

GEOMETRIA E PENSAMENTO GEOMÉTRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: O QUE REVELAM PESQUISAS BRASILEIRAS ENTRE 2009 E 2020

DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.26.44-65>

Fernanda Caroline Cybulski¹
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino²

Resumo: Este artigo tem por objetivo discutir abordagens a respeito do ensino de geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática (PEM), assim como caracterizações de pensamento geométrico e principais aportes teóricos, presentes em teses e dissertações brasileiras publicadas entre 2009 e 2020. Para a constituição do *corpus* de análise foi realizado um mapeamento de dissertações e teses oriundas de Programas de Pós-graduação brasileiros *Stricto Sensu*, das Áreas de Educação e Ensino, na plataforma digital do Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e no catálogo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, totalizando 18 trabalhos. Observa-se que representações de figuras geométricas, como desenhos, construções em *softwares* e material manipulável, são frequentemente utilizadas para abordar geometria na formação inicial de PEM. Tais representações são exploradas para: identificar conceitos ou propriedades de forma perceptiva; resolver situações-problema; verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações. Nos últimos anos há uma crescente busca de discussões e caracterizações para pensamento geométrico, embora ainda sejam incipientes. Raymond Duval e Pierre van Hiele foram privilegiados como autores de referência nos trabalhos analisados. O ensino de geometria e o pensamento geométrico na formação inicial de PEM são temas ainda pouco investigados em dissertações e teses brasileiras. Discutir abordagens visuais articuladas com caracterizações de pensamento geométrico pode ser um campo fértil para o trabalho com a geometria na formação inicial de PEM.

Palavras-chave: Formação inicial de professores que ensinam matemática. Pensamento geométrico. Ensino de geometria. Mapeamento de teses e dissertações.

GEOMETRY AND GEOMETRIC THINKING IN PRESERVICE MATHEMATICS TEACHER EDUCATION: WHAT BRAZILIAN RESEARCHES PRODUCED BETWEEN 2009 AND 2020 REVEAL

Abstract: This article aims to discuss approaches regarding geometry teaching in the preservice mathematics teacher education, as well as characterizations of geometric thinking and main theoretical contributions, present in theses and dissertations produced in Brazil between 2009 and 2020. For constituting the *corpus* of analysis, a mapping of dissertations and theses from the Brazilian Postgraduate Programs *Stricto Sensu*, from the Education and Teaching Areas, was carried out on the digital platform of the Theses and Dissertations Catalogue of the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel and in the catalogue of the Brazilian Digital Library of Theses and Dissertations, totalling 18 researches. It is observed that representations of geometric figures, such as drawings, constructions in software, and manipulable material, are often used to approach geometry in the preservice mathematics teacher education. Such representations are explored to: identify concepts or properties perceptually; solve problem situations; verify or study geometric properties, proofs, and demonstrations. Recently, there has been a growing interest in discussions and characterizations of geometric thinking, although they are still incipient. Raymond Duval and Pierre van Hiele were

¹ Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da Universidade Estadual de Londrina (UEL), E-mail: fercybulski@gmail.com - ORCID: orcid.org/0000-0001-9499-6782.

² Doutora em Educação, Professora Titular do Departamento de Matemática e do PECEM na UEL, E-mail: marciacyrino@uel.br - ORCID: orcid.org/0000-0003-4276-8395.

privileged as authors of reference in the analyzed works. The teaching of geometry and the geometric thinking in the preservice mathematics teacher education are under-investigated subjects in Brazilian dissertations and theses. Discussing visual approaches articulated with characterizations of geometric thinking can be a fruitful field for working with geometry in the preservice mathematics teacher education.

Keywords: Preservice mathematics teacher education. Geometric thinking. Geometry teaching. Theses and dissertations mapping.

Introdução

Nas últimas décadas tem sido constante o debate sobre a formação de professores e o seu impacto na aprendizagem dos estudantes da Educação Básica (GATTI, 2014; ROLDÃO, 2017; SANTOS; OLIVEIRA, 2017). No entanto, ainda são pouco investigadas questões como as formações nas disciplinas, os modos de agir e pensar de (futuros) professores (GATTI *et al.*, 2019) e, particularmente, o ensino de geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática - PEM (ATASOY, 2019; BARRETO *et al.*, 2021; CARVALHO; FERREIRA, 2015; SANTOS; TELES, 2021).

A Geometria é uma temática prevista para ser ensinada em todos os níveis de ensino, desde os primeiros anos de escolaridade (BRASIL, 2018; CLEMENTS; SARAMA, 2011; PASSOS; NACARATO, 2014), portanto, diante de sua relevância, se faz necessário investigar tal temática (SANTOS; OLIVEIRA, 2017; SWOBODA; VIGHI, 2016).

São inúmeras as dificuldades de (futuros) PEM em relação à geometria (BRUNHEIRA, 2019; KUZNIAK; NECHACHE, 2021; SANTOS; TELES, 2021; SWOBODA; VIGHI, 2016; ULUSOY, 2019), o que acaba reverberando negativamente na prática diária do PEM na Educação Básica, seja pelo abandono do ensino de geometria, seja por ele ser relegado a segundo plano (PAVANELLO, 1993; PENTEADO; PEREIRA; BRANDT, 2019).

De modo específico, o pensamento geométrico é, também, um tema ainda pouco explorado nas pesquisas (CLEMENTS *et al.*, 2018), inclusive em contextos de formação de PEM (CARVALHO; FERREIRA, 2015; PAIVA, 2021). De acordo com Costa (2020), até o momento de sua tese não havia consenso a respeito de uma caracterização/definição de pensamento geométrico³. Essa afirmação é corroborada por Paiva (2021), ao analisar sete teses e dissertações⁴ sobre formação (inicial e continuada) de professores de Matemática, e observar

³ Costa (2020, p. 177) caracteriza pensamento geométrico como “a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, de aplicar de modo coerente os instrumentos geométricos na resolução de problemas. É a capacidade de compreender a natureza dos fenômenos e inferir sobre eles, de identificar e perceber a Geometria como uma ferramenta para entendimento do mundo físico e como um modelo matemático para compreensão do mundo teórico”.

⁴ Não identificamos, no trabalho de Paiva (2021), o período dos trabalhos analisados.

a ausência de detalhes ou argumentos explícitos de uma caracterização para pensamento geométrico.

Em vista de todas essas problemáticas e, em consonância com Crecci, Nacarato e Fiorentini (2017) a respeito da necessidade de estudos de mapeamento de investigações na área de formação de professores, que nos permitam levantar o que tem sido pesquisado e as principais questões ainda pendentes, propusemo-nos a realizar um mapeamento de dissertações e teses brasileiras, publicadas no período 2009-2020, a fim de *discutir abordagens de ensino de geometria na formação inicial de PEM, assim como caracterizações de pensamento geométrico e principais aportes teóricos utilizados nesses trabalhos.*

Na sequência, descreveremos os encaminhamentos metodológicos para a constituição e a análise do *corpus*, seguidos pelos resultados, discussões e por algumas considerações.

