revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PROVAR E DEMONSTRAR: UM ESPINHO NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Saddo Ag Almouloud*
Pontifícia Universidade Católica – SP
saddoag@pucsp.br
Maria José Ferreira da Silva**
Pontifícia Universidade Católica – SP
zeze@pucsp.br
Cristiana Abud da Silva Fusco***
Pontifícia Universidade Católica – SP
cfusco@pucsp.br

RESUMO
Nesse trabalho, inicialmente, levantamos algumas questões teóricas relacionadas à demonstração a fim de compreender melhor o raciocínio de professores submetidos à formação continuada a respeito de demonstração. Em seguida, apresentamos um estudo de caso, em que observamos dois professores em formação cujo foco era o estudo de provas e demonstrações em geometria. A análise dos dados coletados mostra que os professores, sujeitos da pesquisa, têm dificuldade em levantar as informações dadas no enunciado de uma proposição matemática e o reconhecimento de elementos cruciais, como hipótese e tese, que são fundamentais para o processo de construção de uma demonstração.
Palavras-chave: Demonstração. Formação de professores. Hipótese-tese. Teorema recíproco.

PROVE AND DEMONSTRATE: A THORN IN THE PROCESS OF TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICS

ABSTRACT
In this work, initially, we raise some theoretical questions related to the demonstration in order to better understand the reasoning of teachers submitted for continuing education about demonstration. Next, we present a case study, in which we observe two teachers-in-training whose focus was the study of proofs and demonstrations in geometry. The analysis of the collected data shows that teachers, research subjects have difficulty getting the information on the statement of a mathematical proposition and the recognition of the crucial elements, such as hypothesis and theory, which are fundamental to the process of building a proof.

Keywords: Hypothesis.Thesis. Reciprocal theorem. Demonstrations. Teacher education.

Introdução

Nos últimos anos vimos sofrendo com uma "síndrome do imediatismo", isto é, uma ansiedade por resultados imediatos. Tudo que se faz ou se pensa deve gerar um resultado prático e imediato. Essa busca por resultados é sentida nas salas de aula quando o professor de matemática busca desenvolver os conteúdos e depara-se, frequentemente, com questões do tipo: para que serve isso? Quando utilizaremos e de que forma? O aluno sente a necessidade de enxergar, quase que instantaneamente, uma aplicação para o que está aprendendo. Esse sentimento é apoiado pelas teorias que defendem uma aprendizagem contextualizada no sentido de propiciar uma aprendizagem com mais significado para os alunos. É inegável que esse aspecto de contextualizar conteúdos pode tornar a aprendizagem mais atraente, além de dar sentido a diversos conteúdos. No entanto, existem grupos de educadores matemáticos preocupados em resgatar o ensino da matemática em que se utilizam também provas e demonstrações nos ensinos fundamental e médio. A importância atribuída a provas e demonstrações nos últimos anos levou a uma variedade de pesquisas nessa área. Tal fato pode ser observado pelo número de trabalhos apresentados em congressos internacionais, artigos publicados em revistas de renome, pelas teses de doutorado relacionadas a provas e pela quantidade de visitantes do "*Newsletter on Proof*", como confirma Balacheff (2008) em seu artigo.

As dificuldades relacionadas a provas e demonstrações são inúmeras e vão desde o reconhecimento de uma demonstração em um livro de matemática (ALMOULOUD, 2006), a identificação dos dados que fazem parte da hipótese e da tese em uma proposição, até identificar se a proposição possui condições necessárias e suficientes. No que se refere à construção de uma demonstração, os problemas se intensificam e com o surgimento da questão: como realizar uma argumentação por meio de relações construídas de maneira coerente que, de fato, comprove o que se deseja, utilizando os dados da proposição e recursos matemáticos conhecidos. Nesse trabalho, inicialmente, levantamos algumas questões teóricas relacionadas à demonstração a fim de compreender melhor o raciocínio dos professores submetidos à formação continuada a respeito de demonstração. Em seguida, realizamos um estudo de caso observado a partir de atividades realizadas por um grupo de professores participantes dessa formação que tinha como um de seus objetivos incentivá-los a incrementar sua prática docente a partir de atividades que propiciassem a reconstrução de saberes relacionados a conteúdos matemáticos das séries finais do ensino fundamental que são passíveis de demonstração.

Provas e demonstrações: concepções e diferentes pontos de vista

Muitos trabalhos buscam uma melhor compreensão do raciocínio lógico e das demonstrações em matemática. Consideramos, usualmente, a demonstração como um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque nessa disciplina. Em nossas pesquisas, adotamos a distinção entre *explicação*, *prova* e *demonstração* segundo Balacheff (1982). A *explicação* situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A *explicação*, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social e constitui-se uma prova para esta comunidade, sendo a proposição “verdadeira” ou não. As *provas* são explicações aceitas em um determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff (1982) denomina, somente neste caso, de demonstração. *As demonstrações* são provas particulares com as seguintes características:

- são as únicas aceitas pelos matemáticos;
- respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas em um conjunto de regras lógicas;

- trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência.

