revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

A CONTRIBUIÇÃO DAS FUNÇÕES DISCURSIVAS NA ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS ESTUDANTES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.26.338-360

Eduardo Sabel[1]
Méricles Thadeu Moretti[2]

Resumo: A linguagem desempenha um papel fundamental no desenvolvimento social por sua função comunicativa. Quando pensamos na matemática, ela admite outros empregos necessários para a ampliação dos discursos, como as funções e operações discursivas. Duval (2004) as apresenta como inerentes ao processo de ensino e aprendizagem em matemática, uma vez que cumprem uma função cognitiva e agem como um registro de representação semiótica para o desenvolvimento do pensamento. Neste artigo, apresentamos uma pesquisa realizada com estudantes do Ensino Médio que foram colocados para resolver alguns problemas matemáticos, com o intuito de produzir discursos que pudessem ser analisados à luz das funções discursivas. Amparado por elementos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1986) e pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica, esse estudo constatou as contribuições que as funções discursivas possibilitam como instrumento de análise da produção dos estudantes. Dentre os resultados, considera-se que o papel que desempenham é fundamental para se observar as diferentes aprendizagens dos objetos matemáticos contidos nos problemas e algumas incompreensões acerca dos conteúdos. A função de designação de objetos se destacou, assim como as funções relacionadas à construção de frase e ampliação do discurso.
Palavras-chave: Funções discursivas. Aprendizagem matemática. Registro de Representação Semiótica. Resolução de Problemas.

THE CONTRIBUTION OF DISCURSIVE FUNCTIONS IN THE ANALYSIS OF STUDENTS' PRODUCTION IN PROBLEM SOLVING

Abstract: Language plays a fundamental role in social development because of its communicative function. When we think of mathematics, it admits other uses necessary for the expansion of discourses, such as discourse functions and operations. Duval (2004) presents them as inherent to the teaching and learning process in mathematics, since they fulfill a cognitive function and act as a semiotic representation register for the development of thought. In this article, we present research conducted with high school students who were put to solve some mathematical problems, in order to produce discourses that could be analyzed in the light of discourse functions. Supported by elements of Didactic Engineering (ARTIGUE, 1986) and by the Theory of Semiotic Representation Registers, this study verified the contributions that discourse functions make possible as a tool for analyzing the students' production. Among the results, it is considered that the role they play is fundamental to observe the different learning of mathematical objects contained in the problems and some misunderstandings about the contents. The function of object designation stood out, as well as the functions related to sentence construction and discourse expansion.
Keywords: Discursive functions. Mathematical learning. Semiotic Representation Theory. Problem Solving.

[1] Doutorando em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT/UFSC). Atua como Especialista de Ensino em matemática no Centro de Educação Digital do SENAI/SC. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6334-4893 - E-mail: eduardosabelmatematica@gmail.com
[2] Doutor em Didática da Matemática pela Universidade Louis Pasteur. Professor permanente do PPGECT/UFSC. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3710-9873 - E-mail: mthmoretti@gmail.com

1 Introdução

A linguagem tem o papel de permitir com que haja a comunicação dos conhecimentos e a socialização entre os povos, mas, na matemática, além disso, ela também atua como uma forma de representação dos objetos. Tendo em vista que a matemática possui uma linguagem interna, não é de se estranhar o interesse de pesquisadores em compreender mais acerca de seu papel no ensino dessa ciência. Essa linguagem se refere às formas discursivas que a matemática admite, como as letras na linguagem algébrica, os gráficos, as figuras, os números, os códigos, etc.

Autores como Vergani (2002), por exemplo, defendem que é preciso estudar a linguagem da matemática, que foi sendo construída e ampliada, ao mesmo tempo que evolui. Granger (1974) fala que, no caso da matemática, a linguagem é uma parte fundamental para compreendê-la e que seu desenvolvimento demandou a criação de novos recursos discursivos específicos. Nacarato (2013) explica que a escrita nas aulas de matemática pode potencializar a aprendizagem se abordada de forma correta, assim como Powell e Bairral (2006) argumentam que escrever ajuda na cognição matemática, uma vez que irá estimular um processo metacognitivo no estudante.

Ao falar de ensino de matemática, percebemos a importância da linguagem e dos processos de escrita nesse contexto. Nessa direção, temos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, que defende a importância de certas funções e operações discursivas para a aprendizagem matemática. Duval (2004) apresenta três funções discursivas que a linguagem precisa cumprir, a saber: a função referencial de designação de objeto, a função apofântica e a função de expansão discursiva. Cada uma delas se desdobrada em certas operações que, no conjunto, contribuem para a construção de um discurso.

Duval (2004, p. 87) define um discurso como “o emprego de uma língua para dizer alguma coisa, para falar dos objetos físicos, imaginários e ideais e [que] está conectada a um funcionamento cognitivo”. No caso da matemática, os objetos a serem trabalhados e evocados por meio da escrita necessitam do uso de tais funções, que são fundamentais para a própria compreensão do objeto.

No sentido de estudar com mais profundidade as funções discursivas e compreender como aparecem em sala de aula e são utilizadas pelos estudantes, partimos da seguinte pergunta norteadora: Quais as contribuições das funções discursivas na aprendizagem matemática, especialmente na resolução de problemas? O objetivo é investigar seu papel na produção dos estudantes para resolver problemas e como auxiliam na análise da aprendizagem. Referimo-nos à resolução de problemas como um meio de produção de discursos pelos estudantes e não à metodologia de ensino baseada na resolução de problemas apresentada, por exemplo, por Polya (2006), Unochic e Allevato (2004), cuja abordagem foge de nosso escopo.

Para tanto, optamos por aplicar alguns problemas matemáticos a estudantes do Ensino Médio, pois a resolução de um problema exige uma produção escrita, neste caso, o material analítico propriamente. As etapas metodológicas foram guiadas pela Engenharia Didática (ARTIGUE, 1986), enquanto que a fundamentação teórica se baseou na teoria de Duval (2004), com foco nas funções discursivas.

Este artigo é resultado de uma dissertação de mestrado em que apresentamos uma síntese dos processos realizados. Pretendemos, assim, contribuir para o campo da educação matemática, ao buscar esclarecer o papel das funções discursivas e oferecer novos recursos teóricos que podem ser utilizados pelos docentes para analisar a produção escrita de seus estudantes.

2. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica: as funções discursivas

Desenvolvida por Raymond Duval, esta teoria entende que a matemática possui objetos que se alicerçam em conhecimentos diferentes das demais ciências, os quais podem ser acessados pelo mundo físico. Isso porque, na matemática, ao lidarmos com objetos ideais e abstratos, precisamos utilizar sistemas semióticos que representem esses objetos e possibilitem seu estudo. Por isso, esta teoria pode ser considerada semio-cognitiva, pois coloca sobre o semiótico um papel fundamental para o funcionamento do pensamento matemático.

Dentre os vários conceitos da teoria dos registros de representação semiótica, apresentamos aqui as chamadas funções discursivas. Para Duval (2004), existem dois tipos de função que a linguagem pode cumprir: as discursivas e as metadiscursivas. Em geral, as metadiscursivas são mais utilizadas no cotidiano, embora, no caso da matemática, sejam necessárias as discursivas.

2.1 As funções metadiscursivas

Presentes em muitos sistemas semióticos, as metadiscursivas são definidas como “as funções cognitivas comuns a todos os registros de representação (linguísticos, simbólicos, figurativos...)” (DUVAL, 2004, p. 87). Existem três funções nesse sentido: a comunicação, o tratamento e a objetivação.

Comunicação: função comum e essencial que todo sistema deve cumprir, cujo objetivo é realizar a comunicação e a transmissão de informações. A socialização entre os sujeitos advém da função de comunicação que pode acontecer por meio de uma conversa ou fala, por exemplo.

Tratamento: função que altera a informação para extrair novas inferências ou mudar a maneira daquilo que foi dito. Às vezes, é preciso refazer uma frase para se dizer a mesma coisa com outros termos. Um exemplo disso ocorre quando o professor explica um conceito de um outro modo para o estudante entendê-lo. Essa função é importante, pois permite uma variedade de formas para se apresentar um conteúdo.