Procedimentos metodológicos

Para esta pesquisa, de caráter documental (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), realizamos levantamentos⁵ de dissertações (mestrados acadêmico e profissional) e teses de Programas de Pós-graduação brasileiros *stricto sensu* das Áreas de Educação e Ensino reconhecidos pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Selecionamos as pesquisas dos catálogos digitais das plataformas da CAPES e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, do período temporal 2009-2020, que continham, no título ou no resumo, as expressões “pensamento geométrico”, “saber geométrico”, “saberes geométricos”, “raciocínio geométrico” ou “conhecimento geométrico”, o que resultou em 204 pesquisas.

Em seguida, lemos partes específicas dos trabalhos, como resumo e fundamentação teórica e, em alguns casos, o trabalho completo, quando essas seções não eram suficientes para identificar se o tema em questão havia sido desenvolvido no âmbito da formação inicial de PEM. Essa etapa da seleção exigiu análise, reflexão e discussão, motivo pelo qual optamos por não utilizar filtros ou buscas por palavras. Com isso, obtivemos um *corpus* de 18 trabalhos (7 teses e 11 dissertações), que foram lidos na íntegra.

Para a análise, construímos uma ficha, com base em Fiorentini *et al.* (2016), contendo

⁵ Foram realizados três levantamentos. Inicialmente, no dia 15/05/2020 a busca dos trabalhos foi realizada em conjunto com outros três integrantes do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática - Gepefopem, do qual fazemos parte. Em 14/01/2021, foi feito outro levantamento de pesquisas publicadas no ano de 2019, porém não foram acrescentados novos trabalhos. Posteriormente, em 13/09/2021, levantamos os trabalhos publicados no ano de 2020 e acrescentamos três trabalhos.

tópicos como: objetivo; principais resultados; informações metodológicas e analíticas; e referenciais utilizados. Durante a leitura, a produção de fichamentos e as análises em geral apoiamos-nos no paradigma indiciário de Ginzburg⁶ (1989).

Assim, buscamos indícios que nos possibilitassem identificar e analisar abordagens de ensino de geometria utilizadas na formação inicial de PEM, assim como caracterizações de pensamento geométrico, considerando os diferentes termos empregados pelos autores⁷, e os principais aportes teóricos presentes nas investigações que constituíram o *corpus*, a partir de similaridades, particularidades, convergências ou divergências.

Abordagens de ensino de geometria na formação inicial de PEM identificadas no *corpus*

Em decorrência de uma análise indiciária e interpretativa, ao analisar abordagens de ensino de geometria na formação inicial de PEM, observamos que as representações de objetos geométricos são um aspecto comum nos trabalhos e, por isso, nos dedicamos a discutir essas diferentes formas de representação identificadas.

Na Matemática, as representações são essenciais, pois seus objetos nem sempre são diretamente perceptíveis (DUVAL, 2009), e podem existir diferentes representações para o mesmo objeto (DUVAL, 2009; PAIS, 1996; PARZYSZ, 2001). O uso de representações de figuras geométricas⁸, associadas aos objetos geométricos, foi algo presente nos trabalhos do *corpus*. No processo de análise, observamos a existência de diferentes finalidades em situações geométricas, a saber: para *identificar* conceitos ou propriedades, de forma principalmente perceptiva; para *resolver* problemas; para *verificar* ou *estudar* propriedades geométricas, provas e demonstrações (Quadro 1).

Quadro 1: Abordagens de geometria presentes no *corpus*

	Abordagem	Autor (a)
Representações de figuras geométricas para:	identificar conceitos ou propriedades de forma principalmente perceptiva (agrupamento 1)	Cardoso (2018), Carvalho (2017), Cicarini (2015), Dias (2012), Resende (2018), Sánchez (2020), Vieira (2017), Zambon (2010)
	resolver situações- problema (agrupamento 2)	Brasil (2017), Oliveira (2015), Oliveira (2017)

⁶ O Paradigma Indiciário, de acordo com Ginzburg (1989), consiste na busca de indícios, sinais, pistas, conjecturas e inferências, a partir de dados aparentemente negligenciáveis, com a intencionalidade de realizar uma leitura atenta do elemento a ser estudado.

⁷ Conhecimento geométrico; pensamento geométrico; raciocínio geométrico; saber geométrico.

⁸ O recurso visual de representações de figuras geométricas para se referir aos objetos da geometria foi abordado no *corpus* sob diferentes representações, tais como desenhos, material manipulável e construções em *softwares*, como será discutido no decorrer deste artigo.

	<p>verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações (agrupamento 3)</p>	<p>Almeida (2018), Dias (2009), Fonseca (2020), Janzen (2011), Lima (2020), Moreira (2010), Zanella (2018)</p>
--	--	--

Fonte: As autoras. Legenda das cores dos estudos: teses em vermelho, dissertações em azul

A seguir, apresentaremos como tais aspectos foram abordados nas pesquisas analisadas.

Os trabalhos do agrupamento 1: utilizam representações de figuras geométricas para identificar conceitos ou propriedades de forma principalmente perceptiva

Segundo Duval (1994), uma das formas de analisar objetos ou figuras em geometria é por meio de uma apreensão⁹ perceptiva, isto é, uma apreensão imediata, automática e que permite identificar ou reconhecer uma forma a partir de aspectos como tamanho, direção e orientação. A importância do visual em geometria, como um contato inicial com os conceitos geométricos, também é destacada por Pais (1996) e van Hiele (1984).

Assim, quando nos referimos à utilização de diferentes representações de figuras geométricas de forma principalmente perceptiva é que, em alguns casos, os momentos de formação inicial de PEM propuseram identificar conceitos geométricos e estudar suas propriedades pela observação de aspectos, como características de contorno.

Nos trabalhos desse grupo, as abordagens geométricas estão centradas na percepção (CARDOSO, 2018; CARVALHO, 2017; CICARINI, 2015; DIAS, 2012; RESENDE, 2018; SÁNCHEZ, 2020; VIEIRA, 2017; ZAMBON, 2010). Os contextos nos quais foram coletadas as informações desses trabalhos são, na maioria, a formação inicial de PEM para atuar nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental¹⁰, isto é, o Curso Normal (RESENDE, 2018), a Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens¹¹ (SÁNCHEZ, 2020) e os demais, com exceção de Dias (2012) e Cicarini (2015), o curso de Pedagogia. Mesmo que o contexto de Dias (2012) tenha sido o curso de Pedagogia, o foco foi em uma formação inicial de PEM na

⁹ Para Duval (1994) há quatro formas de mobilizar uma figura e analisar seu funcionamento em geometria, as apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. O termo apreensão é filosófico e psicológico e designa o ato mais imediato e inicial de acessar um conceito ou objeto, sem julgamentos ou juízo de valor. Para Ferreira (2014), trata-se de um conhecimento oposto aos processos considerados mais elaborados, como a compreensão, o julgamento ou o raciocínio.