Balacheff (2004) discute diversas perspectivas de prova matemática no processo de ensino e aprendizagem e confronta as afirmações de De Villiers (i) e Hanna e Janke (ii) (*apud* BALACHEFF, 2004, p. 13), segundo os quais a prova tem as seguintes funções:

(i) verificação, explicação, sistematização, descoberta e comunicação;

(ii) construção de uma teoria empírica, exploração do significado de uma definição ou das consequências de uma hipótese, absorvendo um fato novo em uma nova estrutura que permite uma nova percepção.

Balacheff (2008), em uma perspectiva epistemológica, argumenta ainda que a racionalidade é a base de qualquer processo de prova. A forma como vemos a racionalidade em geral e sua relação com a matemática em particular é um ponto chave para a compreensão de pesquisas relacionadas a demonstrações, pois podemos aceitar que provar depende do conteúdo e do contexto. O autor afirma, ainda, que a comprovação de uma verdade não pode ser realizada da mesma forma no dia a dia, no direito, na política, na filosofia, na medicina, na física ou na matemática. Não utilizamos as mesmas regras e critérios para tomadas de decisões nos diversos contextos em que estamos envolvidos. Essas regras e critérios podem dar origem a opiniões, crenças e conhecimentos, que em todos esses casos estão organizados numa estrutura que permite o raciocínio e a tomada de decisão.

Encontramos trabalhos como o de Hanna (2008), em que se discute a tese de Rav (1999, p.5-41), cujas ideias principais estão relacionadas à crença de que as demonstrações fornecem importantes elementos para a matemática como estratégias e métodos; para o autor, “provas mais do que os teoremas são os alicerces do conhecimento matemático” (nossa tradução). Esses autores consideram que realmente existe um consenso entre matemáticos, filósofos e educadores matemáticos de que as demonstrações são, para a matemática, sua parte mais importante, uma vez que a demonstração é que estabelece a validade de uma afirmação matemática. Eles afirmam que Rav, sem dúvida, concorda com isso, mas afirma que existe um aspecto da demonstração que não se dá a devida atenção, e que a importância da demonstração vai muito além de se estabelecer uma verdade matemática. Nesse sentido, uma demonstração tem valor não só porque comprova um resultado, mas também porque pode apresentar novos métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que têm uma aplicabilidade mais ampla em matemática e aponta novas direções matemáticas. As demonstrações são indispensáveis para a ampliação do conhecimento matemático; o simples ato de planejar uma prova contribui para o desenvolvimento da matemática. As demonstrações produzem novas visões matemáticas, novas ligações contextualizadas, e novos métodos para resolver problemas, dando a elas um valor muito além de comprovar a veracidade de proposições.

São muitas as pesquisas que tratam dos aspectos históricos e epistemológicos relacionados à natureza e às funções da prova e da demonstração em matemática. Esse tipo de pesquisa constitui um foco tradicional de pesquisa que propiciou uma série de contribuições nesse campo. Balacheff (2008) discute outra perspectiva que tem como foco a relação entre os aspectos epistemológicos e cognitivos. Nessa perspectiva, o foco é o aluno como um sujeito que enfrenta o problema da demonstração em sua atividade matemática. A transposição didática da demonstração em matemática para a sala de aula tem dois alvos: enfatizar as dificuldades dos alunos e propor novas estratégias de intervenção de ensino.

Ainda, nessa perspectiva histórica e epistemológica das discussões a respeito de demonstração, encontram-se os estudos de Mariotti e Balacheff (2008) que discutem as semelhanças e complementações de questões relacionadas a demonstrações, chamando a atenção para o fato de que a demonstração vai muito além da verdade matemática que se deseja comprovar. Os autores consideram o estudo de Hanna e Barbeau que acreditam que a ideia chave da tese de Rav poderia ser aplicada em sala de aula com sucesso. O argumento principal não diz respeito à generalidade dos processos de demonstração, mas à especificidade de certas demonstrações e suas potencialidades de prover os estudantes com importantes elementos matemáticos como estratégias e métodos para resolução de problemas. Os autores também comentam a noção de transparência que está relacionada à falta de conhecimento a respeito de técnicas de demonstrações ou ideias-chave de demonstrações e estratégias de demonstrações. Citam, ainda, Jahnke, que foi quem elaborou a distinção entre teoremas “abertos e fechados”. Essa distinção descreve a flexibilidade com a qual matemáticos tratam o conjunto de hipóteses na fase inicial do teorema, dentro de novas áreas da matemática. Tal distinção nos possibilita compreender algumas interpretações equivocadas do enunciado de teorema como a "confusão" entre as condições necessária e suficiente que só é reconhecida com facilidade quando a expressão "se e somente se" faz parte do enunciado. Assim, buscamos em nossa pesquisa proporcionar ao grupo de professores em formação continuada um ambiente em que a demonstração fosse tratada sob esse ponto de vista, levando-os a desenvolver algumas técnicas de demonstração, métodos e procedimentos para a resolução de problemas.