Objetivação: função que indica a internalização do objeto pelo sujeito, quando ele percebe, de fato, que entendeu. Pode ser definida como "a externalização ou conscientização que não se tinha antes" (DUVAL, 2004, p. 88). Geralmente ocorre por alguma manifestação oral ou gestual, momento em que sujeito toma consciência que aprendeu.

2.2 As funções discursivas

Embora as funções metadiscursivas sejam importantes para a comunicação e necessárias no cotidiano, são as discursivas que permitem a escrita de um discurso (DUVAL, 2004). Essas funções apresentam algumas classificações e operações específicas que agem dentro de um discurso, como: a função referencial (designação de objetos), a apofântica (dizer algo sobre os objetos por meio de frases) e a expansão discursiva (dar continuidade ao discurso).

Função Referencial: busca promover a designação dos objetos, ou seja, atribuir signos (letras, palavras, símbolos) para indicar e representá-los matematicamente. Duval (2004, p. 88) indica as operações que fazem parte dessa função: a designação pura, a categorização simples, a determinação e a descrição.

A <u>designação pura</u> acontece na indicação de um signo para representar um objeto específico, como utilizar a letra *x* para designar a variável de um sistema linear, enquanto a <u>categorização simples</u> serve para atribuir uma característica ou qualidade a um objeto, como é o caso da matriz *quadrada*, por exemplo, um termo específico do contexto da matriz que nos revela uma característica.

Já a <u>determinação</u> consiste um usar os artigos definidos ou indefinidos (o/a, um/uma) para indicar a existência e a unidade de um objeto, ao passo que a operação de <u>descrição</u> combina todas as demais, sobretudo quando precisamos descrever um objeto matemático que ainda não tem um nome específico ou então explicá-lo de outra maneira. Duval (2004, p. 95) sublinha esse aspecto quando afirma que "nenhuma língua, mesmo a natural, pode ter um nome para cada objeto ou classe de objetos. Portanto, é por meio da operação de descrição que se pode nomear qualquer objeto, apesar da limitação lexical".

Função Apofântica: Duval explica que "somente designar objetos não cria uma língua, é preciso poder dizer qualquer coisa sobre os objetos sob a forma de uma proposição, ou seja, cumprir a Função Apofântica" (2004, p. 104), que permite a criação de frases, expressões e enunciados que abordam os objetos de forma coesa e coerente. Além disso, possibilita também a identificação do valor lógico (verdade ou falso), do valor epistêmico (se respeita as regras internas dos sistemas semióticos) e do valor social (o motivo da criação de uma frase).

Um exemplo disso seria quando um estudante diz que o "triângulo ABC é um retângulo, pois possui um ângulo reto", pois está se referindo a algo relacionado a um determinado triângulo designado como ABC por meio de uma frase. Essa expressão pode ser validada como verdadeira (valor lógico), caso o retângulo em questão seja de fato um retângulo, assim como é coerente, pois respeita as regras da matemática, uma vez que um ângulo reto implica no triângulo ser retângulo (valor epistêmico). O motivo da criação da frase dependerá do contexto (valor social), embora, geralmente, busque atender a uma pergunta ou problema proposto pelo professor. A função apofântica pode ocorrer por meio de duas operações: a predicação e o ato ilocutório.

A predicação fala dos objetos por meio de proposições escritas e enunciados completos, como no exemplo do triângulo retângulo. Já o ato ilocutório acontece quando o estudante se comunica com o professor por meio de frases orais, como argumentar que não conseguiu resolver um problema ou que não entendeu um conceito, por exemplo.

Função de Expansão discursiva: permite "articular diversos enunciados completos na unidade coerente de uma narração, de uma descrição, de uma explicação ou de um raciocínio" (DUVAL, 2004, p. 94). Possibilita relacionar, articular e conectar frases de forma coerente, permitindo a progressão do discurso e a produção de novas inferências e informações acerca do que está sendo dito (DIONIZIO; BRANDT; MORETTI, 2014). As operações discursivas são a substituição e a acumulação.

Na operação de substituição é quando ocorre a alteração das informações anteriores por outras, no intuito de modificar a expressão e apresentar um novo resultado. Aqui "as inferências possibilitadas a partir da progressão das proposições podem ser realizadas pela substituição do resultado das novas inferências sobre as que foram feitas nas proposições anteriores" (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014, p. 483). É importante também que as regras internas dos sistemas semióticos sejam respeitadas para que tais substituições ocorram de forma coerente e mantenham um valor epistêmico.

Já na operação de acumulação, a continuidade do discurso se dá por meio da construção de novas frases unidas por conectores e enriquecidas por novos elementos. Pode ocorrer por meio de uma narração, descrição ou explicação. Em geral, utiliza-se da língua natural como meio de expansão e criação de novos enunciados para o discurso. A expansão do discurso pode ser separada em algumas formas, apresentadas no quadro a seguir:

Quadro 1: As formas da expansão discursiva

Tipo de expansão	Características
Formal	Conduzida por sistemas semióticos formais e algoritimizáveis, como a linguagem algébrica, pontos no plano cartesiano ou símbolos próprios da matemática.
Natural	Conduzida pela língua materna, caracterizada pela união e expansão de frases e enunciados. Permite maior liberdade na construção, pois a língua materna é tratada com maior facilidade que as formais.
Cognitiva	Acontece no momento em que usamos a língua com um caráter especializado.
Lexical	Recupera léxicos anteriores e o retoma para dar continuidade ao discurso.

Fonte: dos autores, baseados em Duval (2004, p. 91-98).

As diferentes formas de expansão discursiva permitem diferentes caminhos de fazer progredir um discurso e muitas delas podem ocorrer ao mesmo tempo, embora sejam apresentadas separadamente. Um exemplo da expansão formal é pensarmos na evolução da expressão $(x+2)^2$, que pode ser transformada em $(x+2)(x+2)$ de forma a chegar em $x^2 + 4x + 4$. Aqui o discurso se expande por meio da operação de substituição na linguagem algébrica, caracterizando uma expansão do tipo formal.

Um exemplo que trata da expansão natural e cognitiva seria: *sendo g a geratriz do cone e h sua altura, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para calcular seu raio e ter condições de calcular a área da base.* Nesses exemplos, o discurso é conduzido essencialmente pela língua natural e expandido pela operação de acumulação, pois há frases que são interligadas no sentido de fazer progredir o discurso de forma coesa. Primeiro, se designaram as letras para a altura e a geratriz, depois, se argumentou que era possível usar Pitágoras e, por fim, que poderia ser calculada a área da base. Todas essas expressões foram acumuladas para dar continuidade ao discurso e expressar uma explicação por meio da expansão natural.

A expansão discursiva cognitiva também consta no exemplo anterior em que as letras g e h foram designadas no meio das frases para indicar os elementos geométricos em questão. As letras em si não significam nada fora desse contexto, mas no exemplo seu significado é expandido, sendo utilizadas de forma especializada. Já a expansão lexical acontece quando um discurso retoma uma letra, palavra ou signo que fora usado antes para compor novos enunciados. Isso é comum na matemática, pois muitas vezes começamos um problema usando a letra x para designar um elemento, sendo que ao final usamos a mesma letra x para ser uma incógnita diferente em uma equação, por exemplo.

Duval (2004) justifica que, embora sejam estudadas separadamente, todas as funções podem atuar em conjunto, pois um discurso dificilmente poderá ser construído somente com o uso de uma das funções ou operações discursivas. O conhecimento desses instrumentos oferece aos professores uma nova perspectiva de analisar a produção escrita dos estudantes e, consequentemente, a aprendizagem matemática.

Os trabalhos que fizeram uso dessas funções discursivas já indicaram seu potencial para a educação matemática. Um exemplo é o caso de Dionízio (2013), que realizou uma pesquisa para caracterizar o conhecimento de trigonometria por professores de matemática da educação básica, tendo em vista que usou, em uma das etapas de sua análise, as funções discursivas. Estas foram empregadas no momento em que o conhecimento desses docentes foi caracterizado mediante três tipos: o pedagógico, o do conteúdo da matéria ensinada e o curricular. A autora revelou as formas de expansão discursiva que cada um deles mais utilizava para desenvolver seus discursos, destacando-se a expansão formal e cognitiva.