¹⁰Doravante Anos Iniciais.

¹¹Tem como objetivo: “promover ‘iniciação acadêmica e científica’ aos futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental, mediante a abordagem interdisciplinar de questões abrangentes e fundamentais de conhecimento científico e social. Ao mesmo tempo, planeja-se criar um ambiente de estudos e de debates sobre a realidade contemporânea – incluída imprescindivelmente na formação docente – e, em particular, sobre o contexto sociocultural do Estado do Pará, da Região de inserção da UFPA e, especialmente, da Região Amazônica”. Disponível em <http://www.iemci.ufpa.br/index.php/graduacao>. Acesso em: 14 set. 2021.

Educação Infantil. Já Cicarini (2015) atuou no contexto indígena de formação inicial de professores para os Anos Finais do Ensino Fundamental¹².

Para identificar propriedades e relações entre os objetos da geometria, utilizando o recurso visual, os autores do *corpus* valeram-se de material manipulável, como embalagens, tachinhas, fio e E.V.A., com foco em características visuais e de contorno (CARDOSO, 2018; CARVALHO, 2017; VIEIRA, 2017; RESENDE, 2018; ZAMBON, 2010), e objetos de jogos e brincadeiras, como dado e corda, estes especificamente para a formação inicial de professores para atuar na Educação Infantil (DIAS, 2012).

Outra abordagem trata-se de relacionar a geometria com a natureza e o contexto indígena, por meio do grafismo, para trabalhar nomenclaturas de figuras geométricas planas e identificar seus elementos geométricos constituintes (CICARINI, 2015). Ademais, identificamos construções geométricas, utilizando: *software* GeoGebra (CARVALHO, 2017; SÁNCHEZ, 2020); *software* Poly 1.06 e tarefas de simetria (ZAMBON, 2010); aparelho gerador de sólidos de revolução EQ251D (CARVALHO, 2017); lápis e papel (CARDOSO, 2018); e tangram¹³ (CARDOSO, 2018; VIEIRA, 2017).

Os trabalhos do agrupamento 2: utilizam representações de figuras geométricas para resolver situações-problema

Inicialmente, ressaltamos que não indicamos perspectivas teóricas para a resolução de problemas, mas sim, a noção de análise, investigação e busca de respostas a partir de conceitos geométricos. Duval (1998) destaca que a análise de figuras permite encontrar soluções ou respostas. Em alguns problemas de geometria, certas características das figuras viabilizam remeter a teoremas ou definições, os quais podem ser úteis para a solução. Já em outros problemas, apenas a visão é suficiente para percebermos o que será necessário. Assim, figuras geométricas podem auxiliar a resolver problemas, assumindo a função de heurística¹⁴.

Os três trabalhos desse grupo tratam de questões concernentes à resolução de problemas e visam trabalhar geometria no âmbito da formação inicial de PEM nos Anos Finais ou Ensino Médio (BRASIL, 2017; OLIVEIRA, 2015; OLIVEIRA, 2017).

Brasil (2017) destaca que o ensino de geometria deveria ser iniciado com situações-

¹²Doravante Anos Finais.

¹³Tangram: Quebra-cabeça mais conhecido em sua versão chinesa, composta de sete peças com formatos poligonais.

¹⁴A função de heurística refere-se às investigações e, possíveis, modificações feitas em figuras geométricas em busca de soluções e respostas (DUVAL, 1998).

problema para trabalhar conceitos, demonstrações, argumentações e diferentes representações. A autora propõe 14 problemas de geometria aos futuros professores, dos quais 11 utilizam figuras. Oliveira (2015) utilizou o *software Open Sim* para abordar representações de objetos geométricos e para resolver problemas com o apoio de desenhos, algoritmos matemáticos e construções feitas com os recursos disponíveis no *software*, usando álgebra e aritmética de modo concomitante com a geometria. Já o *software GeoGebra* foi o recurso escolhido por Oliveira (2017) para resolver problemas por meio de simetria, translação, rotação e homotetia. Estas transformações geométricas e as relações obtidas a partir das próprias figuras permitiram que pouco ou nenhum cálculo aritmético fosse necessário para as resoluções.

Os trabalhos do agrupamento 3: utilizam representações de figuras geométricas para verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações

Segundo Duval (1999), as figuras, mesmo construídas com instrumentos e propriedades matemáticas, são apenas representações com valores particulares, o que não permite que sejam tomadas como provas, sendo a única possibilidade no caso em que são utilizadas como contraexemplo. Parzysz (2006) chama a atenção para aspectos da representação de objetos geométricos na validação de conceitos, isto é, quando em uma demonstração o estudante utiliza propriedades ou informações observadas em desenhos da situação, mas que não foram legitimadas previamente para serem argumentos.

Os trabalhos desta seção valem-se de representações de figuras geométricas para estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações e têm como contexto a formação inicial de PEM nos Anos Finais ou Ensino Médio (ALMEIDA, 2018; DIAS, 2009; FONSECA, 2020; JANZEN, 2011; LIMA, 2020; MOREIRA, 2010; ZANELLA, 2018).

Os autores exploraram construções geométricas, conjecturas e demonstrações apoiados por construções, utilizando lápis e papel (ALMEIDA, 2018; LIMA, 2020), material manipulável, como bola de isopor e elásticos (FONSECA, 2020) e tangram (MOREIRA, 2010).

O *software GeoGebra* também foi um recurso adotado para construções geométricas, demonstrações, verificação de propriedades, exploração de argumentos e de conjecturas. Os autores destacam a necessidade de conhecer conceitos, propriedades matemáticas e saber utilizar os recursos do *software* para realizar construções e demonstrações (DIAS, 2009; FONSECA, 2020; JANZEN, 2011; ZANELLA, 2018).

Caracterizações de pensamento geométrico e principais referenciais teóricos presentes no *corpus*

Diante de diferentes abordagens de geometria presentes na formação inicial de PEM, consideramos pertinente analisar caracterizações de pensamento geométrico, e dos diferentes termos empregados pelos autores, que nortearam os trabalhos do *corpus*, bem como os principais referenciais teóricos utilizados.

Poucos autores do *corpus* se restringem a um único termo, como Dias (2012), que utiliza apenas *pensamento geométrico*; Almeida (2018), Fonseca (2020), Janzen (2011) e Oliveira (2015), *conhecimento geométrico*; e Resende (2018), *saber geométrico*. Os demais usam mais de um desses termos no decorrer do trabalho, além de *raciocínio geométrico*.

Assim, debruçamo-nos em identificar possíveis caracterizações¹⁵ para esses termos nos trabalhos do *corpus*, como mostra o Quadro 2.