Provar e demonstrar proporcionam a construção de significado

Desenvolvemos um projeto junto a 15 professores da rede pública e particular da cidade de São Paulo intitulado: *O raciocínio dedutivo no processo de ensino e aprendizagem da Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental*. Trata-se de professores preocupados com a sua prática pedagógica e que gostariam de incrementá-la, porém não sabiam como fazê-lo. Dessa forma, eles se dispuseram a participar como voluntários de uma pesquisa a respeito do raciocínio dedutivo, em que, por meio de uma formação continuada, vivenciaram certas ações e puderam reconstruir suas concepções sobre prova e demonstração. O trabalho realizado direcionou-se em quatro fases: a análise epistemológica da noção de demonstração em matemática; a análise de processos de ensino e de aprendizagem envolvendo provas e demonstrações; a análise de concepções de estudantes e professores a respeito de demonstração (incluindo suas dificuldades e obstáculos relacionados a sua evolução em termos de raciocínio dedutivo) e da análise das condições da realização efetiva da formação de professores do Ensino Básico participantes do projeto.

Nosso projeto de pesquisa foi norteado pelas seguintes etapas:

1. Diagnosticar concepções iniciais dos professores que participaram do processo de formação em situações envolvendo provas e demonstrações, por meio de mapa

conceitual e entrevista estruturada.

2. Com base nos resultados e nos estudos didático-epistemológicos, elaboramos um conjunto de situações que foram desenvolvidas com os professores.
3. Orientamos os professores na elaboração, análise e aplicação de um conjunto de atividades que foi desenvolvido com seus alunos e, nesse sentido, realizamos discussões para esse processo tanto de modo presencial, quanto em um fórum em ambiente virtual.
4. Diagnosticamos possíveis mudanças de concepções e de prática pedagógica dos professores, por meio de mapa conceitual, entrevistas e de acompanhamentos em sala de aula e no ambiente virtual.
5. Analisamos as produções escritas e orais dos professores e os testes aplicados aos seus alunos, fazendo uso de *software* de tratamento de dados estatísticos.
6. Analisamos o papel do raciocínio dedutivo nas abordagens de alguns livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental II.

Essa formação, que ainda perdura com outra temática, é constituída de encontros semanais com duração de três horas. Nesses encontros, um membro do grupo de pesquisa coordena os trabalhos que são realizados individualmente, em duplas ou em trios. Geralmente os professores recebem o material fotocopiado com problemas a serem resolvidos. Também ocorrem momentos em que a formadora interage com o grupo, discutindo e colocando na lousa resultados do que se havia tratado no material entregue. Vale destacar que os professores participantes dessa pesquisa possuem licenciatura em matemática ou uma complementação que os habilita a lecionar. Nesse projeto adotamos os princípios da pesquisa-ação, pois ele foi concebido em estreita associação com uma ação ou com a resolução de problema coletivo em que, tanto os pesquisadores quanto os professores participantes, estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (THIOLENT, 1998).

Conforme apontado anteriormente, discutimos algumas questões a respeito de provas, ilustrando-as com resultados obtidos a partir da investigação com os professores que participaram dessa formação continuada na etapa relativa ao resgate da prova e da demonstração em sala de aula. No decorrer do projeto, os professores realizaram atividades que tinham por objetivo favorecer a compreensão do significado de demonstração e de seu papel no ensino, com o propósito de incentivá-los a integrar provas e demonstrações ao processo de formação de seus alunos, “ajudando-os a restituir a historicidade de prova, de demonstração e de rigor matemático” (GOUVÊA, 1998, p.1).

Nessa pesquisa, o estudo de caso propiciou-nos obter os dados para a nossa questão, considerando-se que essa modalidade “[...] é recomendável para a construção de hipóteses, para confirmação ou reformulação do problema e, sobretudo, quando se quer estudar algo singular, que tenha um valor em si mesmo” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.109-110). Vale mencionar que o estudo de caso segue uma abordagem qualitativa e busca retratar a realidade de forma profunda e completa. No presente trabalho visamos observar as dificuldades de um professor do Ensino Básico em identificar se uma proposição corresponde ou não a um teorema recíproco e sua habilidade em reconhecer a hipótese e a tese em uma afirmação matemática. Tal estudo, evidentemente, contribuirá na busca de respostas para as discussões relacionadas ao raciocínio dedutivo que envolve professores de Ensino Básico. Durante a sessão em que ocorreu a atividade que será descrita a seguir em detalhes, contamos com a presença de professores observadores, além de audiogravação.

Passaremos a descrever um pequeno trecho de uma das sessões em que os professores em formação mostraram não ter clareza das diferenças entre teorema, lema, corolário e teoremas recíprocos, isto é, aqueles que possuem as condições necessárias e suficientes. Além disso, podemos estender a discussão afirmando que muitos alunos somente reconhecem uma afirmação como teorema se ela estiver redigida na forma “se ..., então”.

Nessa sessão (que faz parte de um conjunto de sessões que tem como objetivo uma iniciação à demonstração em geometria) estavam presentes dois formadores que indicaremos por F1 e F2 e os professores que se manifestaram serão identificados por P1, P2 e P3.