Em Duval *et al.* (2015), há outra produção que destaca as operações e funções discursivas e evidencia a importância da função referencial de designação de objetos para representar as relações algébricas entre números e letras, oferecendo, assim, novas ideias sobre o tema, em particular, no campo algébrico. Conforme as discussões apresentadas, é possível pensar no seguinte exemplo proposto acerca de um problema que aborda um retângulo que possui perímetro de 920m, sendo seu comprimento 20m maior que a medida da largura (DUVAL *et al*., 2015, p. 29). Os autores explicam que a maioria dos estudantes erra essa resolução, pois consegue estabelecer 920 = 2C + 2L, mas não designar C = L + 20, que representaria um processo de dupla designação.

Apesar da existência de algumas pesquisas, devidamente exemplificadas, ainda são poucas as que se debruçam em estudar e utilizar tais funções discursivas. Essa carência é apontada por Pontes, Brandt e Nunes (2017), que analisaram 65 trabalhos sobre Duval produzidos entre 2010 e 2015, indicando que somente 7 deles abordaram as funções discursivas. Os autores consideraram que “as funções discursivas têm um potencial teórico significativo para embasar pesquisas que abordam os processos de ensino e aprendizagem de matemática” (PONTES; BRANDT; NUNES, 2017, p. 309). Por isso, faremos uso dessa parte da teoria de Duval como referencial teórico condutor das análises a seguir.

3. O percurso metodológico da pesquisa

Como referencial metodológico, buscamos alguns elementos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) que oferecem uma estratégia de investigação estruturada em fases bem delimitadas, no intuito de facilitar a organização da pesquisa. Esta metodologia foi inicialmente pensada para a educação matemática, sendo um modelo para estruturarmos uma pesquisa que conta com alguma etapa prática em sala de aula. Nesta seção, apresentaremos também os problemas que foram aplicados com os estudantes e discutiremos nossas expectativas, além dos conteúdos matemáticos que cada um deles continha.

3.1 Os elementos da Engenharia Didática

Como a Engenharia Didática dispõe de procedimentos específicos para cada uma de suas fases, iremos apresentá-las e comentar como contribuíram para este estudo. São elas: a análise prévia, a análise *a priori*, a experimentação e a análise a *posteriori* e validação. Faremos uso de alguns elementos dessa metodologia, já que alguns deles foram empregados de forma mais pontual ou pouco considerados nas discussões.

A primeira fase refere-se à análise prévia, que consiste em delimitar e introduzir o quadro teórico que a pesquisa se apoiará, incluindo o estabelecimento das problemáticas iniciais. Em nosso caso, utilizamos os estudos prévios da teoria de Duval e suas funções discursivas, e também, a delimitação da resolução de problemas. Segundo Artigue (1996, p. 198), há três dimensões na análise prévia: a epistemológica, a cognitiva e a didática.

Na dimensão epistemológica, o foco se concentra no conhecimento a ser estudado; em nosso caso, as funções e operações discursivas previamente estudadas. A dimensão cognitiva olha para o público-alvo, que nesta pesquisa é representado pelos estudantes do Ensino Médio que aceitaram participar dela, momento em que buscamos identificar quais conhecimentos matemáticos eles já detinham para resolver um problema. Por fim, há a dimensão didática que avalia o sistema de ensino, que, neste trabalho, se restringiu ao desafio das pesquisas na pandemia e como aconteceria o contato com os estudantes.

A análise *a priori* trata-se da segunda fase, cujo foco é definir todas as variáveis envolvidas na pesquisa e também prever possíveis resultados. Segundo Artigue (1996, p. 205), esta fase busca “determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos”. Essas previsões de resultados e comportamentos poderão ser confrontadas nas etapas seguintes a fim de verificar se a pesquisa seguiu no caminho esperado.

Em nosso caso, a análise *a priori* ocorreu no momento da escolha dos problemas aplicados com os estudantes e nas expectativas que tínhamos em relação a cada um deles no que se refere às funções discursivas. Essas análises foram fundamentais, pois facilitaram averiguar a produção dos estudantes, especialmente porque já havia elementos importantes a serem observados. Ainda assim, é preciso ter consciência que algumas situações podem extrapolar as previsões, o que não é algo negativo, uma vez que isso aponta para novas perspectivas a serem consideradas.

A experimentação, a terceira fase, é o momento em que o pesquisador intervém em sala de aula, aplicando ou desenvolvendo alguma atividade prática. Segundo Machado, nesse momento acontece:

> [...] a explicitação dos objetos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação; o estabelecimento do contrato didático; a aplicação dos instrumentos de pesquisa; o registro das observações feitas durante a experimentação (MACHADO, 1999, p. 206).

Nesta pesquisa, a experimentação ocorreu de forma não presencial devido à pandemia de Covid-19, que implicou no ensino remoto. O meio utilizado para interagir com os estudantes foi a plataforma Google Sala de Aula, desenvolvida para ser um ambiente que possibilite o trabalho pedagógico. Como ela permite a troca de materiais entre o professor e o estudante, utilizamos arquivos em PDF para enviar as questões aos estudantes, que devolviam suas produções por meio de fotos das resoluções feitas no caderno.

Contamos com a participação de duas turmas distintas do Ensino Médio, com 25 estudantes cada, intituladas Turma A e Turma B. Cada uma delas recebeu problemas diferentes para resolver e enviar as resoluções, que conformariam nosso material analítico. Neste artigo, faremos um recorte da experiência e apresentaremos três problemas aplicados com as turmas, dois na turma B e um na turma A. Os estudantes são identificados como A1, A2, A3, B1, B2 e assim por diante.

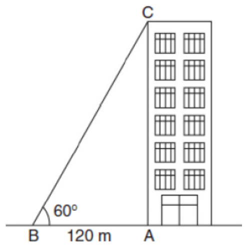
A análise *a posteriori* e validação é a última fase da Engenharia Didática, momento em que todo o material obtido na experimentação é analisado, sendo "no confronto das duas análises, *a priori* e *a posteriori*, que se funda essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação" (ARTIGUE, 1996, p. 208). Nesta pesquisa, não iremos empregar o termo de validação, pois apenas consideramos a análise *a posteriori* como a etapa final para obter os resultados. Como aplicamos uma sequência didática ou situações para avaliar o processo de ensino da matemática, não pretendemos adentrar no conceito de validação.

A etapa final ocorreu durante a análise das produções individuais dos estudantes em cada um dos problemas, por isso, consideramos este o ponto mais importante para suscitar as reflexões que buscamos sobre as funções discursivas. A seguir, apresentaremos brevemente cada um dos três problemas e descreveremos de que forma acreditávamos que as funções e operações seriam utilizadas.

3.2 Os problemas aplicados

Quadro 2: Problema 1 aplicado na Turma A.

A figura a seguir mostra um prédio, onde temos 3 pontos destacados. Bruno encontra-se no ponto B da figura, enquanto Carla está no ponto C, e o térreo do prédio é o ponto A. Observando a figura, responda:



a) Que tipo de triângulo é formado pelos pontos ABC?

b) Qual a distância entre Bruno e Carla?

c) Qual a altura do prédio?

Fonte: Sabel (2021, p. 39).

Este problema foi aplicado na Turma A, envolvendo conceitos de trigonometria no triângulo retângulo, em particular, as relações de seno, cosseno e tangente. O enunciado apresenta dois registros de representação semióticos, um deles, a língua natural que conduz o texto, e o outro, o registro geométrico recorrendo à figura que complementa o problema.

No item (a) da questão, os estudantes precisavam utilizar a categorização para designar uma qualidade do triângulo, podendo fazer isso dentro de uma frase completa, desde que recorressem à função apofântica. Já na letra (b), seria preciso iniciar com alguma designação para o lado BC da figura, que depois seria aplicado em uma relação trigonométrica. A expansão formal, por meio da operação de substituição, seria empregada para o desenvolvimento algébrico, necessário para a continuidade do discurso até o valor final. Os mesmos procedimentos são esperados na letra (c). A função apofântica permitirá atribuir os valores lógico (se a conta for correta), epistêmico (se as regras da trigonometria forem respeitadas) e social (atender ao professor). Tais expectativas se aproximam da análise teórico sobre as funções discursiva proposta por Sabel e Moretti (2022), que apresentamos momentos das aulas de matemática que tais funções são mobilizadas, em destaque, para resolver problemas.

