

RELAÇÕES PRAXEOLÓGICAS DO PROFESSOR E DO SEU LIVRO DIDÁTICO: IMPLICAÇÕES NA TRANSPOSIÇÃO DOS MÚLTIPLOS CONCEITOS DAS FRAÇÕES

DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.25.363-388>

Roberto Nogueira de Sousa Lopes¹
Edelweis José Tavares Barbosa²

Resumo: Este artigo é um recorte de pesquisa de mestrado cujo objetivo foi investigar a relação do professor ao saber a partir da análise das suas praxeologias e daquelas disponibilizadas no livro didático para ensinar frações. Os registros do trabalho docente foram realizados por meio de vídeo-gravação e entrevista semiestruturada. Fundamentamos esse estudo na Teoria Antropológica do Didático (TAD). Conforme os elementos pesquisados, a metodologia se constitui numa abordagem qualitativa, tipificada em exploratória e descritiva para o contexto do professor e bibliográfica em relação ao livro didático. Os resultados revelam que o professor alterou o currículo proposto. No conjunto praxeológico, o professor organizou rotineiramente os Tipos e subtipos de tarefas com suas técnicas de crescente complexidade. Verificou-se que o professor priorizou a algoritmização em detrimento da conceitualização, o que acarretou o não ensino de alguns significados importantes. O Tipo de tarefa T_2 com 27% das tarefas do livro didático e 33% das tarefas propostas pelo professor foi o modelo dominante para ambos. O professor utilizou quase que totalmente as técnicas propostas no livro didático.

Palavras-chave: Ensino de frações. Praxeologias do professor. Livro didático.

PRAXEOLOGICAL RELATIONSHIPS OF THE TEACHER AND HIS TEXTBOOK: IMPLICATIONS IN THE TRANSPOSITION OF MULTIPLE CONCEPTS OF FRACTIONS

Abstract: This study is a master's research clipping whose objective was to investigate the teacher's connection to the learning, from the analysis of his praxeology and of those available in the textbooks to teach fractions. The records of teaching work were carried out via semi-structured video recordings and interviews. We substantiated this study in the Anthropological Theory of Didactics (ATD). In accordance with the researched elements, the methodology constitutes a qualitative approach typified as explanatory and descriptive to the context of the teacher, and bibliographical related to the textbook. The outcomes reveal that the teacher has altered the proposed curriculum. In the praxeological context, the teacher routinely organized the types and subtypes of assignments with his complex increasing techniques. It was verified that the teacher has prioritized algorithmization to the detriment of conceptualization, which entailed the non-teaching of some important significances. The type of task T_2 with 27% of the tasks from the textbook and 33% from the assignments proposed by the teacher, was the dominant model for both. The teacher utilized almost all the techniques proposed in the textbook.

Keywords: Teaching fractions. Praxeology of the teacher. Textbook.

1 Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Campus Acadêmico do Agreste. Analista em Gestão Educacional da Secretaria de Educação de Pernambuco (SEE/PE)/Professor de Matemática do Colégio Adventista de Caruaru/PE. E-mail: rnogueira7@gmail.com – Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1809-7854>.

2 Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Professor Adjunto do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) - Campus Acadêmico do Agreste (Caruaru/PE). E-mail: edelweisb@yahoo.com.br – Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-6032-9367>.



Introdução

Dos conteúdos curriculares da Matemática, os números são uma das primeiras representações que os estudantes têm contato na educação básica, a maior parte dos conceitos e cálculos que presenciamos nas nossas escolas refere-se ao conhecimento e utilização dos números conforme a relação currículo/série que norteia o ensino dos naturais aos complexos.

Dentre esses conjuntos numéricos destacamos o conjunto dos números racionais, cuja abrangência da sua forma decimal é mais comum devido à grande utilização no meio social dos alunos. Desse conjunto, dedicamos atenção especial aos números fracionários ou simplesmente fração(ões), pois na nossa prática docente e em pesquisas correlatas percebemos que também essa representação exerce um papel fundamental para a Matemática e outras áreas do conhecimento e que, mesmo não tão participantes do cotidiano do aluno, juntamente com as demais representações do conjunto dos números racionais, contribuem para a estruturação e desenvolvimento de cálculos vistos em outros conteúdos matemáticos, tais como: “as noções de operações algébricas elementares, do inverso multiplicativo, da porcentagem, das operações na forma decimal e fracionária, da probabilidade, do infinito, da densidade, de linha numérica e de Limite” Powell (2018, 2019a, apud Scheffer e Powell 2020, p. 9).

Essa importância escolar e acadêmica requerida às frações ainda não reflete substanciais esforços que venham dirimir os obstáculos à sua aprendizagem, mesmo com o suporte dos objetos de aprendizagem³, uma fração ainda é vista pelo teor de abstração e complexidade que apresenta, pois são notórias as dificuldades no seu ensino. Essa problemática emerge a partir dos esforços da comunidade acadêmica em pontuar esse assunto como tema das suas pesquisas a título de Scheffer e Powell (2020) que investigaram a trajetória dos trabalhos acadêmicos (dissertações, teses e artigos) sobre o tema num período considerável (2013 a 2019). Outros estudos realizados por Kerslake (1986), Dante (1987), Santos (2005) e Bertoni (2009), evidenciam uma sequência de fatores geradores dos problemas que acarretam o ensino das frações, os quais vêm se estendendo por décadas sem soluções eficientes, apenas pontuais.