Após uma breve retomada do que foi discutido na sessão anterior, F1 inicia a sessão registrando na lousa: “Todo ponto que pertence à mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades desse segmento”.

P1 diz que na oficina anterior provou-se que qualquer ponto P que equidista das extremidades de um segmento AB é a reta mediatriz m.

F1 corrige oralmente o que foi dito pelo professor enquanto F2 registra na lousa:

* Qualquer ponto P que equidista das extremidades de um segmento pertence à mediatriz desse segmento.

F2 pede para que um dos dois professores ausentes na sessão anterior repita o que havia sido discutido para conferir se o relato foi compreendido por eles.

P2 explica com a ajuda de F1, que escreve na lousa:

- Se P pertence à mediatriz m de um segmento AB, então P é equidistante de A e B.
- Se P é equidistante de A e B, então P pertence à mediatriz m do segmento AB.

F2 pergunta se as duas afirmações podem ser consideradas teoremas recíprocos e, como não obteve resposta, afirma que sim, uma vez que já foram demonstrados.

F2 indaga o que significa um teorema ser o recíproco de outro. Como os presentes ficam em dvida, F2 pergunta qual é a hipótese em cada caso.

P3 responde que no primeiro caso, a hipótese é $P \in m$ e que a tese é: a distância de P até A é igual à distância de P até B.

F2 registra a tese: PA = PB, mas F1 observa que a tese de P3 refere-se a distâncias.

F1 complementa o registro da tese: d(P,A) = d(P,B).

Sobre o segundo teorema, P1 diz que a hipótese é PA = PB e a tese $P \in m$.

P3 pergunta sobre a notação de medida e P1 pergunta qual é a diferença entre PA e $\overline{PA}$. F1 realiza as explicações necessárias.

F2 pergunta a P2 o que significam teoremas recíprocos.

P2 responde que a hipótese de um é a tese do outro e vice-versa.

P3 pergunta se teorema é o mesmo que propriedade. F1 responde que sim.

P3 pergunta o que são corolários. F2 responde que são consequências de teoremas e, completa ainda, que o lema prepara o teorema.

F1 complementa a explicação dizendo que lemas são pequenos teoremas e que, ao demonstrar um teorema, alguns resultados são imediatos. Estes constituem os corolários que também são teoremas e também são demonstráveis.

F2 escreve na lousa:

- Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.
- F2 pergunta a P2 sobre qual seria a proposição recíproca e ela responde:
- Se dois ângulos são congruentes, então são opostos pelo vértice.

F2 pergunta quais são as hipóteses e teses nos dois casos e registra na lousa as respostas fornecidas.

1º) Hipótese: $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice (o.p.v)

Tese: $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$

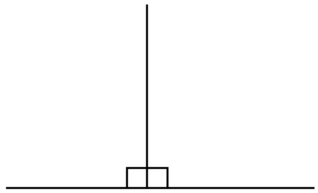
2º) Hipótese: $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$

Tese: $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são o.p.v.

F1 pede uma prova.

P1 responde com um contraexemplo no qual apresenta dois ângulos congruentes, mas que não são opostos pelo vértice (figura 1).

Figura 1



F1 pergunta se vale a volta do teorema, dizendo que a primeira afirmação é verdadeira, mas a volta não é um teorema.

F2 conclui que nem todo teorema tem recíproco.

P3 pergunta se é teorema somente quando tem a ida e a volta.

F1 responde que não.

F2 pergunta como ficaria a redação de um teorema e seu recíproco usando o símbolo $\Leftrightarrow$.

P1 diz: P pertence à mediatriz m de um segmento AB se, e somente se, P é equidistante de A e B.

P3 pergunta como se deve chamar este último teorema e se existiria um nome especial.

F2 responde que tanto os teoremas independentes como aqueles que têm ida e volta, são teoremas.

F1 pergunta como fica o registro na linguagem simbólica e escreve:

Seja m a mediatriz de $\overline{\mathrm{AB}}$, $\mathrm{P} \in \mathrm{m} \Leftrightarrow \overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

F2 apresenta outro registro:

$\mathrm{P} \in \mathrm{m} \Rightarrow \overline{\mathrm{PA}} \equiv \overline{\mathrm{PB}} \wedge \overline{\mathrm{PA}} \equiv \overline{\mathrm{PB}} \Rightarrow \mathrm{P} \in \mathrm{m}$

F2 comenta que, em sala de aula, como o professor enuncia “se, então”, o aluno entende como recíproco.