Quadro 3: Problema 2 aplicado na Turma B.

A seguir temos duas situações que envolvem proporções. Leia e responda:
a) Se um homem, em 10 horas de trabalho, consegue erguer 8 metros de um muro, quantos metros, do mesmo tipo de muro, 5 homens, trabalhando do mesmo jeito do que os primeiros, irão construir em 10 horas de trabalho?
b) Se um homem, em 10 horas de trabalho, consegue erguer 8 metros de um muro, quanto tempo vão levar 5 homens, trabalhando do mesmo jeito do que os primeiros, para construir o mesmo muro de 8 metros?
c) Comparando os dois problemas, qual a principal diferença entre ambos?

Fonte: Sabel (2021, p. 42).

O problema 2, aplicado na Turma B, envolve conceitos de proporcionalidade entre grandezas. A questão é composta por três itens, sendo que os dois primeiros tratam de situações que envolvem regra de três, e o outro, as grandezas, que são todas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. O último item solicita que os estudantes comparem as duas situações, para verificar se compreenderam a diferença de proporção entre ambas.

Neste problema, esperávamos que os estudantes revelassem suas aprendizagens sobre a razão e a proporção, sobretudo pela língua natural. Primeiramente, precisariam designar uma letra para indicar a incógnita do problema, depois organizar corretamente as proporções e resolver a regra de três elaborada por meio de uma expansão formal. Mas somente com os discursos criados para comparar os problemas e explicar seus passos poderemos ter certeza se houve compreensão dos conceitos ou se isso foi meramente uma ação operacional baseada em outros exemplos.

A função de expansão discursiva deve ser destaque no item (c), através do uso da operação de acumulação e da forma natural de progressão do discurso. Esperamos evidenciar o que já é defendido por Duval (2011), que considera importante estimular e valorizar a linguagem natural (materna) dos sujeitos, visto que ela atua também como um registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento.

Quadro 4: Problema 3 aplicado na Turma B.

Juliana foi à feira para comprar frutas. Ela comprou 2 quilos de laranja e 4 quilos de maçã, pagando R\$ 28,00 reais. Sabendo que os preços dessas frutas somam R\$ 8,00 responda: a) Quanto custa o quilo de cada fruta? b) Se Juliana comprar 3 quilos de cada fruta, uma nota de 50 reais seria suficiente para pagar a conta? Explique sua resposta.

Fonte: Sabel (2021, p. 43).

O problema 3, aplicado também na Turma B, trata sobre sistemas de equação lineares com duas incógnitas. O enunciado contém informações que possibilitam a construção de um sistema linear 2x2, sendo que para isso algumas funções e operações discursivas precisam ser evocadas. E a que se espera para esse tipo de problema é a função referencial, que designa objetos.

O primeiro passo será a designação pura dos léxicos (letras) para representar as duas incógnitas do problema: o preço do quilo da laranja e da maçã. Depois, a etapa de construção das duas equações que irão formar o sistema linear, sendo esta parte uma conversão direta do enunciado em língua natural para o registro algébrico. Dentro do campo algébrico, existem alguns desdobramentos da designação de objetos que têm o papel de exercer um domínio sobre a linguagem algébrica (BRANDT; MORETTI, 2018).

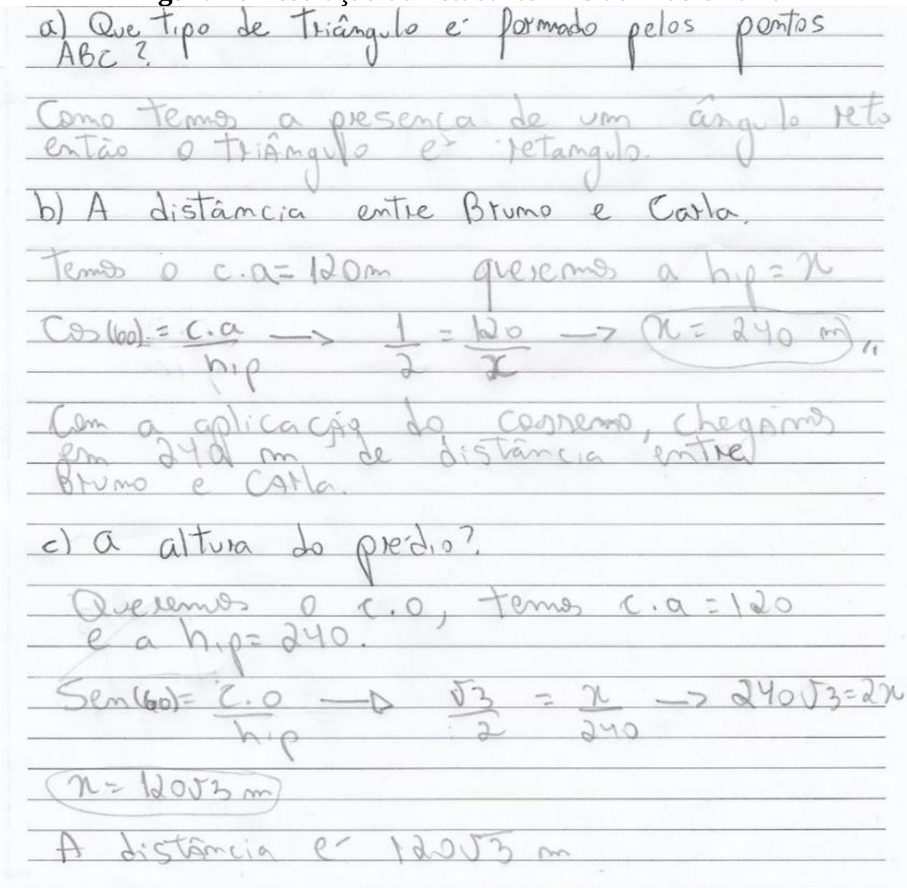
Quando temos, por exemplo, uma designação inicial de $x + y = 8$, e depois a reorganizamos em $x = 8 - y$, estamos efetuando uma redesignação funcional, essencial nos problemas de álgebra em que necessitamos colocar uma incógnita em função da outra. Esperava-se que esse tipo de designação tivesse destaque para que o problema continuasse a ser resolvido pela expansão formal, e ainda, a criação de frases para fazer alguma justificativa evocando a função apofântica em sua operação de predicação. Assim como nos problemas anteriores, os valores lógico, epistêmico e social devem ser igualmente apontados.

Com base nessas análises *a priori* de cada problema, temos elementos para iniciar a análise da produção dos estudantes e verificar como estão utilizando as funções e operações discursivas. Apresentaremos algumas das resoluções obtidas na aplicação dos problemas, escolhendo aquelas que contêm os recursos discursivos mais utilizados pelos estudantes e que representam as principais análises feitas na experiência. Como este estudo tem foco qualitativo, não vamos nos preocupar com as porcentagens ou a quantidade de produções analisadas, mas sim, valorizar a discussão dos dados produzidos à luz de nosso referencial teórico.

4. Análise e discussão dos problemas

A seguir, apresentamos algumas figuras com a resolução dos estudantes, e que representam o desempenho geral da experiência. Na Figura 1, temos a produção do estudante A23 ao resolver o Problema 1:

Figura 1: Resolução do Estudante A23 ao Problema 1.



a) Que tipo de Triângulo é formado pelos pontos ABC ?

Como temos a presença de um ângulo reto então o Triângulo é retangulo.

b) A distância entre Bruno e Carla.

Temos o c.a = 120m queremos a hip = x

$\cos(60) = \frac{c.a}{hip} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{120}{x} \rightarrow (x = 240\ m)$

Com a aplicação do cosseno, chegamos em 240 m de distância entre Bruno e Carla.

c) a altura do prédio?

Queremos o c.o, temos c.a = 120 e a hip = 240.