Quadro 2: Caracterizações identificadas no *corpus*

Termo	Caracterização
Conhecimento geométrico	“Os conhecimentos geométricos envolvem axiomas, definições, proposições, teoremas, como também enunciar, explicar, descrever, conjecturar, argumentar e demonstrar resultados acerca dos objetos em estudo” (ZANELLA, 2018, p. 213).
Pensamento geométrico	O desenvolvimento do pensamento geométrico da criança deve permitir “[...] observar, refletir, interpretar, levantar hipóteses, procurar e encontrar soluções para situações-problema” (DIAS, 2012, p. 61).
	“[...] o desenvolvimento do pensamento geométrico está diretamente relacionado com o modo pelo qual percebemos e interpretamos o mundo ao nosso redor, e de acordo com Piaget, a criança descobre e compreende o mundo por meio do contato visual e físico com os objetos” (VIEIRA, 2017, p. 73).
Raciocínio geométrico	“[...] o raciocínio geométrico é como o pensar geometricamente e a valorização da linguagem geométrica” (BRASIL, 2017, p. 180).
Saber geométrico	“Optamos por utilizar o termo saberes geométricos, entendendo como todos os conceitos, definições, temas, propriedades e práticas pedagógicas relacionadas à geometria que estejam presentes na cultura escolar primária [...]” (LEME DA SILVA, 2015, p. 42, <i>apud</i> RESENDE, 2018, p. 13).

Fonte: Elaborado pelas autoras

Além da caracterização colocada por Zanella (2018) para conhecimento geométrico, no trabalho de Cicarini (2015) há indícios da Geometria Euclidiana Plana e do conhecimento indígena, representado pelos grafismos, como dois “tipos” de conhecimento geométrico, pois o autor indaga: “Utilizavam o grafismo como um instrumento integrador entre o conhecimento geométrico indígena e o euclidiano?” (CICARINI, 2015, p. 70) e aponta que “[...] o colaborador

¹⁵Por caracterização nos referimos às evidências, às descrições, às definições ou ao elenco de características de certo termo ou expressão. Ressaltamos que as informações do Quadro 2 são os indícios mais próximos de caracterizações que encontramos nos trabalhos analisados.

acredita na possibilidade de se criar uma cartilha que aproximaria os conhecimentos Geométricos indígenas do Geométrico Plano [...]” (p. 104).

Dias (2009), Janzen (2011), Lima (2020), Moreira (2010), Oliveira (2017), Vieira (2017), Zambon (2010) e Zanella (2018) embasaram seus estudos, principalmente, em Bernard Parzys, Luis Carlos Pais, Pierre van Hiele ou Raymond Duval.

Os autores do *corpus* classificam o pensamento geométrico dos estudantes (LIMA, 2020; MOREIRA, 2010; VIEIRA, 2017) ou as tarefas (ZAMBON, 2010) em níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico¹⁶, descritos por van Hiele. Lima (2020) investigou articulações entre os tipos de prova de Nicolas Balacheff e os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele (VAN HIELE, 1957). De modo semelhante, Dias (2009) apoia-se nos Paradigmas de Parzys¹⁷ (PARZYSZ, 2001, 2006) para articular com os tipos de prova de Nicolas Balacheff, e também em Duval (1994), para abordar as apreensões em geometria e a Teoria das Representações Semióticas.

Moreira (2010), além da teoria de van Hiele (NASSER, 1992; USISKIN, 1982)¹⁸, embasa-se em Duval (1993, 2009). Justifica que van Hiele e Duval se unem pela importância da linguagem para os processos de desenvolvimento do pensamento geométrico, pois considera o objetivo de desenvolver o discurso argumentativo dos estudantes.

Vieira (2017) defende, ancorada na concepção de van Hiele (1986), que, na geometria, a visualização e a manipulação de objetos são capazes de facilitar a aprendizagem. Zambon (2010) baseia-se na teoria de van Hiele (CROWLEY, 1994; PIRES; CURI; CAMPOS, 2000) e nas de Parzys (2006) e de Pais (1994, 1996, 2000).

Janzen (2011) e Zanella (2018), por outro lado, apoiam-se exclusivamente em Duval. Janzen (2011) destaca a utilização do referencial teórico para fundamentar os processos constituintes da geometria e os diferentes modos de analisar figuras geométricas (DUVAL, 1998, 1999). Zanella (2018) defende a importância dos registros de representação semiótica, como a língua natural e as linguagens matemática e figural (DUVAL, 1993, 1999, 2004a, 2004b, 2006a, 2006b, 2009, 2011, 2012a, 2012b, 2012c, 2014).

O Quadro 3 ilustra os referenciais mais utilizados nos trabalhos do *corpus*, quais sejam: Duval, Pais, Parzys e van Hiele.

¹⁶Van Hiele (1984) propõe cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico que parte do visual em direção ao axiomático.

¹⁷Parzys (2001, 2006) apresenta quatro paradigmas geométricos: G0 (Geometria Concreta) e G1 (Geometria Espaço-Gráfica), que constituem as Geometrias Não Axiomáticas, e G2 (Geometria Proto-Axiomática) e G3 (Geometria Axiomática), que constituem as Geometrias Axiomáticas.

¹⁸Não identificamos a seção de referências, utilizadas no trabalho de Moreira (2010).



Quadro 3: Referenciais mais utilizados no *corpus*

Raymond Duval	DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives - IREM de Strasbourg, n. 5, p.37-65, 1993.
	DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repères, n.17, p.121-138, 1994.
	DUVAL, R. Geometry from a cognitive Point of view. In: C. Mammana e V. Villani (editores), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, p. 37-52, 1998.
	DUVAL, R. Representation, Vision And Visualization: Cognitive Functions. In: Mathematical Thinking. Basic Issues For Learning. U.S. Department of Education: Educational Resources Information Center (ERIC), 1999.
	DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, 2.ed. 2004a.
	DUVAL, R. Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y de las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali: Universidad del Valle, 2.ed. 2004b.
	DUVAL, R. Transformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matemática. In: La matemática e la sua didattica. n.4, p.585-619, 2006a.
	DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: Educational Studies in Mathematics. n.61, p.103-131, 2006b.
	DUVAL, R. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
	DUVAL, R. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, ed. 1, 2011.
	DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. In: Revemat: Florianópolis, vol.7, n.1, p.118-138, 2012a.
	DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. In: Revemat: Florianópolis, vol.7, n.1, p.97-117, 2012b.
	DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. In: Revemat. Florianópolis, vol.7, n.2, p.266-297, 2012c.
	DUVAL, R. Comment analyser le probleme crucial de la comprehension des matematiques? In: Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, San Cristobal de La Laguna, n.37, p.9-29, 2014.
Luiz Carlos Pais	PAIS, L. C. A Representação dos Corpos Redondos no Ensino da Geometria. Revista Zetetiké, Campinas, 1994, n. 02, p. 13-23
	PAIS, L. C. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. Revista Zetetiké, Campinas, 1996, n. 06, p. 65-74.
	PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. ANPED, 23ª Reunião, Caxambu, 2000.
Bernard Parzysz	PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. In: Actes du 28 ème colloque COPIRELEM (Tours, juin 2001). p. 99-110. 2001.
	PARZYSZ, B. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il. Quaderni di Ricerca in Didattica, v. 17, p. 121-144, 2006.
Pierre van Hiele	VAN HIELE, P. M. El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria). (Tese de Doutorado em Matemática e Ciências Naturais). Tradução Rosa Corberán <i>et al.</i> , 1990. Universidade de Utrecht: Utrecht, Holanda, 1957.
	VAN-HIELE, P. M. Structure and Insight: a Theory of Mathematics Education. FL, USA: Academic Press Orlando, 1986.