Nessa descrição ficou evidente a dificuldade que alguns professores têm em identificar, nas informações contidas no enunciado de uma proposição matemática, os dados que se referem às hipóteses e o fato que realmente se deseja comprovar. Dessa forma, também não conseguem perceber de imediato se a proposição possui condições necessárias e suficientes, o que caracteriza um teorema recíproco. Tal fato pode ser observado no diálogo entre os formadores e professores a respeito da proposição *“Todo ponto que pertence à mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades desse segmento”* que foi subdividida em duas outras usando-se a expressão “se, ... então”: *“Se P pertence à mediatriz m de um segmento AB, então P é equidistante de A e B.”* e *“Se P é equidistante de A e B, então P pertence à mediatriz m do segmento AB”*. Essa nova forma de redação deu visibilidade às condições necessária e suficiente da proposição em questão. No final dessas discussões, quando um dos formadores indaga o que vem a serem d remas recíprocos, um dos professores afirma, por meio de uma fala simples, porém com convicção: “*a hipótese de um é a tese do outro e vice-versa*”. Com relação à outra proposição *“se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes”*, a construção da proposição recíproca possibilitou que um professor elaborasse um contraexemplo. Esse contraexemplo registrado na lousa mostrando dois ângulos retos, isto é, congruentes e que não eram opostos pelo d idce, tornou evidente para o grupo que a proposição não era verdadeira. Sendo assim, a proposição em questão não poderia ser considerada como um teorema recíproco.

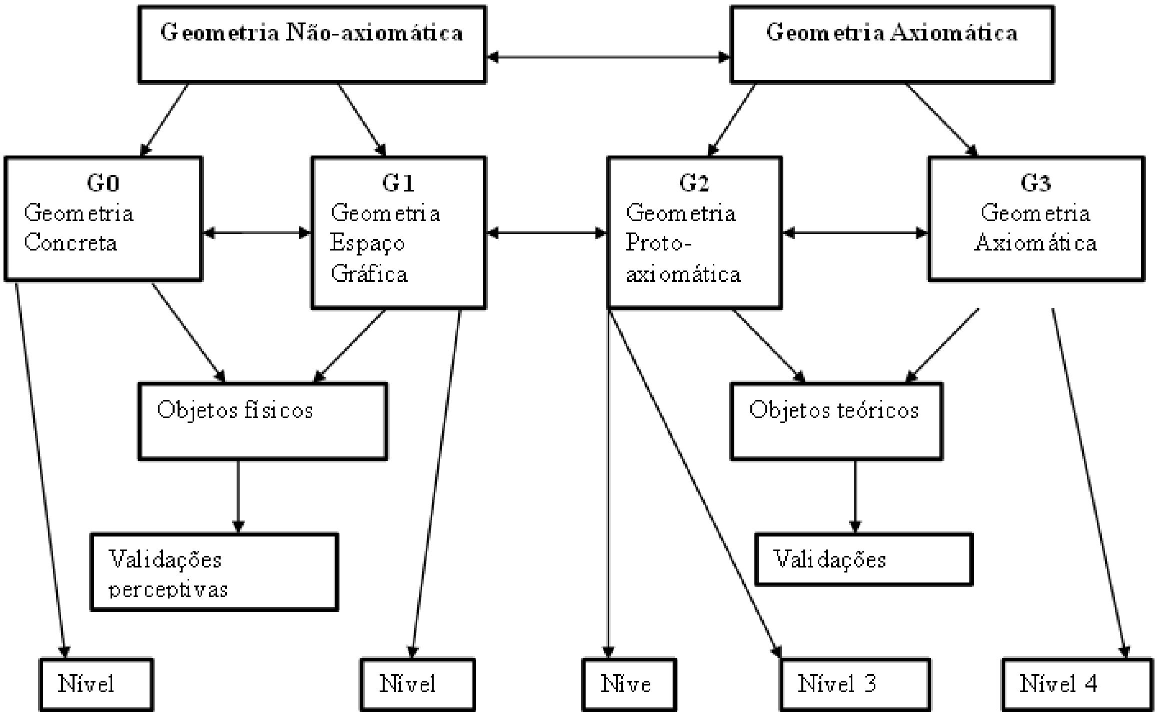
Retomando ao nosso estudo, ele vem reforçar o conjunto de dificuldades preliminares que esses professores possuem com relação aos elementos essenciais de uma demonstração, como o reconhecimento do conjunto de dados conhecidos (hipótese) e o que se pretende comprovar (tese). Nesse trecho da sessão que relatamos anteriormente, observamos que a proposição relativa à geometria foi enunciada sem a famosa expressão "se e somente se" que caracteriza os teoremas recíprocos: *"Qualquer ponto P que equidista das extremidades de um segmento pertence à mediatriz desse segmento"*. A fim de que essa propriedade fosse mais bem compreendida e, também, para que os professores pudessem ver que ela poderia ser enunciada de outra forma, um dos formadores pediu para que se registrassem na lousa as seguintes afirmações: *"Se P pertence à mediatriz m de um segmento AB, então P é equidistante de A e B. Se P é equidistante de A e B, então P pertence à mediatriz m do segmento AB"*. Esse novo registro permitiu que os professores reconhecessem expressões que lhes são mais familiares ("se ...,então") e os remetessem às ideias de condições necessárias e suficientes. Essa nova redação sugerida pelos formadores viabilizou uma discussão a respeito do que seriam teoremas recíprocos. Notamos que o grupo não se sentia seguro para afirmar que as sentenças anteriores compunham um teorema recíproco, o que levou, então, um dos formadores a questionar qual seria a hipótese em cada caso. Tal procedimento possibilitou uma melhor compreensão do enunciado, levando um dos formadores a questionar o que seria um teorema recíproco e um dos professores, agora já se sentindo mais seguro, responde de forma coloquial: *"a hipótese de um é a tese do outro e vice-versa"*. A discussão foi adiante, esclarecendo-se o que são lemas e corolários.