$\text{Sen}(60) = \frac{c.o}{hip} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{240} \rightarrow 240\sqrt{3} = 2x$

$(x = 120\sqrt{3}\ m)$

A distância é $120\sqrt{3}$ m

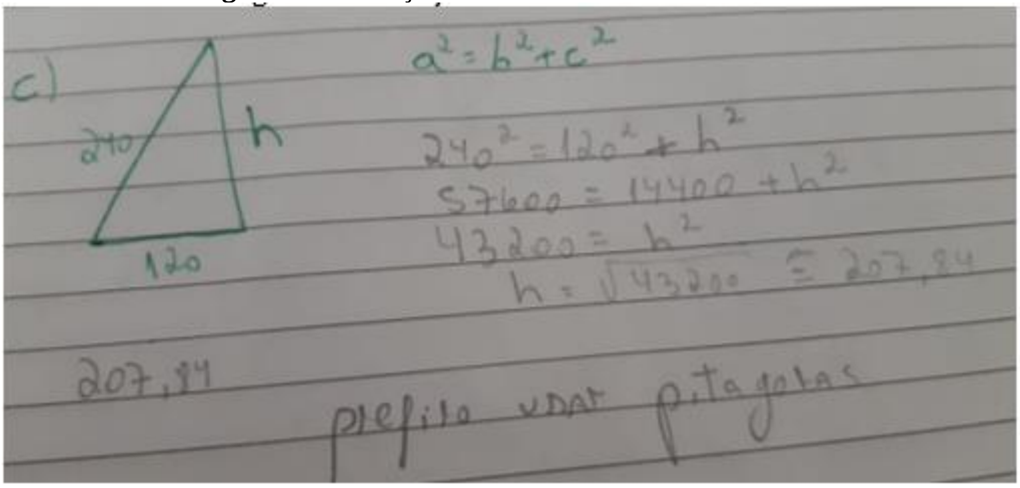
Fonte: Sabel (2021, p. 54).

O Estudante A23 teve êxito no item (a) e a construção de sua resposta exigiu a função apofântica com sua operação de predicação (criar frases). Usou também a função referencial com a designação de objetos do tipo categorização, ao atribuir ao triângulo referido a característica retângulo. Seu discurso evidencia que ele compreendeu que a um triângulo retângulo contém a presença de um ângulo reto.

No item (b), o estudante usou um raciocínio que foi utilizado pela maioria, iniciando seu discurso ao designar as relações trigonométricas com léxicos associativos (letras empregadas para representar variáveis). A partir disso, o discurso progride com a expansão formal, por meio de substituições algébricas. Vemos que o estudante recorre também à expansão natural como meio de complemento de sua resolução, explicando ao professor o resultado obtido.

No item (c) ocorre um procedimento muito semelhante, exceto que aqui ele usa o seno ao invés da tangente, revelando também o domínio das diferentes relações trigonométricas. E a expansão cognitiva também se fez presente quando ele expressou o seno como a razão do cateto oposto com a hipotenusa e o mesmo na tangente, recorrendo à língua com um caractere especializado. Toda sua resolução possui valor lógico de verdade (respostas corretas), valor epistêmico (seguiu as regras internas da matemática) e valor social (atendendo ao professor).

Figura 2: Resolução do Estudante A2 ao Problema 1.

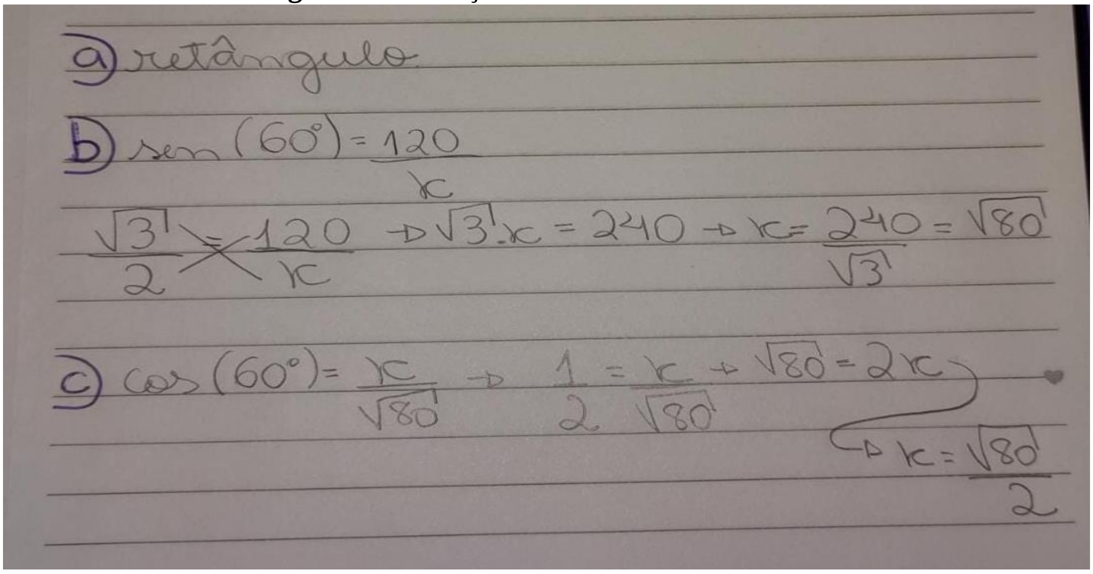


Fonte: Sabel (2021, p. 55).

Na resolução acima vemos que o Estudante A2 escolheu outro caminho para resolver o item (c), optando pelo uso do Teorema de Pitágoras ao invés das razões trigonométricas. Primeiramente, ele fez o desenho do triângulo em questão, designando a letra h para ser a altura e evocando a fórmula do teorema. Por meio da expansão formal, substituiu corretamente os dados e efetuou as operações que levaram à resposta final correta. Hillesheim (2022) também aponta que em geometria as funções discursivas são essenciais para designar elementos sobre as figuras e contribuir na compreensão do estudante sobre o objeto.

Além disso, vemos aqui a presença da função apofântica com a operação do ato ilocutório, pois no momento em que escreveu "prefiro usar Pitágoras", ele se comunicou diretamente com o professor para apresentar uma justificativa. Neste exemplo, o estudante escolheu um caminho diferente do que era esperado inicialmente, mas todo discurso manteve valor lógico, epistêmico e social. É importante valorizar essas diferentes estratégias, pois apontam indícios da aprendizagem por parte dos estudantes, uma vez que não devemos limitá-los a utilizar sempre a mesma técnica de resolução.

Figura 3: Resolução do Estudante A1 no Problema 1.

