revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

CONFLITOS DE APRENDIZAGEM NA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA ABSTRATA

Hernando José Rocha Franco*
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
hernando.franco@ifsudestemg.edu.br
Carlos Alberto Santana Soares **
Universidade Federal de Juiz de Fora
carlos.soares@ufjf.edu.br

RESUMO
Neste artigo apresentamos uma discussão acerca de conflitos de aprendizagem vivenciados por estudantes de Licenciatura em Matemática num curso de Álgebra Abstrata. Ao longo de um semestre, acompanhamos doze alunos de uma universidade pública, licenciandos em Matemática, durante as aulas da disciplina Álgebra I, cuja ementa contempla os conceitos de anéis, ideais, corpos e polinômios. O estudo utilizou como referencial a teoria da definição e imagem conceituais, além dos processos constituintes do pensamento matemático avançado, como a generalização, a representação, a visualização e a síntese. O contato direto com a turma durante as aulas, a aplicação de questionários e a observação das avaliações possibilitaram a coleta dos dados da pesquisa.
Palavras-chave: Álgebra. Imagem conceitual. Conflitos cognitivos.

LEARNING CONFLICTS IN ABSTRACT ALGEBRA

ABSTRACT
The objective of this study was to present a discussion on the conflicts faced by undergraduate mathematics students when learning abstract algebra. Along one semester, twelve undergraduate mathematics students from a public university were monitored during algebra I lessons, whose curriculum involves the concepts of rings, ideals, bodies and polynomials. The study was based on the conceptual definition and image theory, as well as on the processes constituting advanced mathematical thinking such as generalization, representation, visualization and synthesis. The direct contact with the class during the lessons, the application of questionnaires and the observation of assessments enabled the retrieval of research data.
Key words: Algebra. Conceptual Image. Cognitive Conflicts.

Introdução

Apresentaremos neste artigo alguns resultados de um estudo realizado com alunos de Licenciatura em Matemática, acerca dos conflitos de aprendizagem evidenciados quando da interação desses estudantes com conteúdos da disciplina de Álgebra Abstrata.

Por conflitos de aprendizagem, entende-se aqui toda e qualquer dificuldade identificada na pesquisa, isto é, o termo "conflito" é utilizado num sentido amplo, como catalisador das discordâncias, dúvidas ou contradições percebidas na fala e na escrita dos participantes.

A discussão, numa abordagem cognitiva, dos conflitos de aprendizagem que emergem quando alunos de licenciatura em Matemática estão diante de um primeiro curso de Álgebra, requereu o estudo de alguns elementos constituintes do pensamento matemático avançado e, também, da adoção de um referencial teórico relacionado a aspectos da psicologia cognitiva.

Foram duas as motivações principais que nos conduziram a este estudo. Primeiramente, em concordância com Mondini (2009), pressupomos relevante que o estudante de Matemática tenha uma formação sólida no que se refere à base matemática do curso de licenciatura. Nesse sentido, o estudo das estruturas algébricas pode ser visto como um alicerce básico para o exercício da docência de Matemática, independente do segmento que o futuro professor venha a atuar.

Numa segunda perspectiva, contrastando com essa relevância da Álgebra para a formação do licenciando em Matemática, a prática docente diária nos mostra que essa forma simbólica de expressão apresenta-se como um forte complicador para o aprendiz, exigindo dele, muitas vezes, uma capacidade de abstração demasiadamente elevada.

Nas seções seguintes, descreveremos o suporte teórico da pesquisa, apresentando, a posteriori, os fatos ocorridos mais relevantes, além de uma breve descrição do contexto e dos instrumentos de coleta de dados utilizados.

Pensamento matemático avançado

A base teórica que fundamentou a análise dos dados coletados foi constituída da teoria da imagem conceitual e da definição conceitual de Tall e Vinner (1981).

No ensino de Álgebra, a prática docente tem mostrado que, conceitos como anéis, ideais, polinômios e grupos apresentam-se, de modo geral, complexos para os estudantes, requerendo um nível de abstração por vezes demasiadamente elevado para compreensão de tais estruturas matemáticas.

Essa complexidade e a forma como se lida com ela distingue o pensamento matemático avançado do elementar. Para Tall (1991), entidades abstratas que são constituídas através de deduções e definições formais formam a base da matemática avançada.

Segundo Domingos (2003), o processo de representação engloba três componentes principais: as representações simbólicas, as representações mentais e a visualização. As simbólicas envolvem relações entre signos e significados como, por exemplo, em Álgebra Abstrata, associa-se ao anel dos números inteiros, simbolicamente representado por (Z, +, **.**) a ideia de que o conjunto Z cumpre os axiomas da definição de anel em relação às operações de adição (+) e de produto (**.**).