	CROWLEY, M.L; O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST; M.M; SHULTE, A.P (orgs). Aprendendo e ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994, p. 1-20.
	PIRES, C. M. C., CURI, E., CAMPOS, T. M. M. Espaço e forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do ensino fundamental. São Paulo: PROEM, 2000.

Fonte: Elaborado pelas autoras

Identificamos, assim, a variedade de referências de Duval, isto é, os autores que se basearam em Pais, Parzys e van Hiele citaram, por vezes, os mesmos estudos.

Para além desses referenciais mais utilizados, encontramos outros com menor frequência. Sánchez (2020) argumenta a respeito de sistemas de representação semiótica na perspectiva da Teoria da Objetivação, de Luis Radford. A Teoria Antropológica do Didático é o principal referencial teórico de Almeida (2018). Já Brasil (2017), Cardoso (2018), Carvalho (2017), Dias (2012), Fonseca (2020) e Resende (2018) utilizaram estudiosos da área como Jean Piaget, Leme da Silva, Sérgio Lorenzato, Regina Pavanello e Richard Skemp para suas fundamentações. No *corpus* há dois trabalhos nos quais não identificamos referenciais específicos para o ensino de geometria.

Na sequência, buscaremos estabelecer possíveis articulações entre o uso de representações de figuras para o ensino de geometria na formação inicial de PEM, os referenciais teóricos e as caracterizações identificados no *corpus*.

Discussões dos resultados

As análises evidenciaram que as representações de figuras geométricas são frequentes nas abordagens para o ensino de geometria na formação inicial de PEM. É preciso, no entanto, destacar tanto sua importância quanto os cuidados que devem ser tomados ao serem utilizadas tais representações (PEREIRA, 2020).

As representações possuem limitações, especialmente se considerarmos apenas as características perceptivas (DUVAL, 1994). Daí a necessidade de não restringir o trabalho exclusivamente em um único registro, até porque “[...] não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação” (DUVAL, 2009, p. 14). Além disso, em um determinado problema pode ser útil alterar a forma na qual a informação é representada (BRASIL, 2018; PARZYSZ, 2001).

O uso específico de representações de figuras geométricas, contudo, não é algo recente no ensino de geometria. Brigo e Flores (2008) apontam uma tendência nas pesquisas em valorizar o uso de figuras e de diversos outros artefatos visuais. Trata-se, na realidade, de um

aspecto que não se restringe às pesquisas brasileiras. Jones *et al.* (2019) relatam que, no 11.º Congresso da Sociedade Europeia de Pesquisa em Educação Matemática, ocorrido em 2019, emergiram quatro focos das pesquisas em Ensino de Geometria e Formação de Professores: resolução de problemas; manipulação com ferramentas e desenhos; visualização; e prova.

Nos trabalhos que fazem parte do nosso primeiro agrupamento, cujo contexto foi, predominantemente, a formação inicial de PEM na Educação Infantil e Anos Iniciais, prevaleceram representações de figuras geométricas na forma de modelos, nesse caso, material manipulável. Identificamos abordagens que focam principalmente características perceptivas e exploração do espaço com a observação. Ou seja, as representações tiveram a finalidade de identificar conceitos ou propriedades de forma perceptiva (DUVAL, 1994).

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) destaca que, nos Anos Iniciais, o trabalho com a geometria deve ser iniciado com a manipulação de representações na forma de figuras geométricas, *softwares* ou dobraduras. Van Hiele (1984) ressalta que, no trabalho inicial da geometria, cumpre evocar recursos visuais, além de, assim como Parzys (2006), compreender características geométricas do espaço físico.

Já os trabalhos do *corpus*, pertencentes ao segundo e terceiro agrupamentos, desenvolvidos em contextos de formação inicial de professores de Matemática para os Anos Finais e Ensino Médio, privilegiam as representações de figuras geométricas na busca de construir justificativas e argumentações e estabelecer conjecturas e estratégias para resolver problemas, verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações.

Julgamos pertinente o uso de diversas representações, especialmente figuras geométricas, para essa finalidade, na medida em que podem propiciar diferentes possibilidades para provas e argumentações. Segundo Pereira (2020), essa abordagem é significativa e deve considerar a escolha e a condução de tarefas, a avaliação da argumentação dos estudantes, a importância de exemplos, contraexemplos e de figuras geométricas em situações de prova.

É essencial, no entanto, o uso de representações para essa finalidade também com PEM na Educação Infantil ou nos Anos Iniciais. Esses profissionais precisam estar preparados para um enfoque argumentativo, pois é importante que os estudantes dessas etapas também “raciocinem e argumentem, ao mesmo tempo que desenvolvem e testam conjecturas sobre relações geométricas. Os alunos mais novos gostam de argumentar, só precisam é de ser ensinados a como argumentar eficazmente” (VALE; PIMENTEL, 2017, p. 46).

O dinamismo e as ferramentas de *softwares* estiveram presentes em abordagens tanto na formação inicial de PEM nos Anos Iniciais como nos Anos Finais ou Ensino Médio. Ainda que o GeoGebra tenha sido o mais utilizado, também evidenciamos o Poly 1.06 e o *Open Sim*.

A despeito de muitos comandos dos *softwares* serem automáticos, é preciso conhecer conceitos geométricos ao utilizá-los. Pereira (2020) ressalta a importância de, na formação inicial de professores de matemática, considerar o conhecimento do uso de *softwares* para ensinar geometria, sobretudo porque suas ferramentas e possibilidades dinâmicas podem auxiliar na visualização e em tarefas de argumentação e prova. No *corpus*, os *softwares* foram privilegiados em momentos de construção ou observação de relações e propriedades de figuras, validação de conjecturas e provas. Cremos que isso pode ter ocorrido devido às facilidades de interação nesses ambientes.

Representações de figuras geométricas também atuaram para resolver problemas e estabelecer conjecturas, provas e demonstrações em propostas que utilizaram lápis, papel, régua ou compasso. Duval (2012) afirma que algumas dificuldades dos estudantes podem ser oriundas do instrumento utilizado na construção e não das propriedades matemáticas. Embora a representação de conceitos em forma de desenhos, especialmente o desenho instrumentado, apresente dificuldades aos estudantes, essas construções exercem um importante papel na aprendizagem da geometria, sobretudo para solucionar problemas (PAIS, 1994).