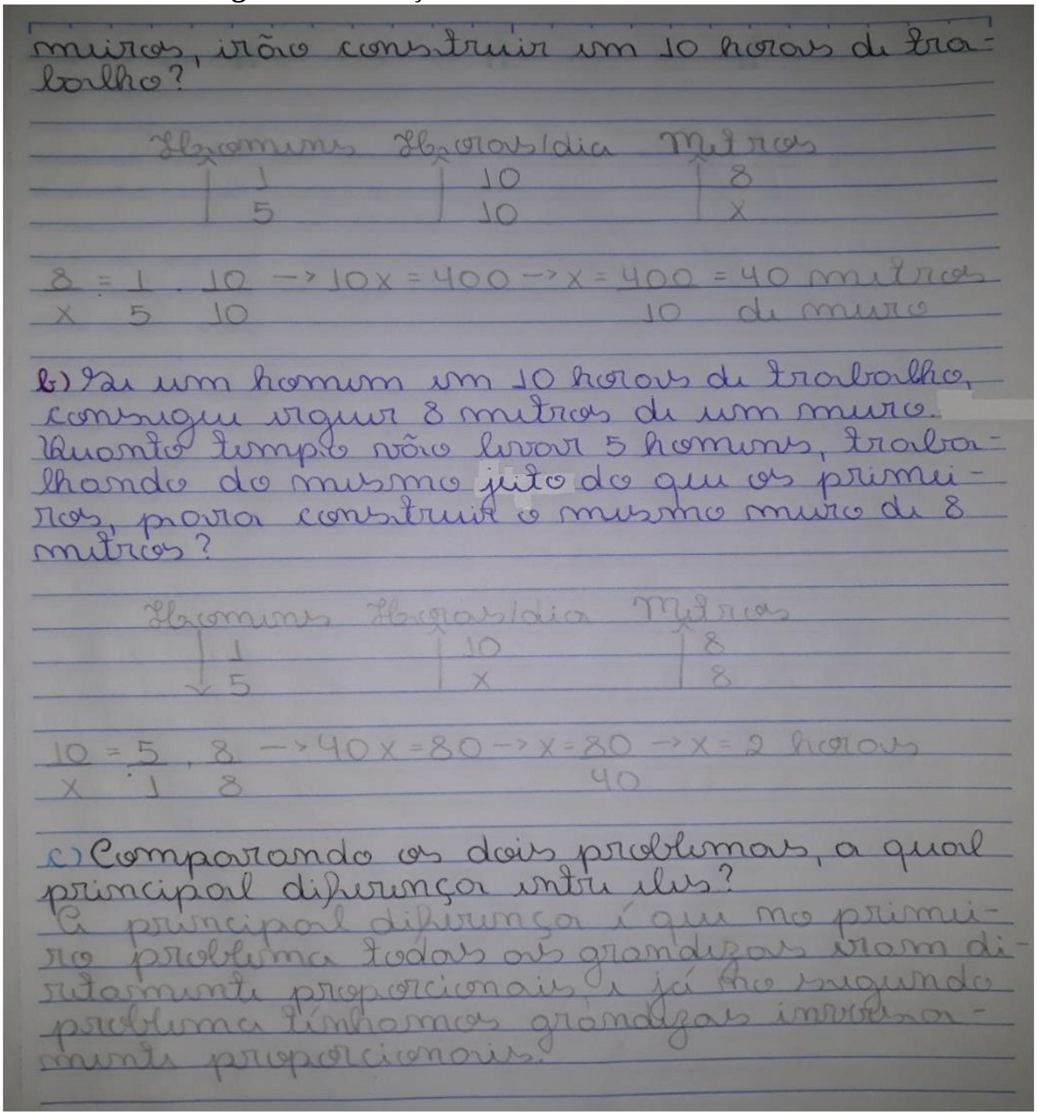


Fonte: Sabel (2021, p. 56).

Na Figura 3, temos um exemplo de resolução que não foi correta, indicando algumas lacunas na aprendizagem do Estudante A1. Embora no item (a) a designação do tipo categorização tenha sido feita corretamente, no item (b) ele começa com uma designação incorreta da relação trigonométrica, revelando uma incompreensão sobre a identificação do cateto oposto e adjacente. Apesar de a formulação da fórmula do seno em si estar correta, ela não tem valor epistêmico nesse contexto, pois o problema não oferece os elementos geométricos manipulados no seno.

Ainda no item (b), ele cometeu outro erro ao final da expansão discursiva realizada. Precisava resolver a operação $\frac{240}{\sqrt{3}}$, fazendo-a da seguinte maneira: dividiu o 240 por 3, obtendo 80, depois acrescentou a raiz quadrada que havia no denominador 80 e chegou em $\sqrt{80}$. Essa parte do discurso não tem valor lógico e nem epistêmico, pois não é assim que a divisão deve ser efetuada, levando a uma resposta incorreta. No item (c), ele também erra o processo da designação da relação trigonométrica, usando o cosseno em uma situação não aplicável. Esse estudante incide em dois tipos de erros: de natureza aritmética (errar a divisão do 240 por $\sqrt{3}$) e de natureza conceitual (não compreender quando usar cada uma das relações trigonométricas).

Figura 4: Resolução do estudante B1 no Problema 2.



muros, irão construir em 10 horas de trabalho?

Homens	Horas/dia	Metros
1	10	8
5	10	x

$\frac{8}{x} = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{10} \rightarrow 10x = 400 \rightarrow x = \frac{400}{10} = 40$ metros de muro

b) Se um homem em 10 horas de trabalho, conseguiu erguer 8 metros de um muro. Quanto tempo irão levar 5 homens, trabalhando do mesmo jeito do que os primeiros, para construir o mesmo muro de 8 metros?

Homens	Horas/dia	Metros
1	10	8
5	x	8

$\frac{10}{x} = \frac{5}{1} \cdot \frac{8}{8} \rightarrow 40x = 80 \rightarrow x = \frac{80}{40} \rightarrow x = 2$ horas

c) Comparando os dois problemas, a qual principal diferença entre eles?
A principal diferença é que no primeiro problema todas as grandezas eram diretamente proporcionais, e já no segundo problema tínhamos grandezas inversamente proporcionais.

Fonte: Sabel (2021, p. 65).

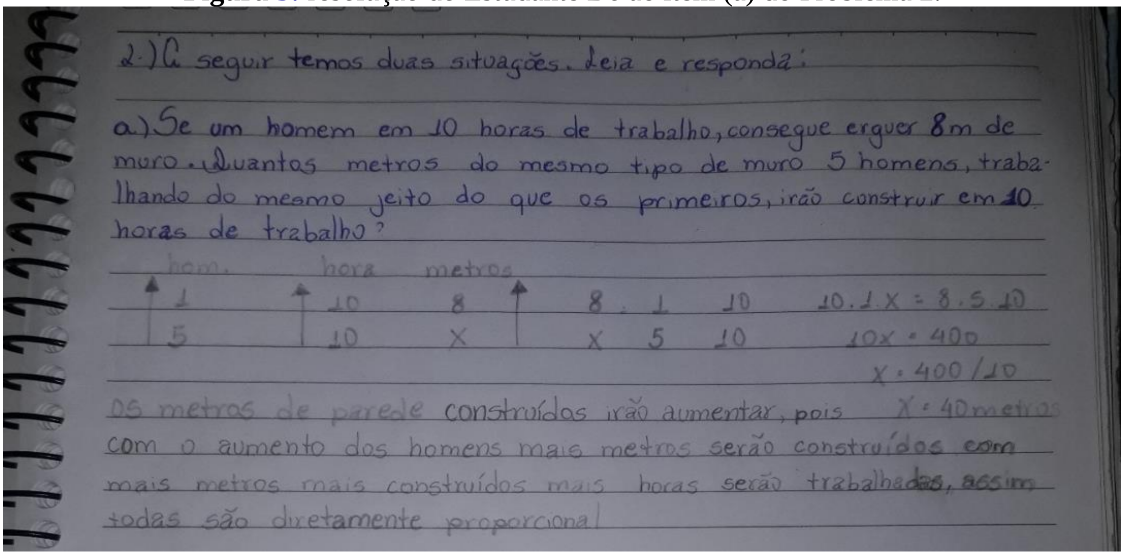
Esse estudante iniciou organizando três colunas nomeadas em língua natural, representando as grandezas contidas pelos problemas. Mobilizou os números dispostos no enunciado do item (a) e relacionou cada um deles dentro de suas colunas em posições pertinentes. Aqui vemos uma expansão cognitiva quando ele usou as setas viradas para cima, como forma de dizer que as grandezas eram todas diretamente proporcionais entre si. Esse recurso foi utilizado pela maioria dos estudantes para indicar as relações de proporcionalidade.

A expansão discursiva formal deu continuidade ao discurso por meio dos tratamentos algébricos para resolver a equação advinda do problema. No item (b), os mesmos procedimentos são reiterados com excesso, visto que temos setas viradas ao contrário, indicando que o estudante reconheceu que eram grandezas inversamente proporcionais. Chamou-nos a atenção que, dos 25 estudantes que resolveram esses problemas, 22 criaram também três colunas, sendo que uma delas não é necessária, pois se trata dos mesmos números.

Isso ocorreu porque os estudantes têm o hábito de retirar todas as informações dos enunciados e achar que todas devem ser manipuladas, por isso, não consideram a hipótese de usar somente duas grandezas, já que a terceira não interfere no resultado.

No item (c) vemos a língua materna conduzida pela expansão natural que interliga frases formando um discurso explicativo coerente e coeso. Em toda sua resolução, podemos atribuir o valor lógico de verdade, epistêmico, por ter respeitado os processos matemáticos internos ao tratamento de proporções, e o valor social, por atender ao professor. Por meio dessa análise, podemos considerar que ele compreendeu os conceitos esperados e não apresentou no discurso nenhum dado que indique uma incompreensão.

Figura 5: resolução do Estudante B6 ao item (a) do Problema 2.