A visualização possibilita que as representações mentais ou imagens de referência sejam criadas pelo indivíduo. Exemplos disso têm-se quando esboçamos o gráfico de uma função ou quando relacionamos a ideia de reta tangente à curva num ponto com a derivada da função nesse ponto. No entanto, em Álgebra, como "visualizar" objetos como um subanel, que claramente não possui uma representação geométrica? Podemos inferir que muitas das dificuldades encontradas na compreensão dos conceitos algébricos passam, além da já citada abstração requerida, por uma relativa limitação de estímulos à visualização imposta pela própria natureza desse campo matemático. No ensino de outros conteúdos da Matemática superior como do cálculo diferencial e integral, os recursos didáticos mostram-se mais amplos no sentido de oportunizar, por exemplo, representações geométricas cada vez mais sofisticadas dos objetos matemáticos, apoiadas no desenvolvimento das tecnologias.

Além do processo de representação, a generalização e também a síntese são pré-requisitos para que o estudante alcance um nível mais avançado do pensamento matemático desenvolvendo a capacidade de conscientemente fazer abstrações de situações matemáticas.

Em Brandemberg (2009) temos que generalizar é induzir a partir de elementos particulares, expandindo os domínios de validade com base em atributos comuns. A própria Álgebra traz, nas diferentes formas em que é concebida, a ideia de uma generalização da aritmética, em que o uso da notação literal independe do número ou objeto que determinada variável supostamente representa.

Em relação à síntese, trata-se de compor ou combinar partes de tal modo que elas formem um todo, como no caso das propriedades numéricas – comutatividade, associatividade, distributividade e outras – que estão sintetizadas na estrutura algébrica anel.

Imagem conceitual e definição conceitual

Em um artigo publicado em 1981, Tall e Vinner apresentaram à comunidade de Educação Matemática a teoria da imagem conceitual (*concept image*) e definição conceitual (*concept definition*), também chamadas, por alguns pesquisadores, de conceito imagem e conceito definição.

Segundo esses autores, a mente humana não é uma entidade puramente lógica. A forma complexa em que funciona está frequentemente em desacordo com a lógica matemática, na qual busca-se definir os conceitos de modo exato, preciso, para fornecer uma base sólida para a teoria matemática. Nesse sentido, pode-se inferir que muitos conflitos encontrados pelos estudantes, nos diversos níveis de ensino de matemática, repousam na distinção entre os conceitos matemáticos formalmente definidos e apresentados nas aulas, e os processos cognitivos pelos quais são compreendidos.

Conforme Tall e Vinner (1981), o termo imagem conceitual descreve a "estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, incluindo todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece" (p.152).

A imagem conceitual é um atributo subjetivo do indivíduo e sua formação pode ser influenciada por fatores externos à sala de aula. Além disso, ao se desenvolver, a imagem conceitual não precisa ser coerente o tempo todo, pois diferentes estímulos sensoriais podem ativar no cérebro distintas partes da imagem.

O termo definição conceitual é tratado pela teoria como a forma verbal utilizada pelo estudante para expressar sua imagem conceitual. Pode ser aprendida de uma forma “rotinizada”, por exemplo, ao decorar uma definição ou demonstração matemática, ou de maneira mais significativa. Pode ser também uma reconstrução pessoal, feita pelo estudante, de uma dada definição matemática. Essa definição conceitual pessoal, através de palavras, que o indivíduo realiza para expressar sua imagem conceitual evocada, pode diferir da definição conceitual formal, isto é, da definição aceita pela comunidade acadêmica matemática em geral, respeitado o contexto histórico em que essa definição está sendo admitida.

A fim de evitar ambiguidades nas traduções dos termos anteriores e trazer clareza ao leitor, designaremos, neste artigo, a definição matemática comumente aceita no meio acadêmico apenas como definição formal, deixando o termo definição conceitual, no sentido de algo também subjetivo, como a série de palavras que o estudante utiliza para externar sua imagem conceitual, podendo ou não diferir da definição formal de um determinado conceito matemático.

Em diferentes momentos, imagens conflitantes podem ser evocadas, ou seja, porções de uma mesma imagem conceitual podem ser contraditórias. Um estudante pode já ter visto um conceito matemático e ter dele uma imagem conceitual; essa imagem pode ter sido reforçada ao longo do tempo por experiências repetidas. Mas pode acontecer, em algum momento, que tal imagem se revele inadequada em relação à outra imagem do mesmo conceito, por exemplo, alguma explicação dada pelo professor e que contraste com a imagem que o estudante possui.