Dando continuidade à atividade, um dos formadores escreveu na lousa: "Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes". Em seguida, pergunta ao grupo qual seria a proposição recíproca e um dos professores com segurança afirma: "Se dois ângulos são congruentes, então são opostos pelo vértice". Depois disso, os professores identificam a hipótese e a tese de cada uma das proposições e um dos formadores as registra na lousa. O passo seguinte foi indagar quais seriam as respectivas provas. Um dos professores sugere a representação de dois ângulos retos, conforme registrado na nossa descrição em que eles são claramente congruentes, porém não são opostos pelo vértice. Com esse contraexemplo, um dos formadores esclarece que a primeira proposição é válida, mas que a segunda não é, o que ficou evidente com o desenho dos ângulos retos. Dessa forma, o grupo percebe que nem todo teorema possui recíproco, mas, mesmo assim, ainda surge uma dúvida: "teorema não é só quando tem ida e volta?" Um dos formadores afirma categoricamente que não e mais adiante completa que tanto teoremas independentes quanto aqueles que possuem ida e volta são teoremas. Para complementar essa discussão, um dos formadores indaga como ficaria a redação da proposição inicial ("Qualquer ponto P que equidista das extremidades de um segmento pertence à mediatriz desse segmento") utilizando o símbolo $\Leftrightarrow$ que é uma representação mais familiar para o grupo quando se trata de teoremas "com ida e volta". Além disso, apresentou mais duas opções de registros dessa mesma proposição utilizando apenas a linguagem simbólica envolvendo os símbolos $\in$, $\Leftrightarrow$, $\equiv$, $\Rightarrow$, $\wedge$ e $\overline{AB}$ para segmento de reta. Assim, discutimos teoremas recíprocos, teoremas independentes e seus possíveis registros a partir de resultados da área de geometria.

Julgamos oportuno resgatar outra pesquisa realizada com professores e que também é relacionada a dificuldades preliminares de demonstração, em que o grupo de pesquisadores d lisando alguns livros didáticos brasileiros, editados até os anos 2000, observou que a demonstração em matemática no Ensino Fundamental é introduzida no conteúdo relativo à geometria, que em geral encontra-se no final do livro. Os professores, por considerarem difícil a questão da demonstração, muitas vezes optam por não tratar desse assunto. Nos registros anteriores observamos, de forma nítida, como as dificuldades começam já na identificação da hipótese e da tese. Antes de se iniciar uma demonstração, é preciso ter clareza do que se possui como dados e o que queremos de fato comprovar, para então desenvolvermos uma demonstração que nos leve a comprovar a afirmação enunciada. Com relação a essas dificuldades iniciais relativas ao processo de realização de demonstrações, Almouloud (2006) discutiu as noções que alguns professores da rede pública do Estado de São Paulo possuem a respeito de teoremas e demonstrações que aparecem nos textos didáticos voltados para os ensinos fundamental e médio em pesquisa realizada junto a professores participantes de um projeto. Nessa pesquisa, os professores receberam alguns livros de matemática utilizados nas séries finais do ensino fundamental e realizaram uma atividade que consistia em identificar em um texto matemático uma demonstração, tarefa essa que exigiu várias discussões e embates sobre o que seria uma atividade envolvendo demonstração. Concluiu-se que os professores envolvidos nesse trabalho já tinham dificuldade para reconhecer uma demonstração em matemática. Essa dificuldade foi observada quando se pediu aos professores que fizessem uma busca aleatória nos livros didáticos por meio de uma visualização de formato de texto matemático. Em geral, eles detinham-se em textos com figuras como potes, balanças, no sentido de que uma explicação exemplificada com situações concretas deveria aproximar-se ou, efetivamente, ser uma demonstração. Para esses professores, a demonstração está ligada a uma contextualização, ou seja, as situações propostas devem ser atreladas ao contexto da criança para que o fato matemático se torne compreensível. Essa pesquisa ainda nos revelou a grande preocupação atual de se dar um sentido prático a tudo que se faz em matemática, transparecendo que só tem valor o que se pode aplicar de imediato numa situação cotidiana. O compreensível passa a ser apenas aquilo que pode ser usado no dia a dia. Esta concepção da matemática, mais especificamente da geometria, vem ao encontro da ideia de Bernard Parsysz(2000) que identificou diferentes tipos de geometrias, como mosre a figura 2.