Um ponto importante de convergência desses estudos revela um ensino que prioriza a algoritmização em detrimento da conceituação. Conforme Dante (1987, p. 32-33), “há ainda

3 Braga e Menezes (2015, p. 14) “consideram como objetos de aprendizagem (OA), aqueles que podem interferir diretamente na aprendizagem”. No caso das frações temos os objetos manipuláveis, os recursos digitais, entre outros.

a prevalência de um ensino focado em métodos de memorização, repetição e fixação, desprovido os estudantes de práticas que lhes permitam exercitar o raciocínio, pensar por si próprios e experimentar as suas ideias”. No contraponto dessa realidade David e Fonseca (1997) reforçam que a importância do trabalho com números racionais e sua representação fracionária precisa priorizar um ensino que se preocupe com o aspecto conceitual.

Portanto, essa pesquisa buscou enfatizar a importância dessa multiplicidade conceitual característica das frações, partindo dos variados pontos de vista apresentados nos trabalhos de Behr *et al.* (1983), Kieren (1988), Ohlsson (1989), Nunes; Bryant (1997), Romanatto (1997), Catto (2000), Santos (2005) e Câmara dos Santos e Cavalcanti (2006), a partir dos quais julgamos importante que os alunos aprendam a lidar com essa abstração, interpretando e conceituando as frações enquanto *medida, razão, quociente, parte-todo, operador multiplicativo e porcentagem*, conceitos essenciais para uma aprendizagem significativa desse objeto matemático.

Essa variedade conceitual denotada pelas frações ao longo da sua trajetória enquanto objeto de ensino de grande teor abstrato tem levado os autores de livros didáticos a considerarem apenas tipos particulares de conceitos, sem levar em conta outros conceitos fundamentais. Nesse contexto, analisamos as intenções dos autores Souza e Pataro (2015) do Livro *Vontade de Saber Matemática do 6º ano*, obra analisada nesse estudo e as aulas do professor de matemática buscando *investigar a relação do professor ao saber a partir da análise das suas praxeologias e daquelas disponibilizadas no livro didático para ensinar frações*. Para alcançar esse fim, objetivamos identificar as organizações matemática e didática do conceito de fração no livro didático; verificar as organizações matemática e didática do conceito de fração a partir da prática do professor; confrontar as praxeologias do professor com aquelas apresentadas no livro didático.

Sobre a importância desse principal texto de referência e influenciador das decisões curriculares e didáticas do professor, Almouloud (2015, p. 12) pontua que “a análise de livros didáticos continua a ser a entrada principal para o questionamento ecológico ou antropológico”, enfoques da Teoria Antropológica do Didático (TAD a partir desse ponto), teoria que embasa esse estudo. Conforme Chevallard (1999), a TAD permite o estudo e a análise da ação humana inerente ao saber matemático, em seus vários contextos, considerando que toda a atividade matemática busca responder a um Tipo de tarefa proposto no conjunto das atividades humanas e instituições sociais. Sobre a sua importância para as pesquisas

acadêmicas, Santos (2020) analisou 105 pesquisas⁴ de Teses e Dissertações de Universidades de praticamente todo o Brasil, no período de 2005 a 2017, o que corresponde a 13 anos de pesquisas, sem falar nas pesquisas anteriores e posteriores ao período citado, que utilizaram a TAD como instrumento teórico e metodológico para análise das praxeologias matemática e didática conforme as relações estudadas no cenário de ensino e pesquisa.

A organização deste artigo se dá em duas seções. A primeira dá conta da metodologia e dos artifícios utilizados na coleta de dados, das discussões acerca da fundamentação teórica e das especificações pertinentes ao livro didático e ao trabalho do professor. A segunda discute os principais resultados e as considerações.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Concebida por Yves Chevallard como a extensão das ideias de transposição didática, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) insere a didática no campo da antropologia, ou seja, ela situa a atividade matemática e, por conseguinte, o seu estudo, no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais (CHEVALLARD, 1999).

Assim, a TAD requer inicialmente três conceitos primitivos: os *objetos* (O), as *pessoas* (X) e as *instituições* (I). Para Chevallard (1991), tudo é objeto, pessoas, instituições, ou seja, toda entidade material ou imaterial que exista ou venha a existir para um ou mais indivíduos, existência que dependerá do seu reconhecimento por, pelo menos, uma pessoa (X) ou por uma instituição (I), acarretando as relações: pessoal $R(X,O)$ e institucional $RI(O)$. Conforme Chevallard (1991) o conhecimento toma forma na TAD a partir da noção de relação.