Entre as metodologias tradicionais usadas em aulas de Matemática, a maioria dos professores do ensino médio e superior privilegia o papel da definição formal na expectativa de que o aluno possa constituir suas imagens conceituais a partir dessa definição (BRANDEMBERG, 2009). Isso é representado no seguinte esquema:

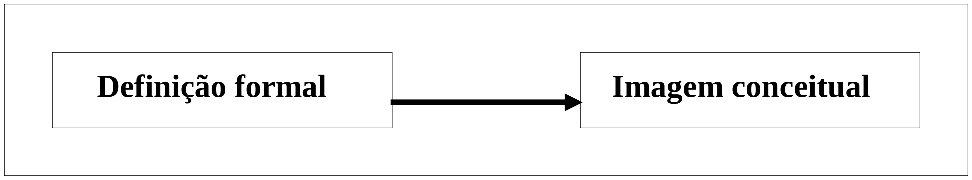


Figura 1: Constituição da imagem conceitual via definição formal
Fonte: Vinner (1991)

Comumente observa-se nos livros de Álgebra Abstrata que a introdução de um conceito é feita via definição formal, seguindo-se os exemplos e, no final, os exercícios propostos. Esta abordagem didática, ao superestimar a definição no processo de ensino e de aprendizagem, é capaz de levar o estudante a formar imagens que lhe permita compreensão do objeto estudado?

Conforme Vinner (1991), é difícil um sistema cognitivo agir contra sua própria natureza, pois o processo que ocorre na prática baseia-se em respostas intuitivas, sem consulta à definição. Essa tradição se impõe pela força dos hábitos de pensamento diários, em que percebemos êxito na realização das tarefas rotineiras apenas com consulta à imagem conceitual. Nesse sentido, em um contexto técnico como o estudo da Matemática, a tomada de decisão sem consulta à definição pode levar, principalmente o aluno iniciante, a cometer erros advindos de imagens equivocadas. Esquematicamente, esse processo prático baseado em uma resposta intuitiva, pode ser visto no diagrama a seguir:

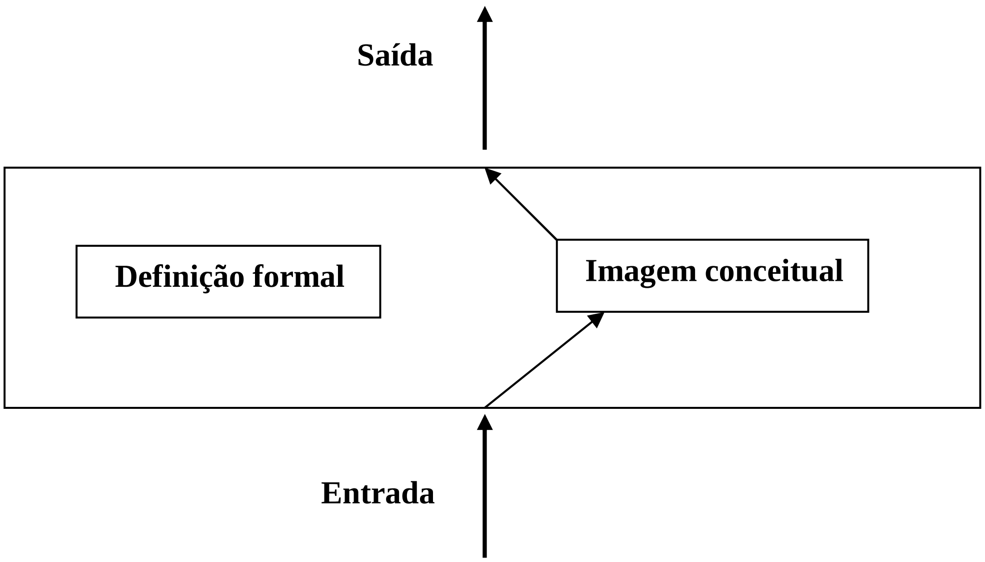


Figura 2: Resposta intuitiva
Fonte: Vinner (1991)

Ainda, segundo Vinner (1991), um modo de contrapor-se a essa tendência é a proposição para os estudantes de problemas não rotineiros em que a imagem conceitual seja insuficiente para resolvê-los.

Campo da pesquisa

Nossa investigação ocorreu durante o 1º semestre de 2011, mais precisamente entre os meses de março e julho, nas aulas de Álgebra I, disciplina obrigatória do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública federal. A carga horária era de 60 horas-aula, com 4 horas-aula semanais e a ementa continha os seguintes tópicos: Anéis e Corpos; Anéis de Polinômios; Extensões Algébricas dos Racionais e Grupos. As aulas regulares se realizaram em dois dias da semana, a saber: terça-feira e quinta-feira, no horário das 16h às 18h. Trabalhamos com um grupo de 12 alunos, licenciandos do 7° período, que se deparavam pela primeira vez com os conceitos da Álgebra Abstrata e traziam, como pré-requisito, a disciplina Introdução à Teoria dos Números.