Na análise do *corpus*, na busca de caracterizações para pensamento geométrico, observamos termos como “conhecimento geométrico”, “pensamento geométrico”, “raciocínio geométrico” e “saber geométrico”. Em muitos casos, esses termos são empregados de modo arbitrário, sem apresentar seus significados, e até mesmo como sinônimos, sem quaisquer esclarecimentos para o leitor. No entanto, há trabalhos que têm cuidado com o emprego desses termos e indicam aportes teóricos que sustentam sua utilização.

Por exemplo, Zanella (2018) descreve “conhecimento geométrico” como algo que envolve axiomas, definições, proposições, teoremas, discurso para explicar, conjecturar, argumentar e demonstrar. Dias (2012) e Vieira (2017) entendem “pensamento geométrico” como um modo de descobrir o mundo que nos circunda por meio da observação e da experimentação. Brasil (2017) utiliza “raciocínio geométrico” e “pensamento geométrico”, a nosso ver, como possíveis sinônimos, relacionando esses termos com a valorização da linguagem geométrica. Resende (2018) considera que “saber geométrico” envolve definições, conceitos geométricos e práticas pedagógicas, ou seja, leva em conta tanto conceitos científicos quanto experiências e práticas.

Desse modo, não foi possível identificar caracterizações explícitas para pensamento geométrico, mas apenas indícios a respeito da importância do desenvolvimento do pensamento geométrico.

Na busca por essas caracterizações, identificamos no *corpus* a prevalência de autores

como Duval e van Hiele. Essa prevalência também foi observada em outras revisões de literatura a respeito do ensino de geometria (BARRETO *et al.*, 2021; CARVALHO; FERREIRA, 2015; SHARMA, 2019; SINCLAIR *et al.*, 2016).

No *corpus*, van Hiele foi sempre articulado com outros autores. Referenciais que privilegiam diferentes níveis de pensamento geométrico, como Bernard Parzysz e Pierre van Hiele, fundamentaram a verificação da possível eficácia dos empreendimentos propostos ou a classificação do pensamento geométrico dos futuros PEM em diferentes níveis. A teoria de van Hiele, todavia, é criticada por revelar uma visão limitada do papel da linguagem e considerar um ensino sequencial e linear (SHARMA, 2019; SWOBODA; VIGHI, 2016), sobretudo porque um estudante pode apresentar características de diferentes níveis a depender do conceito, o que dificulta a classificação em níveis específicos (SHARMA, 2019).

Duval esteve presente apenas nas abordagens que optaram por representações de figuras geométricas para verificar ou estudar propriedades geométricas, provas e demonstrações. Os trabalhos do *corpus* que consideraram exclusivamente Duval para falar de geometria, sem articulá-lo com outros autores, utilizaram o *software* GeoGebra (JANZEN, 2011; ZANELLA, 2018). O fato de essas pesquisas optarem por Duval e seu referencial teórico acerca de representações semióticas pode indicar preocupações com as diferentes formas de representação proporcionadas pelos *softwares*. Segundo Baldini (2014), as tecnologias digitais possuem características, como diferentes linguagens e formas de representação.

A seguir, apresentaremos algumas considerações no que diz respeito às abordagens de ensino de geometria na formação inicial de PEM, caracterizações de pensamento geométrico e referenciais teóricos para essa temática.

Considerações finais

A partir das análises do *corpus*, identificamos que todos os trabalhos utilizam representações de figuras geométricas no ensino de geometria na formação inicial de PEM. Poucos, contudo, focaram em potencialidades de operações nessas representações, como modificações de tamanho, posição ou partições. Assim, por vezes, representações de figuras geométricas estiveram articuladas à Aritmética, à Álgebra e a Medidas. Cumpre considerar o significado que diferentes representações de figuras geométricas possuem para além de “pontes” para os demais registros.

Representações de figuras geométricas foram utilizadas em situações-problema e para argumentar, verificar propriedades e estabelecer hipóteses e conjecturas em contextos de cursos

de Licenciatura em Matemática. Sendo assim, se faz necessário investigar essas finalidades, inclusive, na formação inicial de PEM na Educação Infantil e nos Anos Iniciais.

Ao analisarmos caracterizações para pensamento geométrico, verificamos uma crescente preocupação em estabelecer o que se entende por determinadas expressões e em justificar escolhas e referenciais. No entanto, ainda prevalece o uso arbitrário de termos, isto é, sem caracterizações ou, aparentemente, utilizados como sinônimos ou em sentidos de senso comum. Assumir mais explicitamente uma posição epistemológica a respeito do pensamento geométrico parece ser um caminho a ser trilhado nas pesquisas.

Em síntese, os autores do *corpus*, em cujas pesquisas identificamos caracterizações, descrevem *pensamento geométrico* como um modo de explorar e interpretar objetos geométricos, para resolver problemas e compreender o mundo. Já *raciocínio geométrico* foi relacionado com a linguagem própria da geometria, assim como *conhecimento geométrico*, ou seja, definições, descrições, argumentações e demonstrações. A expressão *saberes geométricos* foi utilizada no sentido de valorizar a cultura geométrica, isto é, considerando tanto definições e conceitos quanto práticas pedagógicas. Contudo, não encontramos discussões a respeito de possíveis particularidades que pudessem diferenciar ou articular *conhecimento, pensamento, raciocínio e saber geométricos*.

Quanto aos referenciais teóricos, Bernard Parzysz, Luis Carlos Pais, Pierre van Hiele e Raymond Duval foram os mais utilizados pelos autores do *corpus* para falar do ensino de geometria, predominando Duval e van Hiele. No entanto, outros como Luis Radford, utilizado no *corpus* por Sánchez (2020), se mostram como uma alternativa às investigações que envolvem representações semióticas, por exemplo. Além disso, a literatura destaca demais referenciais que têm sido propostos e utilizados em pesquisas para fundamentar aspectos do ensino de geometria, como os de Efraim Fischbein (SHARMA, 2019; SINCLAIR *et al.*, 2016), os de Alain Kuzniak (SINCLAIR *et al.*, 2016) e os de Cláudia Flores (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012).

A partir deste mapeamento, observamos que o ensino de geometria e o pensamento/raciocínio geométrico na formação inicial de PEM são temáticas ainda pouco investigadas em dissertações e teses brasileiras. Considerando que, de acordo com a análise do *corpus*, representações de figuras geométricas têm sido privilegiadas para ensinar geometria na formação inicial de PEM, ações de formações de PEM e pesquisas futuras que articulem abordagens visuais com caracterizações de pensamento geométrico podem ser um campo fértil no trabalho com a geometria na formação inicial de PEM.

Agradecimentos

As autoras agradem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela bolsa atribuída à primeira autora e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq pela bolsa de produtividade em pesquisa da segunda autora.