2.) A seguir temos duas situações. Leia e responda:

a) Se um homem em 10 horas de trabalho, consegue erguer 8m de muro. Quantos metros do mesmo tipo de muro 5 homens, trabalhando do mesmo jeito do que os primeiros, irão construir em 10 horas de trabalho?

hom. hora metros
1 10 8
5 10 X

$\frac{8}{X} = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{10}$

$10 . 1 . X = 8 . 5 . 10$
$10X = 400$
$X = 400/10$
$X = 40$ metros

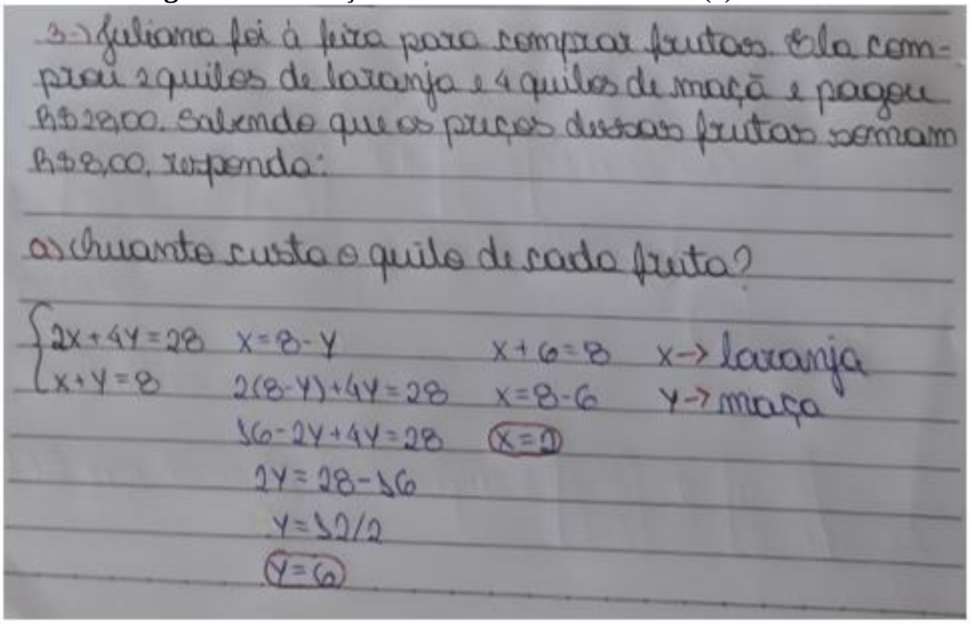
Os metros de parede construídos irão aumentar, pois com o aumento dos homens mais metros serão construídos com mais metros mais construídos mais horas serão trabalhadas, assim todas são diretamente proporcional

Fonte: Sabel (2021, p. 67).

O Estudante B6 fez seu discurso de forma muito similar ao estudante anterior, seguindo os passos que a maioria seguiu, ao criar três colunas para as grandezas, organizar os dados e resolver corretamente. O ponto diferencial dessa resolução é o valor que a língua materna teve em sua resolução como um todo. Percebe-se que a linguagem simbólica (numérica) e algébrica não foi a que ganhou destaque, mas sim, suas explicações em língua materna.

Ele consegue, por meio da predicação da função apofântica, criar frases que são continuadas pela expansão discursiva natural, considerando que seu entendimento das grandezas é ou não diretamente proporcional. Ele faz comparações que contêm valor lógico e epistêmico e que podem ser validadas do ponto de vista da argumentação matemática. Constata-se que ele compreendeu os conceitos envolvidos, além de mostrar o quanto a língua natural pode ser versátil na matemática, acentuando as ideias já defendidas por Duval (2004).

Figura 6: Resolução do Estudante B15 ao item (a) Problema 3.


3-) Juliana foi à feira para comprar frutas. Ela comprou 2 quilos de laranja e 4 quilos de maçã e pagou R$28,00. Sabendo que os preços dessas frutas somam R$8,00, responda:

a) Quanto custa o quilo de cada fruta?

$$\begin{cases} 2x+4y=28 \\ x+y=8 \end{cases}$$

$x=8-y$

$2(8-y)+4y=28$

$16-2y+4y=28$

$2y=28-16$

$y=12/2$

$y=6$

$x+6=8$

$x=8-6$

$x=2$

x -> laranja

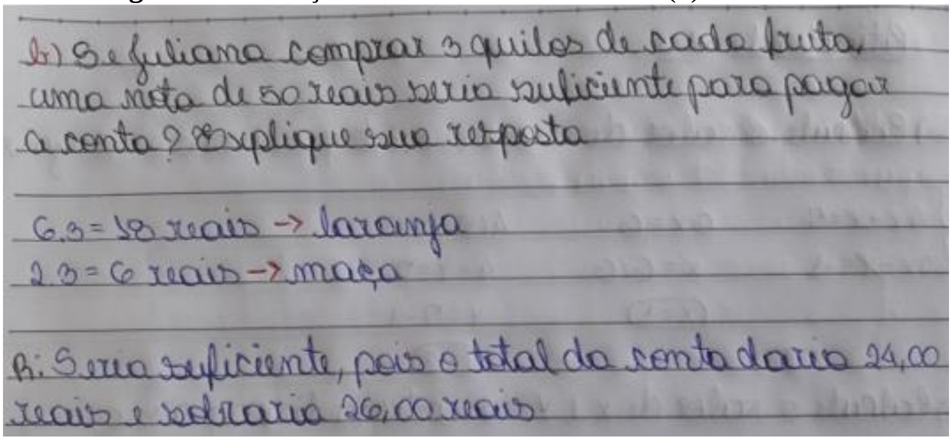
y -> maça

Fonte: Sabel (2021, p. 73).

O Estudante B15, no item (a), seguiu nossas previsões iniciais e utilizou a designação pura como forma de referenciar suas incógnitas, atribuindo x e y para representar o preço do quilo da maça e da laranja. Essa designação foi feita de forma explícita, pois ele escreveu ao lado tais relações, o que, em geral, não ocorreu em outras resoluções que partiram direto para o sistema. Ele organizou as duas equações corretamente, recorrendo, em seguida, ao método da substituição. Ao partir da segunda equação, ele redesignou o x em função do y (designação funcional) e obteve a expressão x = 8 – y.

Após esse passo, o estudante retomou a primeira equação e substituiu o novo valor redesignado de x na equação, obtendo 2(8-y) + 4y = 28. Essa ação exige o que podemos chamar de dupla designação, pois o que antes estava disposto na primeira equação foi designado novamente a partir das substituições. Esses desdobramentos da função referencial de designação de objetos, além de serem apontados por Duval (2015) como cruciais à álgebra, também são discutidos por Brandt e Moretti (2018, p. 24), que argumentam que na álgebra o "desenvolvimento da capacidade de designar evidencia a importância da função discursiva de designação e suas operações cognitivas".

Figura 7: Resolução do Estudante B15 ao item (b) Problema 3.



b) Se Juliana comprar 3 quilos de cada fruta, uma nota de 50 reais seria suficiente para pagar a conta? Explique sua resposta

$6.3 = 18$ reais → laranja
$2.3 = 6$ reais → maça

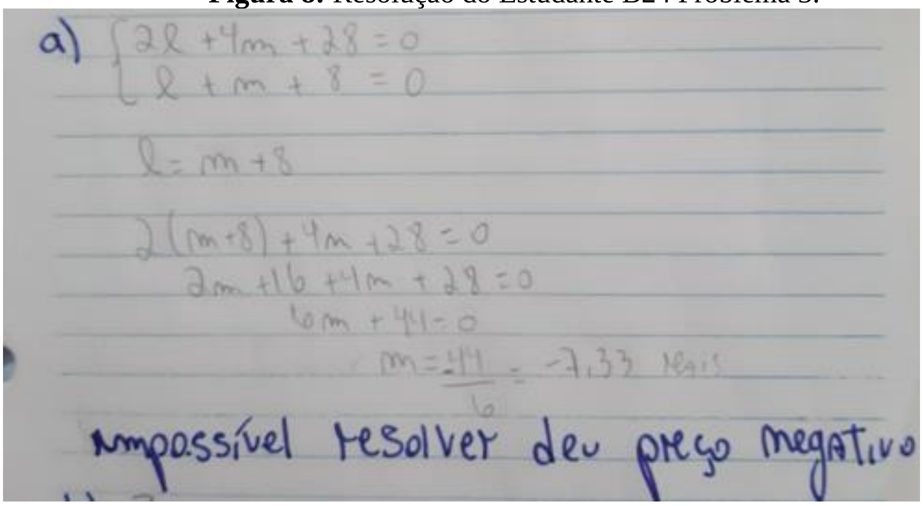
R: Seria suficiente, pois o total da conta daria 24,00 reais e sobraria 26,00 reais

Fonte: Sabel (2021, p. 73).