Procedimentos metodológicos

Os dados foram coletados por meio da realização dos seguintes procedimentos:

- *Contato direto dos pesquisadores com os estudantes, através de diálogos e aplicação de questionários*

As aulas da disciplina Álgebra I foram ministradas por um dos autores deste artigo, professor titular da instituição, e acompanhadas pelo outro autor. Isso nos possibilitou manter conversas constantes com os alunos participantes da pesquisa, de modo mais “informal” nos momentos que antecediam o início das aulas, durante os intervalos e ao término das mesmas. Percebemos que essa informalidade permitia aos alunos um razoável grau de espontaneidade ao comentarem sobre seus conflitos com determinados conteúdos estudados. Essas impressões eram muitas vezes ratificadas nas respostas aos questionários aplicados à turma.

- *Registro das diversas falas ou silêncios dos estudantes durante as aulas e plantões de dúvidas, que apontassem sinais de conflitos de aprendizagem*

As anotações eram feitas com base nas perguntas dos alunos, bem como em suas respostas ou silêncios diante das indagações do professor. Esses registros eram analisados ao término das aulas, sob a luz do referencial teórico. Por exemplo, quando o professor solicitava uma determinada definição matemática vista anteriormente, as respostas eram, muitas vezes, exemplificações do objeto matemático ou nenhuma expressão verbal era ouvida, denotando a não constituição até aquele momento de imagens conceituais.

- *Observação das resoluções das questões de provas*

Outra fonte de dados foi o acompanhamento das provas e trabalhos aplicados à turma. A análise das respostas dos alunos às questões propostas nos auxiliou na identificação dos possíveis conflitos de aprendizagem.

- *Análise do livro de Álgebra Abstrata adotado no curso, de outras obras constantes na bibliografia e das anotações dos conteúdos matemáticos desenvolvidos em sala*

O material didático disponível para os alunos compunha-se do livro adotado *Introdução à Álgebra* (GONÇALVES, 1999) e das seguintes obras da bibliografia que constavam do acervo bibliotecário da universidade para empréstimo ou consulta:

- DEAN, R. A. Elementos de Álgebra Abstrata. Ltc, 1974;
- DOMINGUES, H. H. & IEZZI, G. Álgebra Moderna. Atual Editora, 2003;
- LEQUAIN, Y & GARCIA, A. Álgebra: uma introdução. Impa, 2008;
- HEFEZ, A. Curso de Álgebra (vol. 1). Coleção Matemática Universitária. Impa, 1993.

As relações entre as imagens conceituais e a definição formal

Em conformidade com o texto de Álgebra adotado no curso, a apresentação no quadro de aula das estruturas como anel, subanel, ideal e outras, deu-se de maneira axiomática e com base na definição formal.

Nossa conjectura, em consonância com a pesquisa de Franco (2011), é que a definição formal, pelo menos num primeiro momento, não foi suficiente para que os alunos formassem uma imagem conceitual, digamos “significativa”, da compreensão desses conceitos matemáticos. A interpretação das observações das aulas mostrou que, somente a partir de exemplificações de conjuntos numéricos mais “tradicionais”, os alunos formaram imagens conceituais do objeto matemático. Sempre quando solicitados, eles expressavam suas definições conceituais com base nesses exemplos.

Vejamos alguns casos:

- $*$ anel $\rightarrow$ *conjunto dos números inteiros Z*
- $*$ anel não comutativo $\rightarrow$ *conjunto de matrizes 2x2*
- $*$ corpo $\rightarrow$ *conjunto dos reais R*
- $*$ subanel $\rightarrow$ *conjuntos 2Z, 3Z...nZ*

Embora os alunos formassem imagens iniciais das estruturas algébricas – conjuntos e operações - a partir dos exemplos e contra exemplos estudados, percebeu-se que nem todos os conteúdos de Álgebra I puderam ser assimilados nessa perspectiva. Para Franco (2011), a apresentação nas aulas de exemplos numéricos de anel quociente mostra-se insuficiente para a formação de imagens conceituais da definição deste objeto matemático.

O conflito do subanel

No estudo de subanel, observou-se conflitos acerca da definição formal e das caracterizações desse conceito.

De início, discutiremos alguns aspectos matemáticos que envolvem o conceito subanel e, em seguida, abordaremos os fatos observados durante as aulas deste tópico.

