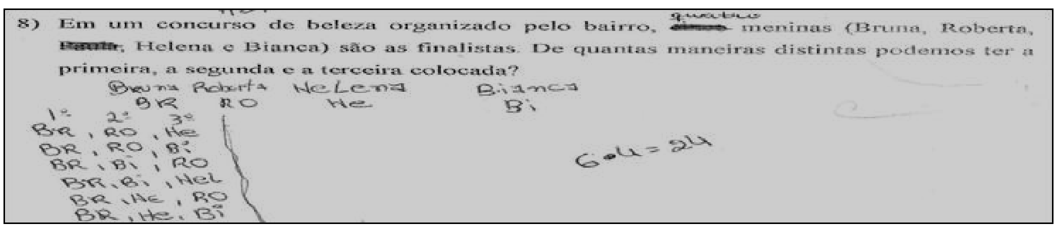
Ambos os alunos (Aluno 2 e Aluno 5) explicitam em suas soluções no pré-teste a ausência de relação combinatória, apresentando respostas que evidenciam isso. Entretanto, no pós-teste suas soluções dão indícios da eficácia das intervenções, pois os mesmos apresentam soluções através de uma *listagem sistemática*, como fora trabalhado nas aulas, demonstrando ainda compreender os *invariantes* dos problemas.

Outro aspecto significativo foi a *percepção das regularidades* dos problemas e a chegada à *generalização* por alguns alunos, como no exemplo a seguir, do Aluno 4.


6. A Semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleçoes: Africa, Brasil, França e Alemanha. De quantas maneiras diferentes podemos ter o primeiro, o segundo e o terceiro colocado nessa disputa?

1 Africa 2 Brasil 3 França / 1 Alemanha - 2 África - 3º Brasil / 1º Br - 2º Fr - 3º Af / 1º Fr - 2º Alem - 3º Africa / 1º Af - 2º Fr - 3º Br / 1º Alemanha - 2º Br - 3º Al / 1º Br - 2º Al - 3º Fr / 1º Fr - 2º Al - 3º Al.

Figura 7. Solução do <u>Aluno 4</u> para o problema de <u>Arranjo</u> com número maior de possibilidades no <u>pré-teste</u>.


8) Em um concurso de beleza organizado pelo bairro, ~~cinco~~ quatro meninas (Bruna, Roberta, ~~Paula~~, Helena e Bianca) são as finalistas. De quantas maneiras distintas podemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada?

Bruna Roberta Helena Bianca
BR RO He Bi
1º 2º 3º
BR, RO, He
BR, RO, Bi
BR, Bi, RO
BR, Bi, Hel
BR, He, RO
BR, He, Bi

6 . 4 = 24

Figura 8. Solução do <u>Aluno 4</u> para o problema de <u>Arranjo</u> com número maior de possibilidades no <u>pós-teste</u>.

No pós-teste, em todos os tipos de problemas com um número maior de possibilidades ocorreram acertos totais através da *percepção de regularidade (generalização)*, o que indica que através das intervenções, nas quais foi enfatizada a percepção das regularidades de cada tipo de problema, os alunos, através de uma listagem inicial, puderam perceber que não seria necessário listar todas e perceberam que poderiam generalizar. Este estudante (Aluno 4) demonstra que, ao listar as possibilidades para o primeiro elemento, no caso *Brasil* encontra o valor seis e, se são quatro seleções, faz *seis possibilidades vezes 4 seleções* e chega ao resultado, demonstrando, assim, perceber que, em alguns casos, não é necessário listar todas as possibilidades, quando percebe a lógica do problema, poderá utilizar a regularidade percebida. Esse é um passo muito importante, pois nem todas as questões combinatórias serão possíveis de serem resolvidas através de uma listagem, porém é necessário que o aluno, antes mesmo de conhecer as fórmulas para essa resolução, tenha construído uma compreensão acerca dos conceitos e características implícitas no problema.