Referências

- ATASOY, E. Elementary Mathematics Teacher Candidates' Geometric Thinking Levels and Their Self- Efficacy in Geometry. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n.2, p. 161-170, 2019. Disponível em: <https://eric.ed.gov/?id=EJ1238611>. Acesso em: 14 jan. 2021.
- BALDINI, L. A. F. **Elementos de uma comunidade de prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de matemática na utilização do software Geogebra**. 2014. 220 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000193921>. Acesso em: 07 set. 2021.
- BARRETO, M. C. *et al.* Estado da arte em pesquisas acadêmicas brasileiras, de 2010 a 2019, sobre o ensino de geometria desenvolvidas no Nordeste. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 39, n. 1, p. 1-22, jan./mar. 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/view/71085>. Acesso em: 22 mar. 2021.
- BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018, 600p.
- BRIGO, J; FLORES, C. R. A Problemática do Uso da Figura no Ensino de Geometria: indicativos para uma pesquisa histórica. *In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, [S. l.], 12. **Anais [...]**. p. 1–13, 2008. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/124-1-A-gt5_brigo_ta.pdf. Acesso em: 03 ago. 2021.
- BRUNHEIRA, L. M. A. **O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos**. 2019. 242 f. Tese (Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/38922>. Acesso em: 27 out. 2020.
- CARVALHO, H. A. F.; FERREIRA, A. C. Visualização espacial e pensamento geométrico: um panorama da produção brasileira em programas de Pós-Graduação nos últimos anos. *In: Encontro Mineiro de Educação Matemática*, 7, 2015, São João Del Rei/MG. **Anais EMEM**, 2015.
- CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Early childhood teacher education: the case of geometry. **Journal Of Mathematics Teacher Education**, [s.l.], v. 14, n. 2, p. 133-148, 23 fev. 2011. Springer Science and Business Media LLC. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/226486133_Early_childhood_teacher_education_The_case_of_geometry. Acesso em: 14 out. 2020.

CLEMENTS, D. H. *et al.* Teaching and learning Geometry: early foundations. **Quadrante**, [s. l.], v. 17, n. 2, p. 7-31, 2018. Disponível em: <https://dreme.stanford.edu/publications/teaching-and-learning-geometry-early-foundations>. Acesso em: 22 ago. 2021.

COSTA, A. P. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S.L.], v. 9, n. 18, p. 152-179, 26 jun. 2020. Disponível em: <http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/651>. Acesso em: 04 set. 2020.

CRECCI, V. M.; NACARATO, A. M.; FIORENTINI, D. Estudos do estado da arte da pesquisa sobre o professor que ensina matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 25, n. 1, p. 1-6, 30 abr. 2017. Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8649175>. Acesso em: 02 out. 2020.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994. Disponível em: https://www.univ-irem.fr/reperes/articles/17_article_119.pdf. Acesso em: 29 jun. 2020.

DUVAL, R. Geometry from a Cognitive Point of View. *In*: MAMMANA, C.; VILLANI, (Orgs.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study**. Dordrecht: Kluwer, p. 37-52, 1998. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-94-011-5226-6.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2020.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *In*: HITT, F.; SANTOS, M. (Ed.). **Proceeding of the 21st Annual Meeting of the 228 North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Mexico, p. 3-26, oct., 1999. Disponível em : <https://eric.ed.gov/?id=ED466379>. Acesso em : 21 jun. 2021.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mérciles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p118>. Acesso em: 23 jun. 2021.

FERREIRA, A. B. H. **Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 5. ed. [S. l.]: Positivo, 2014.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012. (Coleção Formação de Professores).

FIORENTINI, D. *et al.* O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. *In*: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R.

d. (Org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática**: período 2001 - 2012. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/pf/subportais/biblioteca/fev-2017/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf>. Acesso em: 06 out. 2020.

FLORES, C. R.; WAGNER, D. R.; BURATTO, I. C. F. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/8008/6827>. Acesso em: 21 out. 2021.

GATTI, B. A. Formação inicial de professores para a educação básica: pesquisas e políticas educacionais. **Estudos em Avaliação Educacional**, v. 25, n. 57, p. 24-54, 2014. Disponível em: <http://publicacoes.fcc.org.br/index.php/eae/article/view/2823>. Acesso em: 26 dez. 2021.

GATTI, B. A. *et al.* **Professores do Brasil**: novos cenários de formação. Brasília, DF: Unesco, 2019. Disponível em: https://www.fcc.org.br/fcc/wp-content/uploads/2019/05/Livro_ProfessoresDoBrasil.pdf. Acesso em: 26 dez. 2021.

GINZBURG, C. **Mitos, emblemas, sinais**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

JONES, K., *et al.* Introduction to the papers of TWG04: Geometry Teaching and Learning. **Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/348650612_Introduction_to_the_papers_of_TWG04_geometry_teaching_and_learning. Acesso em: 02 set. 2021.

KUZNIAK, A.; NECHACHE, A. On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of mathematical working spaces. **Educational Studies in Mathematics**, [s.l.], v. 106, n. 2, p. 271-289, 4 jan. 2021. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/348205693_On_forms_of_geometric_work_a_study_with_pre-service_teachers_based_on_the_theory_of_Mathematical_Working_Spaces. Acesso em: 29 jan. 2021.

PAIS, L. C. A representação dos corpos redondos no ensino da geometria. **Zetetiké**, Campinas, v. 2, p. 13-23, 1994. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646922/13824>. Acesso em: 06 ago. 2021.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, v. 4, n. 2, 1996. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646739/13641>. Acesso em: 06 ago. 2021.

PAIVA, S. M. **A conceituação do pensamento geométrico**: aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no Brasil. 2021. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) - Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2021. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/213437>. Acesso em: 04 ago. 2021.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *In: Actes du 28 ème colloque COPIRELEM* (Tours, juin 2001). p. 99-110. 2001. Disponível em: <http://www.arpeme.fr/documents/27C678BC216956B50DB2.pdf>. Acesso em:

006 ago. 2021.

PARZYSZ, B. La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il. **Quaderni di Ricerca in Didattica**, v. 17, p. 121-144, 2006. Disponível em: http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/quad17_BParzysz_06.pdf. Acesso em: 06 ago. 2021.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da província brasileira. **Educação, Matemática, Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1147-1168, 2014. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/22016>. Acesso em: 26 jan. 2021.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, n. 1, p. 7-17, 1993. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822>. Acesso em: 26 jun. 2020.

PENTEADO, D. R.; PEREIRA, A. L.; BRANDT, C. F. Geometria no ensino fundamental: das exigências legais às práticas cotidianas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [s.l.], v. 8, n. 16, p. 48-81, 1 jul./dez. 2019. Disponível em: <http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/604>. Acesso em: 27 out. 2020.

PEREIRA, A. N. **Conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria na educação básica**. 2020. 233f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/36141>. Acesso em: 13 set. 2021.