Parsysz (2000), estudando os processos e mecanismos relacionados com o ensino e aprendizagem da geometria no Ensino Fundamental, propôs uma classificação que considera os objetos em jogo, físicos ou teóricos e os modos de validações, perceptivo ou dedutivo. Essa classificação é G_0-Geometria Concreta em que os estudos geométricos são realizados a partir de atividades concretas como maquetes, plantas e dobraduras. G_1-Geometria Espaço-gráfica em que ainda se confunde Geometria e realidade; em que os alunos podem conjecturar e fazer constatações de propriedades empiricamente. Este autor classifica ainda a Geometria Axiomática como Geometria Proto-Axiomática (G_2) e Geometria Axiomática (G_3). Em G_2, ocorre a concepção de um dquema da realidade em que as definições fazem sentido e os resultados passam a ser validados com técnicas dedutivas.

Figura 2: diferentes geometrias



Fonte: adequação feita por Alexsandra Camara Maciel (2004, p.73)

No nível G_2, a figura construída em G_1 tem *status* de figura genérica e a dedução é reconhecida como ferramenta de validação no interior de um sistema axiomático. Em G_3, não se faz referência à realidade e a Geometria é totalmente explicada (ou abstrata). Trabalhando em G_3, o aluno é capaz de situar-se nos diferentes sistemas axiomáticos, bem como compará-los.

Ainda segundo o autor, do ponto de vista didático, a distinção entre essas geometrias aparece nas *rupturas de contrato didático* que se produzem entre uma e outra, mais precisamente, na passagem de G_0 a G_1, em que a materialidade dos objetos em jogo (madeira, papel, palha, ...) tem um papel importante nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos; na passagem de G_1 a G_2, em que se d id na largura dos traços e dos pontos, e a justificativa das propriedades d id-se na percepção; finalmente, na passagem de G_2 a G_3 em que a validação das propriedades apoia-se na axiomática.

Parsysz (2000) considera que a articulação entre os níveis G_1 e G_2, isto é, a gestão do salto conceitual entre elas, são elementos essenciais na problemática do ensino da Geometria no Ensino Básico, em que devemos fixar os conceitos em jogo e fazer sua articulação.

A análise do desempenho dos professores nas atividades que propusemos mostra que esses docentes parecem estar ainda na Geometria Não-axiomática, o que nos alerta sobre a importância de integrar em uma formação continuada e inicial uma reflexão a respeito da limitação das validações empíricas e de questionar a evidência da figura.

Considerações finais

Nessa linha de dificuldades relacionadas às demonstrações estudadas no Ensino, Heinze (2008) realizou pesquisa referindo-se a experiências de ensino realizadas com alunos na faixa de 13 a 15 anos em Taiwan e na Alemanha. Julgamos que as dificuldades apontadas nesse trabalho realizado com jovens estudantes aproximam-se muito das dos professores envolvidos em nosso projeto, uma vez que eles possuem uma formação precária em matemática. Muitos desses professores estudaram ciências ou contabilidade e depois realizaram uma complementação em seus estudos que os habilitou a lecionar; na realidade, eles não cursaram uma licenciatura plena e específica em matemática. Essa complementação é um recurso aprovado pelos órgãos públicos a fim de regularizar a situação de inúmeras pessoas que já se encontravam trabalhando em salas de aula de escolas públicas, uma vez que existe escassez de licenciados em matemática que optam pelo ensino nessas escolas devido a baixa remuneração.

Nesse trabalho de Heinze (2008), os autores consideram que um dos motivos que levam os alunos a terem dificuldades com demonstrações é a complexidade da prova descrita como um conjunto de argumentos que o aluno deve combinar. Os autores discutem as diferenças entre demonstrações com um passo (*single step*) e com vários passos (*multi-step*) e resumem que construir uma demonstração aceitável em geometria é como um processo de ligação entre condições dadas e uma conclusão desejada com regras que interferem e são controladas por um processo de coordenação que inclui:

> Compreender a informação dada e o status dessa informação; Reconhecer os elementos cruciais (premissa, argumento, conclusão), que se associam com as propriedades necessárias para a dedução; Especialmente nas provas com vários passos, construir condições intermediárias para o próximo passo de dedução por uma ligação hipotética; e coordenar o processo todo e organizar o discurso numa seqüência aceitável (HEINZE, 2008, p.445, tradução nossa).

Em nosso trabalho, ao discutirmos teoremas recíprocos e independentes, evidenciamos a dificuldade que os professores tiveram em identificar as condições necessária e suficiente de uma proposição de geometria. O reconhecimento de elementos considerados cruciais é uma tarefa já selecionada por Heinze (2008) como parte integrante do processo de construção de uma demonstração aceitável. Os processos de coordenação relativos à compreensão do enunciado do teorema, elencados por Heinze, são, sem dúvida alguma, fundamentais no processo de redação de uma demonstração. Podemos inferir que a identificação de um teorema recíproco está mais ligada a expressões como “se e somente se” do que a uma análise crítica dos dados que são apresentados no enunciado da afirmação matemática. Muitas vezes, acreditamos que ocorre um tipo de “preguiça mental” em que se lê o enunciado da afirmação matemática já buscando as expressões “se ..., então” e “se e somente se”. Constatamos que a inexistência dessas expressões provoca um desequilíbrio na compreensão da proposição matemática, gerando dificuldades de identificação da hipótese e tese.