Considere a definição de subanel a seguir: *Seja (A, +, ·) um anel e B um subconjunto não vazio de A, fechado para as operações de soma e multiplicação de A. B é um subanel de A se B for um anel com as operações de A.*

A partir dessa definição pode-se inferir que um subanel, enquanto subconjunto não vazio de algum anel, conserva as operações de adição e multiplicação do anel, porém restritas aos elementos do subanel. Herda também as propriedades de anel, que são a associatividade, a comutatividade, existência de elemento neutro e de simétrico para a soma, associatividade do produto e distributividade do produto em relação à soma.

Talvez, por questões de não repetição ou mesmo de síntese, processo próprio da linguagem matemática, a definição formal de subanel é apresentada nos livros de Álgebra de maneira simplificada com ênfase na sua caracterização. Para um leitor experiente como um professor da área, as “sutilezas matemáticas” do texto ou essas entrelinhas podem ser captadas facilmente, ao passo que, para estudantes iniciantes, esses detalhes podem passar despercebidos.

Em relação às caracterizações de subanel, tem-se no livro texto Gonçalves (1999, p. 43), a proposição de que um subconjunto B é subanel de um anel $(A,+,\cdot)$ se e somente se são verificadas as seguintes condições:

a) $0 \in B$ *(o elemento neutro de A pertence a B)*

b) $x, y \in B \Rightarrow x - y \in B$ *(B é fechado para a diferença)*

c) $x, y \in B \Rightarrow x \,.\, y \in B$ *(B é fechado para a produto)*

Analisemos os itens a), b) e c) acima. Por hipótese $0 \in B$, $0 - x = -x \in B$, conclui-se que o simétrico de qualquer elemento está no subanel. Se tomarmos x e y pertencentes a B, então $x - (-y) = x + y$ também estará em B. Logo, B é fechado para a soma, preservando as suas propriedades comutativa, associativa e distributiva, possui simétrico aditivo e, pelas hipóteses, é também fechado para a multiplicação e tem elemento neutro da adição. Deve-se notar a não necessidade de se mencionar que B é um conjunto não vazio, pois isso está dito na condição a).

Durante a aula, o professor partiu da hipótese de que o subanel B é não vazio, caracterizando-o da seguinte maneira:

$(B, +, \cdot)$ será um subanel de A, $(B \neq \phi)$ se:

(a_1) $x - y \in B, \quad \forall x, y \in B.$

(b_1) $x.y \in B, \quad \forall x, y \in B.$

Intencionava-se que nessa caracterização os alunos percebessem a não necessidade de se escrever a condição a) do livro texto, ou seja, que ambas se apresentavam matematicamente idênticas.

Notou-se certo desconforto de parte da turma com a diferença entre o que se apresentava no quadro de aula e o que constava no livro, confirmado na seguinte indagação de uma aluna:

- *Professor, não precisa mostrar que o zero está no subanel?*

O professor interveio e respondeu que a hipótese $B \neq \phi$, juntamente com a condição "x – y $\in$ B", garantem a existência do elemento neutro 0. Explicando melhor: como $B \neq \phi$, tome $x \in B$. Por hipótese, $x - x = 0 \in B$.

Os critérios de caracterização de subanel, a partir das condições de ser fechado para a diferença e para o produto, levaram os alunos a uma tendência a abandonar as demais propriedades de anel, como se o subanel não fosse também um anel. Algo como se a imagem conceitual formada com a caracterização de subanel se sobrepusesse à definição formal desse conceito, enquanto teste relativamente mais simples de se verificar se determinado conjunto é ou não subanel, comparado ao trabalho de verificação de cada uma das propriedades herdadas da definição de anel. Todavia, a não observância de que, nas condições apresentadas para o teste de subanel, está implícita toda a definição de anel, pode levar o estudante à formação de imagens conflitantes da interação desses conceitos.

A fim de ratificar as considerações anteriores, observou-se que os alunos ao citarem exemplos de subanel, pareciam resistir em vê-los como anéis. Em diferentes momentos, o professor ao solicitar à turma casos de subanel, obtinha como respostas os conjuntos 2Z = {0, ± 2, ± 4, ± 8, ...}, 3Z = {0, ± 3, ± 6, ± 9, ...} etc. As imagens dos conjuntos nZ como subanéis de Z já pareciam bem sedimentadas; porém, os alunos não expressavam essas estruturas como anéis quando questionados, como se as propriedades de anel não fossem "absorvidas" pelo subanel, ressalvados os casos de não existência da propriedade na nova estrutura, como o fato de 2Z não possuir unidade.