Após ter feito corretamente o item (a), no item (b) o estudante também alcançou um resultado correto que pode ser validado. Vemos que ele organizou os números e fez as operações necessárias para calcular o valor de cada fruta, usando designação em linguagem simbólica e em língua natural. Por meio da função apofântica e de sua operação de predicação, construiu uma frase completa que responde ao item (b) satisfatoriamente, assim como já aponta Duval (2011) que o papel da apofântica é justamente propiciar formar do estudante construir seus raciocínios.

Esse caso mostrou uma maneira de resolver um sistema de equações lineares que possui valor lógico e epistêmico. Quando observamos sem o olhar das funções e das operações discursivas, isso pode parecer algo simples, mas quando percebemos que cada processo de designação e expansão é uma atividade cognitiva que apresenta algum grau de aprendizagem, temos um novo instrumento para avaliar a produção dos estudantes.

Figura 8: Resolução do Estudante B24 Problema 3.



a) $\begin{cases} 2l + 4m + 28 = 0 \\ l + m + 8 = 0 \end{cases}$

$l = m + 8$

$2(m+8) + 4m + 28 = 0$
$2m + 16 + 4m + 28 = 0$
$6m + 44 = 0$
$m = \frac{-44}{6} = -7{,}33$ reais

impossível resolver deu preço negativo

Fonte: Sabel (2021, p. 80).

Neste exemplo, trazemos uma resolução que não obteve êxito em seu desenvolvimento. O Estudante B24 inicia da mesma forma que o estudante anterior, criando o sistema linear por meio de duas equações que necessitavam da designação das incógnitas por meio de letras. Ele usou a letra l para designar o quilo da laranja e m para o quilo da maçã, fazendo isso sem recorrer a nenhuma explicitação escrita, conforme o caso anterior.

O sistema é organizado corretamente, porém, no primeiro passo que inicia a expansão formal, ele erra a designação funcional da letra l. O correto seria ter feito $l = -m - 8$, mas ele não atenta à mudança nos sinais quando redesigna a equação, o que leva a um erro que comprometeu todos os passos seguintes das substituições algébricas. Ele obtém um valor que não faz sentido frente ao contexto do enunciado e considera que se trata de um problema sem solução. É nesse momento que em consonância com Brandt e Moretti (2018), a análise das funções discursivas nos permitem inferir as incompreensões que os estudam carregam e nos revelam pela escrita.

Vemos aqui que seu erro foi de natureza conceitual da parte das equações, e não necessariamente da compreensão acerca de como resolver um sistema linear. Seus passos estariam corretos, sendo que ele entendeu qual o procedimento necessário para usar o método de substituição, mas o erro no tratamento algébrico impediu que seu discurso tivesse valor lógico de verdade e valor epistêmico. O professor, nesse tipo de situação, precisa levar em conta quais incompreensões são reveladas pelo discurso do estudante que, neste caso, requer ajuda no processo de organizar os termos de uma equação quando preciso.

5. Considerações

Com a presente pesquisa investigamos as contribuições das funções discursivas na aprendizagem matemática, destacando seu papel na análise de produções na resolução de problemas. Com caráter qualitativo e com apoio dos elementos da Engenharia Didática, aplicamos alguns problemas com estudantes de ensino médio e realizamos uma discussão dos discursos produzidos por eles nas resoluções dos problemas, à luz das funções discursivas de Duval (2004).

No que se refere as funções discursivas, o destaque foi a função referencial de designação de objetos, pois ela permitiu aos estudantes atribuir um nome ou identificação que representasse os objetos matemático. Os inícios das resoluções começaram com tais designações que abriam caminho para a continuidade dos discursos. Na geometria, por exemplo, a designação foi fundamental para indicar os elementos da figura (altura, geratriz, raio da base) que era retomado na expansão formal. Na álgebra, as construções das expressões dependiam de uma designação das variáveis, bem como redesignação e designações funcionais exigidas no tratamento algébrico.

No caso da função apofântica, foi ela que possibilitou a construção de frases que falassem algo sobre os objetos, além de nos permitir atribuir os valores lógico, epistêmico e social. A construção de frases e enunciados pela operação de predicação se mostrou essencial nos momentos que os estudantes queriam complementar um passo de sua resolução. E ainda, o ato ilocutório esteve presente nos momentos que tais frases se dirigiam ao professor que não necessariamente fazia parte da resolução, como o caso do Estudante A2 no Problema 1 que escreveu que preferia usar Pitágoras (avisando ao professor o método escolhido).

Já a expansão discursiva foi fundamental para a progressão dos discursos iniciados pelas funções anteriores. A expansão formal e natural foram destaque, conduzindo os discursos que progrediam pela linguagem formal e materna, por meio das operações de substituição e acumulação, respectivamente. A expansão do tipo cognitiva e lexical perpassam as demais, nos momentos em que língua ser empregada com carácter especializado e os léxicos retomados na continuidade dos discursos.

Desta forma, consideramos que tais funções e operações discursivas são essenciais para o aprendizado da matemática, pois são elas que permitem que os estudantes revelem seus conhecimentos e os exteriorizem. São elas que possibilitam que diferentes modos de pensar matematicamente possam ser mobilizados pelos estudantes e exteriorizados pela linguagem. As funções discursivas contribuem como um recurso teórico que pode instrumentar os professores a analisarem as produções de seus estudantes, valorizando os processos de escrita nas aulas de matemática e oferecendo elementos que revelem aprendizagens e incompreensões de seus estudantes. Também reforçamos por meio desta pesquisa que a linguagem natural atua também como um registro de representação semiótica, desempenham papel fundamental na aprendizagem matemática.

Referências

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das matemáticas.** Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa/Portugal: Instituto Piaget, 1996.

BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu; BASSOI, Tânia Stella. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 2, p. 479-503, 2014.

BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. Aprendizagem da álgebra segundo

Raymond Duval. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel, v. 2, n. 1, p. 1-26, maio 2018.

DIONIZIO, Fátima A. Queiroz. **Conhecimentos docentes**: uma análise dos discursos de professores que ensinam matemática. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação, UEPG, Ponta Grossa, 2013.

DIONIZIO, Fátima A. Queiroz; BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. Emprego das Funções Discursivas da Linguagem na Compreensão de Erros de Alunos em uma Atividade que Envolve Noções de Trigonometria**. Perspectivas da Educação Matemática,** Campo Grande, v. 7, p. 513-553, 2014.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educacion y Pedagogia, Grupo de Educacion Matematica, 2004.

__________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

__________. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 266-297, 2012.

DUVAL, R.; CAMPOS, T. M. M.; BARROS, L. G. X.; DIAS, M. A. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** introduzir a álgebra no ensino: qual o objetivo e como fazer isso. São Paulo: PROEM, 2015.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Filosofia do Estilo.** Tradução de Escarlett Zebbertto Marton. São Paulo: Perspectiva/Edusp, 1974.

HILLESHEIM, S. As Funções Discursivas da Língua e Suas Implicações na aprendizagem da Geometria nos Anos Iniciais. **Boletim GEPEM**, *[S. l.]*, n. 81, p. 159–174, 2022. DOI: 10.4322/gepem.2022.035.

NACARATO, A. M. A escrita nas aulas de matemática: diversidade de registros e suas potencialidades. **Leitura: Teoria & Prática**, Campinas, v. 31, n. 61, p. 63-79, nov. 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 213-231.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTES, H. M. S.; BRANDT, C.F.; NUNES, A.L.R. O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, n. 1, 2017.

POWELL, A; BAIRRAL, M. **A escrita e o pensamento matemático:** Interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.

SABEL, Eduardo. **O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas.** Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, Florianópólis, 2021.

SABEL, Eduardo; MORETTI. Méricles Thadeu. Para além da comunicação em sala de aula: o papel das funções discursivas na aprendizagem matemática. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 10, n. 2, p. 1 - 22, 2022.

VERGANI, T. **Matemática & linguagem(s):** olhares interactivos e transculturais. Lisboa: Pandora Edições, 2002.

Recebido em: 17 de maio de 2022
Aprovado em: 31 de agosto de 2022