ROLDÃO, M. C. N. Formação de professores e desenvolvimento profissional/Teacher education and professional development. **Revista de Educação PUC-Campinas**, v. 22, n. 2, p. 191-202, 2017. Disponível em: <https://seer.sis.puc-campinas.edu.br/reeducacao/article/view/3638>. Acesso em: 19 jan. 2021.

SANTOS, L.; OLIVEIRA, H. O ensino e a aprendizagem da geometria: Perspectivas Curriculares. In: Encontro de Investigação em Educação Matemática, 2017, Lisboa. **Atas[...]**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2017. p. 3-8. Disponível em: http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2017.pdf. Acesso em: 19 jan. 2021.

SANTOS, L. F.; TELES, R. A. M. Conhecimento dos professores sobre geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: um estado da arte. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [s.l.], v. 23, n. 1, p. 79-111, 11 abr. 2021. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/47093>. Acesso em: 26 abr. 2021.

SHARMA, S. Use of theories and models in geometry education research: a critical review. **Waikato Journal of Education**, [s.l.], v. 24, n. 1, p. 43-54, 13 maio 2019. University of Waikato. Disponível em: <https://wje.org.nz/index.php/WJE/article/view/644>. Acesso em: 27 out. 2020.

SINCLAIR, N. *et al.* Recent research on geometry education: an icme-13 survey team report. **ZDM**, [s.l.], v. 48, n. 5, p. 691-719, 28 jun. 2016. Springer Science and Business

Media LLC. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-016-0796-6>. Acesso em: 27 out. 2020.

SWOBODA, E.; VIGHI, P. Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries. **Icme-13 Topical Surveys**, Hamburg, v. 13, p. 1-50, 2016.

Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/309348301_Early_Geometrical_Thinking_in_the_Environment_of_Patterns_Mosaics_and_Isometries. Acesso em: 16 dez. 2020.

ULUSOY, F. Early-Years Prospective Teachers' Definitions, Examples and Non-Examples of Cylinder and Prism. **International Journal For Mathematics Teaching And Learning**, [s. l.], v. 20, n. 2, p. 149-169. 2019. Disponível em:

<https://www.cimt.org.uk/ijmtl/index.php/IJMTL/article/view/213/72>. Acesso em: 11 dez. 2021.

VALE, I.; PIMENTEL, T. O ensino e aprendizagem de Geometria. *In*: Encontro de Investigação em Educação Matemática, 2017, Lisboa. **Atas[...]**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2017. p. 43-48. Disponível em:

http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2017.pdf. Acesso em: 19 jan. 2021.

VAN HIELE, P. M. English summary. The problem of insight in connection with school children's insight into the subject matter of geometry. Doctoral dissertation, University of Utrecht, 1957. *In*: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Eds.). **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele**. Brooklyn: Brooklyn College, p. 237-241, 1984. Disponível em: <https://eric.ed.gov/?id=ED287697>. Acesso em: 06 ago. 2021.

Referências do *corpus* analisado neste estudo

ALMEIDA, G. S. **Uma (re) construção praxeológica no estudo de conteúdos da geometria com alunos da Licenciatura da Matemática**. 2018. 200 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro Do Sul, São Paulo, 2018.

Disponível em:

https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6125226. Acesso em: 15 maio 2020.

BRASIL, T. C. **O ensino da Geometria através de resolução de problemas**: Explorando possibilidades na formação inicial de professores de Matemática. 2017. 264p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017. Disponível em:

https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6303853. Acesso em: 15 maio 2020.

CARDOSO, F. P. **Contribuições de um curso de extensão em geometria para a formação matemática de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2018. 108 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2018. Disponível em:

https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6964153. Acesso em: 15 maio 2020.

CARVALHO, H. A. F. **Aprendendo a ensinar geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: um estudo com alunos de Pedagogia de uma universidade federal mineira. 2017. 192 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2017. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5402983. Acesso em: 15 maio 2020.

CICARINI, A. M. O. T. **Geometria plana e o grafismo indígena**: O estudo de suas relações no contexto histórico do grupo Tukano de alunos da Licenciatura Intercultural dos Povos Indígenas do Alto Rio Negro. 2015. 198 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3409401. Acesso em: 15 maio 2020.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em matemática**: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. 2009. 213 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11423>. Acesso em: 15 maio 2020.

DIAS, R. D. **A Construção do pensamento geométrico na formação inicial de professores da Educação Infantil**. 2012. 155 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática) - Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012. Disponível em: <https://docplayer.com.br/15438222-Universidade-severino-sombra-rodriigo-rodriques-dias-a-construcao-do-pensamento-geometrico-na-formacao-inicial-de-professores-da-educacao-infantil.html>. Acesso em: 15 maio 2020.

FONSECA, J. A. da. **Investigação de aspectos da compreensão relacional e da instrumental em geometria esférica**. 2020. 307f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria, 2020. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=9175309. Acesso em: 13 set. 2021.

JANZEN, E. A. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica**. 2011. 194f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/25747?show=full>. Acesso em: 15 maio 2020.

LIMA, M. L. S. **Um estudo sobre as provas e demonstrações na Licenciatura em Matemática**: articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff. 398 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=10511402. Acesso em: 13 set. 2021.

MOREIRA, M. D. D. **Revisitando Euclides para o ensino de áreas**: uma proposta para as licenciaturas. 2010. 165 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.



OLIVEIRA, C. A. **Estratégias didáticas nos processos de ensino e de aprendizagem em matemática no mundo digital virtual em 3D Open Sim**. 2015. 154 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal De Alagoas, Maceió, 2015. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2419982. Acesso em: 15 maio 2020.

OLIVEIRA, D. B. S. **A constituição de conhecimento colaborado em geometria das transformações com ferramentas dinâmicas**. 2017. 169 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal De Juiz De Fora, Juiz de Fora, 2017. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5215069. Acesso em: 15 maio 2020.

RESENDE, M. J. **Saberes geométricos para a formação de professores primários em Sergipe: uma investigação sobre o período de 1890 A 1944**. 2018. 86 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Fundação Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2018. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6320941. Acesso em: 15 maio 2020.

SÁNCHEZ, I. C. **Aprendizagem geométrica em torno das ideias presentes na simulação de um motor a dois tempos no GeoGebra: Um estudo de caso**. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2020. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=9934258. Acesso em: 13 set. 2021.

VIEIRA, N. S. O. **A formação matemática do pedagogo: reflexões sobre o ensino de geometria**. 2017. 113f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5279837. Acesso em: 15 maio 2020.

ZAMBON, A. E. C. **A geometria em cursos de pedagogia da região de Presidente Prudente - SP**. 2010. 237f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente, 2010. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/92306>. Acesso em: 15 maio 2020.

ZANELLA, I. A. **Diferentes representações na geometria euclidiana por meio do uso do geogebra: um estudo com futuros professores de matemática**. 2018. 229 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6310558. Acesso em: 15 maio 2020.

Recebido em: 17 de maio de 2022
Aprovado em: 15 de agosto de 2022