Conflitos potenciais e conflitos cognitivos: o caso da notação do anel Z_m

Segundo Domingos (2003), um estudante para adquirir um conceito precisa formar uma imagem conceitual do mesmo. Porém, essa imagem, embora possa ser reforçada ao longo do tempo por experiências repetidas, pode se revelar inadequada ao contrastar com outras imagens. Dessa maneira, cria-se um conflito entre a imagem anterior, que o estudante acreditava ser definitiva, e a nova imagem, levando a uma versão mais ampla do conceito. Tall e Vinner (1981) chamam de *fator de conflito potencial* uma parte (ou partes) da imagem conceitual que pode (ou podem) se opor a outra parte (ou outras partes) dessa mesma imagem. Quando a imagem conceitual evocada em determinado instante pelo estudante contém um fator de conflito potencial, temos o *fator de conflito cognitivo*, ou seja, o conflito vem à tona. Assumimos, em consonância com esses autores, que converter fatores de conflitos potenciais em conflitos cognitivos é importante para a ascensão a estágios matemáticos superiores, desde que não se transformem em obstáculos intransponíveis ao avanço da aprendizagem.

Em uma abordagem construtivista, o conflito é o elemento central da estratégia de construção do conhecimento, pois pode estimular a contradição, a busca pela generalidade dos conceitos e o desenvolvimento do pensamento crítico do estudante.

Embora fosse difícil precisar o momento exato em que conflitos potenciais tornaram-se ou não cognitivos, percebemos fortes indícios apontando na direção da notação simbólica. Por exemplo, os alunos demonstravam estranheza ao trabalharem com a mesma grafia para os elementos do anel Z_m, conjunto em que o elemento $\overline{a} \in Z_m$ representa a classe dos números inteiros que deixa resto *a* na divisão por m.

Numa das aulas, foi discutido o caso de que em Z_2 e Z_3, o elemento $\overline{1}$ tem a mesma escrita e representa a classe dos números que deixam, respectivamente, resto 1 na divisão por 2 e por 3, ou seja, significados distintos para a mesma escrita.

Ainda em Z_m, situações contrárias à anterior, casos em que a grafia é diferente, mas os elementos representam a mesma ideia matemática. Exemplificando, em Z_7, o inverso multiplicativo de $\overline{4}$ é o $\overline{2}$, pois $\overline{4}\,.\,\overline{2} = \overline{1}$. Esse momento representou uma ampliação da imagem conceitual dos alunos, pois a partir do conflito imposto pela grafia, puderam perceber que, neste anel, o inverso de $\overline{4}$ pode ser escrito como $\overline{2}$.

De modo semelhante, essas dificuldades relacionadas à notação também foram observadas no estudo de polinômios, em que dois polinômios diferentes podem induzir a funções polinomiais iguais. Em $Z_3[x]$, por exemplo, os polinômios distintos $p(x) = x^3$ e $q(x) = x$ representam a mesma função polinomial, uma vez que para cada $a \in Z_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ tem-se $a^3 = a$. Vejamos:

$$(\overline{0})^3 = \overline{0}$$

$$(\overline{1})^3 = \overline{1}$$

$$(\overline{2})^3 = \overline{8} = \overline{2}$$

Esses conflitos acima discutidos, segundo Franco (2011), permitem um enriquecimento das imagens conceituais referentes ao conhecimento das estruturas algébricas, aqui considerado importante para a formação do professor de matemática.

Os conflitos com os exercícios de demonstração

Diferentemente dos conflitos com a notação de Z_m relatados na secção anterior, e aparentemente vencidos pelos alunos ainda durante o curso, as dificuldades na resolução dos exercícios de demonstração não se mostraram superadas, evidenciando a chamada aversão ao formalismo algébrico, fato já considerado senso comum em Educação Matemática. O que se quer dizer é que, mesmo em final de curso de licenciatura em Matemática e, a princípio, já tendo estudado outros conteúdos matemáticos abstratos, os estudantes mostravam-se desconfortáveis quando da realização dessas atividades.

Entendemos que demonstrar em Matemática é como um procedimento de validação que a caracteriza como ciência não experimental e, nesse sentido, saber provar é, senão a mais importante, uma das principais habilidades requeridas de quem estuda Matemática. Pode-se compreender um pouco o sentimento de ansiedade e, por vezes, de frustração, do qual o estudante é acometido quando está diante dessas tarefas cognitivas.

Como exemplo, decorrentes dos axiomas de anel, vejamos as demonstrações de algumas propriedades de um anel (A, +, ·), que foram feitas durante as aulas pelo professor e cobradas a posteriori nas avaliações, tais como:

a) $0.x = x.0 = 0$

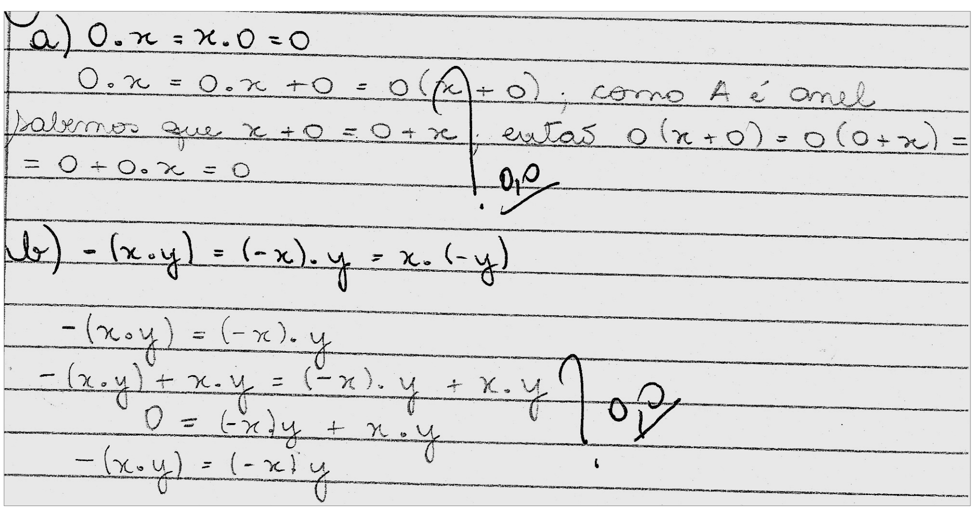
b) $-(x.y) = (-x).y = x.(-y)$

c) $(-x).(-y) = x.y$

d) $(-1).x = -x$

e) $(-1).(-1) = 1$

As demonstrações acima aparecem também como exercícios propostos no livro-texto do curso e, durante a aula em que essas questões foram corrigidas, não registramos dúvidas significativas. Porém, ao inspecionarmos as avaliações, vimos que alguns alunos não conseguiram êxito, conforme se verifica a seguir:


a) $0 . x = x . 0 = 0$

$0 . x = 0 . x + 0 = 0(x + 0)$; como A é anel sabemos que $x + 0 = 0 + x$, então $0(x + 0) = 0(0 + x) =$
$= 0 + 0 . x = 0$

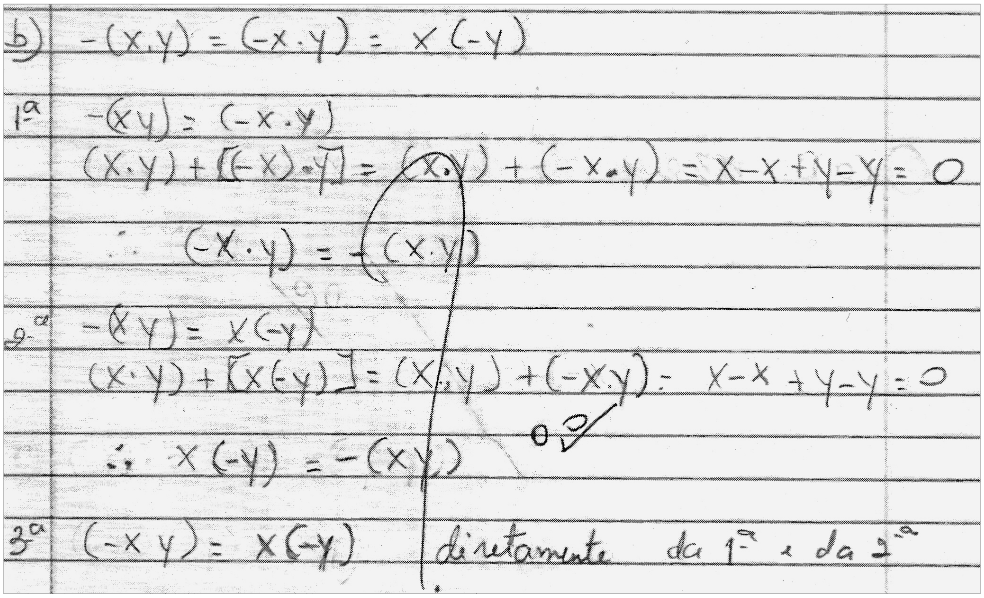
0,0

b) $-(x . y) = (-x) . y = x . (-y)$

$-(x . y) = (-x) . y$
$-(x . y) + x . y = (-x) . y + x . y$
$0 = (-x) . y + x . y$
$-(x . y) = (-x) . y$

0,2

Figura 3: Resolução apresentada na 1ª prova referente às propriedades de anel



b) $-(x.y) = (-x.y) = x(-y)$

1ª $-(xy) = (-x.y)$

$(x.y) + [(-x).y] = (x.y) + (-x.y) = x - x + y - y = 0$

$\therefore (-x.y) = -(x.y)$

2ª $-(xy) = x(-y)$

$(x \cdot y) + [x(-y)] = (x.y) + (-x.y) = x - x + y - y = 0$

$\therefore x(-y) = -(xy)$

3ª $(-x\,y) = x(-y)$ diretamente da 1ª e da 2ª

Figura 4: Resolução apresentada na 1ª prova referente às propriedades de anel

Parece-nos que, até aquele momento, alguns alunos ainda não haviam construído uma imagem conceitual capaz de permitir-lhes tais demonstrações, mesmo já tendo contato prévio com as resoluções. Outra conjectura possível está no fato de que eles podem ter buscado uma resposta intuitiva, sem consulta aos axiomas da definição formal, haja vista as imagens conceituais formadas a partir da utilização dessas propriedades de forma automática, sem demonstração, na Álgebra básica.