A metodologia utilizada pelos formadores para discutir um teorema recíproco em contraposição a um independente parece ter facilitado a compreensão dos professores que tiveram a oportunidade de simular a “volta” da proposição independente e verificar (a partir de um contraexemplo) que ela não era válida. A mudança de registro escrito para linguagem simbólica em que símbolos como “$\Leftrightarrow$” apareciam também parece ter reforçado o entendimento de teorema recíproco, além da oportunidade de constatarem que é possível transitar de um registro para outro mantendo o mesmo significado. A passagem de um registro de representação semiótica (DUVAL, 2005) deu aos professores meios de praticar e observar a variação de registros de representação e os tratamentos relacionados; além disso, o estudo sistemático da passagem de um registro para outro possibilitou a percepção da importância da forma das representações e a identificação das representações que são pertinentes.

As atividades realizadas parecem ter proporcionado aos professores em formação não só a análise dos dados contidos no enunciado de uma afirmação matemática, mas também o resgate de conteúdos de geometria como ângulos congruentes, ângulos opostos pelo vértice, mediatriz de um segmento e pontos equidistantes.

Concordamos com Rav (1999) que acredita que o simples fato de se planejar uma demonstração já pode contribuir para o desenvolvimento de compreensões matemáticas. No entanto, a nossa realidade de sala de aula do Ensino Básico em escolas públicas ainda está distante desse patamar de estudo de demonstrações. Com certeza, os conteúdos de geometria que fazem parte do programa curricular do Ensino Básico são os indicados para que se inicie o desenvolvimento do raciocínio dedutivo nas séries finais desse ciclo. Acreditamos que esse intercâmbio entre as universidades e professores, principalmente os da rede pública, por meio de uma formação continuada como essa desenvolvida em nosso projeto, é uma das opções para que o professor reveja sua prática docente, sinta-se mais confiante no exercício de sua profissão e, consequentemente, trabalhe com seus alunos em sala de aula inclusive demonstrações.

Notas

*Doutorado em Matemática e aplicações, especialidade: Didática da Matemática, pela Universidade de Rennes. Professor do Programa de Estudo Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. E-mail: saddoag@pucsp.br e saddoag@gmail.com

**Doutorado em Educação Matemática pela PUC-SP. Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. E-mail: zeze@pucsp.br

***Doutorado em Educação Currículo pela PUC-SP. Professora da PUC-SP. E-mail: cfusco@pucsp.br

Referências

ALMOULOUD, S. A.; FUSCO, C. A. **Discutindo algumas dificuldades de professores dos**

ensinos Fundamental e Médio a respeito do conceito de demonstração. *In*: Anais do III SIPEM – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Água de Lindóia, SP, 2006.

BALACHEFF, N. Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Grenoble : la Pensée Sauvage, **Recherches em Didactique des Matémathiques**, v. 3, n. 3, p. 261-304, 1982.

BALACHEFF, N. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. *In*: **Les Cahiers du Laboratoire Leibniz,** Grenoble, n. 109, 2004.

BALACHEFF, N. The role the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. In: ***ZDM Mathematics Education,*** Heidelberg: Springer Berlin, v. 40, n. 3, p. 501-512, 2008. Disponível em: < http://www.springerlink.com/content/wp741844wn683g88/>. Acesso em: 11 jun. 2008.

DUVAL, R. **Sémiosis e pensée humaine :** régistres sémiotiques et apprentissage intellectuel. Per Lang S.A., 1995.

FLORENTINI, D., LORENZATO, S. A.**Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 1. d. Campinas: Autores Associados,. V.1. 226 p, 2006.

FUSCO, C. A. da S., SILVA, M. J. F. da, ALMOULOUD, S. A. **O comportamento de professor esdo Ensino Básico frente a uma situação de demonstração em matemática.** IX Encontro Nacional de Educação Matemática. SBEM, Belo Horizonte, 2007.

HANNA, GILA; BARBEAU, Ed. Proofs as bearers of mathematical knowledge. ***ZDM Mathematics Education,*** Heidelberg: Springer Berlin, v. 40, n. 3, p. 345-453, 2008. Disponível em: < http://www.springerlink.com/content/l811525732721706/>. Acesso em: 25 fev. 2008

HEINZE, A. *et al*. Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: twaching experiments in Taiwan and Germany. *In*: ***ZDM Mathematics Education,*** Heidelberg: Springer Berlin, v. 40, n. 3, p. 443-453, 2008. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/4776x71346723546/>. Acesso em: 11 abr. 2008.

MACIEL, A. C. **O conceito de semelhança**: uma proposta de ensino. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUC/SP, 2004.

MARIOTTI, M. A.; BALACHEFF, N. Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *In*: ***ZDM Mathematics Education,*** Heidelberg: Springer Berlin, v. 40, n. 3, p. 341-453, 2008. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/u7301545611404vg/>. Acesso em: 22 jun. 2008.

RAV, Y. Why Do We Prove Theorems? *In*: **Philosophia Mathematica,** Oxford, v.7, n.3, p. 5-41, 1999.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação.** 8. Ed. São Paulo: Cortez, 1998.

Recebido em Julho de 2012
Aprovado em Setembro de 2012