O avanço no quantitativo geral de acertos e na amplitude por tipo de problemas, assim como nos tipos de respostas e estratégias apresentadas, reforçam a eficácia das intervenções, pois, durante as mesmas, foi adotada a metodologia de trabalhar as singularidades de cada problema, chamando-se a atenção para a *listagem de possibilidades* enquanto estratégia, para a *sistematização* da listagem, para os *invariantes* do significado de Combinatória do problema trabalhado e para a *percepção de regularidade (generalização).*

Desta forma, percebendo a características de cada tipo de problema e sabendo a estratégia adequada para a resolução, os alunos, na sua maioria, apresentaram êxito na resolução de todos os tipos de problemas combinatórios.

Conclusões

Diante do que foi observado, pode-se concluir que os alunos, a partir das intervenções realizadas, conseguiram alcançar um avanço significativo quanto ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, apresentando aumentos importantes no quantitativo de acertos de questões entre os testes, assim como na qualidade das respostas.

Através do ensino enfatizando a *listagem* como estratégia, a *sistematização* da listagem, o enfoque nas propriedades *invariantes* de cada significado de problema e a *percepção de regularidade (generalização)*, os alunos conseguiram compreender com maior facilidade o significado das questões, apresentando resoluções que apontam essa compreensão para todos os tipos de problemas.

O uso da *sistematização* aponta nos resultados, como sendo o caminho de melhor facilidade pelos alunos de se chegar ao resultado dos problemas, pois, ainda que apresentando compreensão dos mesmos, alguns alunos demonstravam no pré-teste dificuldade em esgotar as possibilidades que cada problema exigia.

Compreendendo os *invariantes* de cada tipo de problema, os alunos puderam perceber quais possibilidades poderiam combinar e, com o auxílio da *listagem*, enumerá-las de forma a chegar ao resultado correto sem ultrapassar ou esquecer alguma das possibilidades.

Intervir com os alunos de forma a trabalhar as características de cada problema demonstra, neste estudo, ser importante, pois, compreendendo os *invariantes*, elementos fundamentais para que se compreendam as lógicas implícitas em cada significado da Combinatória, os mesmos buscam a resolução correta, utilizando a estratégia adequada, esgotando todas as possibilidades, podendo perceber sua regularidades e chegando à *generalização*.

Fica claro que, mesmo não sendo o ano escolar no qual a Combinatória é trabalhada regularmente com os alunos, apresentar desde cedo esse conteúdo, ensinando a partir de estratégias, e não logo introduzindo fórmulas (embora estas sejam importantes em determinadas situações, como, por exemplo, para seresolver problemas cujos resultados são números de valores altos, mas podem ser vistas em anos escolares mais avançados), os alunos têm a capacidade de aprender de forma consistente este conhecimento tão importante para a sua formação.

Notas

* Doutora em Educação, Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, cristianepessoa74@gmail.com
**Graduanda em Pedagogia, Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, monalisacardoso08@yahoo.com.br

[1] PC=Produto Cartesiano; A= Arranjo; C= Combinação; P= Permutação; -=menor número de possibilidades; +=maior número de possibilidades.
PC-=Produto Cartesiano de menor possibilidades; PC+= Produto Cartesiano de maior possibilidades; A-= Arranjo de menor possibilidades; A+= Arranjo de maior possibilidades; C-= Combinação de menor possibilidades; C+= Combinação de maior possibilidades; P-= Permutação de menor possibilidades; P+= Permutação de maior possibilidades.

[2] Ambas as categorizações apresentadas nos Quadros 4 e 5 são baseadas no estudo de Pessoa e Borba (2009).

Referências

BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

MERAYO, Felix. **Matemática Discreta.** Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A., 2001.

NUNES, Terezinha & BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Como crianças de 1ª à 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório? **Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Recife, 2008.

____________________. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a série. **Zetetike** (UNICAMP), v.17, p.105-150, 2009.

____________________. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.1, n.1, 2010. Disponível em: http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4**.** Acesso em: 21 set. 2010.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita Bezerra dos. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática.** Recife, 2011.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics: Concepts and processes.** New York: Academic Press, 1983.

____________________. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica, 1,**1986, pp. 75-90.

____________________. La théorie de champsconceptuels. **Recherches em Didactique de Mathématiques,** v.10, n° 2.3, PenséeSauvage: Grenoble, França. 1990, pp. 133-170.

____________________. El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.