A propriedade distributiva, tão amplamente utilizada desde o ensino fundamental, está na base das demonstrações anteriores como se observa para um anel qualquer (A, +, ·), no caso de 0.x = 0, a seguir:

$$0.x = (0 + 0).x$$
$$0.x = 0.x + 0.x$$
$$0.x + (-0.x) = 0.x + 0.x + (-0.x)$$
$$0 = 0.x$$

As observações aqui feitas nos levam também a pensar na possibilidade de que aqueles que conseguiram desenvolver as demonstrações na prova, poderiam estar apenas repetindo um procedimento “memorizado” a partir das resoluções feitas em aula.

Considerações finais

Um olhar para o passado e a percepção de que foram necessárias décadas e até séculos de trabalho de eminentes matemáticos para se chegar às atuais estruturas algébricas, permite-nos refletir sobre os conflitos vivenciados pelo estudante que depara, pela primeira vez, com o formalismo de objetos como anéis, corpos, polinômios, entre outros. É razoável “entender” as dificuldades de aprendizagem diante de todo esse conhecimento construído durante muitos anos e apresentado modernamente com base em abstrações complexas.

Nesse sentido, os conflitos investigados evidenciaram as diferenças entre a Álgebra, enquanto campo matemático estruturado em bases formais, e os processos cognitivos requeridos para a sua aprendizagem. Se, por um lado, expressar a Matemática por meio de uma linguagem rigorosa e concisa diminui as chances de ambiguidades ou interpretações subjetivas, por outro, essa forma de expressão apresenta-se como um forte complicador para alunos iniciantes. A notação simbólica da Álgebra, ao mesmo tempo em que possibilita ao matemático se comunicar de modo rápido e preciso, requer do aprendiz, muitas vezes, um grau de abstração demasiadamente elevado, como mostraram as dificuldades dos alunos com os exercícios de demonstração ou no entendimento de determinada definição formal.

Outra evidência da investigação aponta para a falta de textos didáticos de Álgebra Abstrata voltados à formação de professores de Matemática, que auxiliem o licenciando não só na assimilação dos conceitos algébricos, mas também no desenvolvimento de uma visão crítica dessas estruturas, tão necessária à prática docente.

Também a partir de nossa pesquisa, sugerimos a realização em sala de aula, de exercícios que explorem a definição conceitual, como forma de possibilitar aos estudantes, expressar com palavras, suas imagens conceituais acerca das diversas estruturas algébricas trabalhadas, até mesmo para identificarmos fatores de conflitos de aprendizagem.

Entendemos que, diferentemente de outras áreas do ensino de Matemática superior, em que se tem uma considerável quantidade de estudos realizados, como no ensino de Cálculo e Análise, há um campo aberto para pesquisas acerca dos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Abstrata.

Notas

*Mestre em Educação Matemática. Professor do Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais – IFsudestemg. E-mail: hernando.franco@ifsudestemg.edu.br

**Doutor em Matemática. Professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora-Ufjf. E-mail: carlos.soares@ufjf.edu.br

Referências

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. Natal, 2009. Tese (Pós-graduação em Educação Matemática) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo.** São Paulo: Livraria da Física, 2010

DOMINGOS, A. M. D.. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior.** Lisboa, 2003. 387 f. Tese (Doutorado em Ciências de Educação) – Universidade Nova de Lisboa.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna.** São Paulo: Atual, 2003.

FRANCO, H. J. R. **Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura num curso de Álgebra:** Identificação e análise. Juiz de Fora, 2011. 101f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

GONÇALVES, A. (1999***) Introdução à álgebra.*** Rio de Janeiro: Impa.

MONDINI, F. **Modos de conceber a álgebra em cursos de formação de professores de matemática.** Rio Claro, 2009. 168f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista.

TALL, D. (1991) **The psychology of advanced mathematical thinking**. In David Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

TALL, D. **Concept image and concept definition, 2003.** Disponível em http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/conceptimage.html. Acesso em: 15 set. 2010.

TALL, D.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 1981.** Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html>. Acesso em: 15 set. 2010.

VINNER, S. **The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics.** In David Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.