A relação pessoal $R(X,O)$ ocorre em determinado período da vida da pessoa (X), acarretando mudança de acordo com a sua relação com o objeto (O), enquanto que o indivíduo permanece invariável. Nesse processo das relações $R(X,O)$, o “passaporte” para que um indivíduo se torne sujeito de uma dada instituição (I) implica assumir certa posição na mesma, fato que o torna submisso às normas e vontades que regem a referida instituição. Dessa forma, para Chevallard (1991), o sujeito é o resultado das várias submissões às instituições, das quais participou ao longo da vida.

As práticas que envolvem o objeto (O) definem as relações $RI(O)$, ou seja, a relação institucional a O em I). Sobre isso, Bosch; Chevallard (1999) conduzem à ideia de que a sua construção se dá a partir das práticas sociais realizadas nas instituições, colocando em “jogo”

4 Ver quadro-resumo em Santos (2020, p. 60 a 62). Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br>.

o objeto (O) considerado (disponibilizando-o para se relacionar), para isso, leva-se em conta a forma como esse objeto (O) é utilizado pelas instituições. Essa utilização, ou seja, a relação $R(I,O)$ interfere diretamente na relação da pessoa (X) com o objeto do saber (O). Para Chevallard (1999), no momento em que uma pessoa (X) entra numa instituição (I), se estabelece uma relação pessoal com o objeto do saber (O) existente em (I), caso (O) ainda não exista para (X). Em situação contrária, essa relação não é estabelecida, mas modificada.

Nas duas perspectivas, a relação entre $R(X,O)$ ocorre sob a dependência da relação $RI(O)$. Para Chevallard (1999) a aprendizagem ocorre quando a relação $R(X,O)$ se altera, significando que (X) assimilou as características, os conceitos e as práticas sobre o objeto de ensino (O), processo que ocorre quando a relação $R(X,O)$ demanda da instituição (I) uma atitude intencional a fim de que, modificada a citada relação, se construa o que Chevallard (1999) chama de *sujeito adequado*. Por sua vez, esse *sujeito adequado* é resultado das ações institucionais, ou seja, uma concordância mútua entre as relações $R(X, O)$ e $R(I, O)$, em que (X) aceita as regras e normatizações que regem (I). Na situação inversa, o sujeito é considerado *não adequado* à instituição. Para Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015), essa *inadequação* fere o contrato institucional. Esse processo em que as práticas institucionais (suas intencionalidades), focam na conformidade ou não do sujeito, configura-se em avaliação institucional.

Os avanços ou fracassos obtidos dessa relação pessoal decorrem da forma de como as instituições lidam com as suas aprendizagens acerca dos objetos de estudo que elas detêm. Para tal, Chevallard (1999) acrescenta que a TAD também se apresenta como uma ferramenta com a qual se pode identificar, descrever e analisar as formas e procedimentos das práticas institucionais a partir da noção de *praxeologia* para identificar elementos que indicam a prática docente, ou seja, “como o professor dá conta de preparar suas aulas e coloca elas em prática no cenário didático” (CÂMARA DOS SANTOS; BESSA DE MENEZES, 2015, p. 655).

Ensaio introdutório para as praxeologias

Para Chevallard (2007), o conhecimento não é homogêneo, absoluto ou mesmo inquestionável, ele configura-se em mudança da realidade que, adaptada ao seu habitat⁵

5 Lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto do saber. (Chevallard, 1994).

institucional, ocupa o seu *nicho*⁶. Essa adaptação às instituições ocorre pelas vias da atividade humana. Essas dadas características “relativizam” o conhecimento fazendo-o questionável, subjetivo, passível de adequação e (re)construção.

Segundo Matheron (2000, p. 52), essa dimensão ecológica nos permite questionar: “como é ensinado um objeto identificado num livro didático? Que tipo de exercícios (tarefas) a realizar e com que tipo de técnicas disponíveis (ou não)? Qual é a organização matemática, e por consequência, que tipo de progressão considerar?”.

Organizações Praxeológicas

Os questionamentos anteriores, direcionados ao campo da Didática da Matemática e focados na prática docente, são desvelados nas concepções da TAD como sendo a realização de certo tipo de tarefa (T) expressa por uma forma verbal imperativa ou infinitiva, por meio de um modo específico de fazer com o uso de uma técnica (τ). (CHEVALLARD, 1999).

É a associação tarefa-técnica $[T, \tau]$ que definirá um saber-fazer (a práxis) específico para cada tipo de tarefa (T), associação esta que tem a necessidade de ser compreendida e validada por uma tecnologia (θ) e que por sua vez necessita ser fundamentada por uma teoria (Θ). Da conexão desses dois outros elementos praxeológicos surge uma segunda associação representada pelo par tecnologia-teoria $[\theta, \Theta]$ e que, segundo o autor, corresponde ao saber, a razão (o logos).

Sobre as especificidades demandadas pelos elementos praxeológicos, a saber: tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ), a fim de atender às necessidades ecológicas, Chevallard (1999) distingue e nomeia praxeologia nas quatro categorias apresentadas a seguir, conforme suas definições e associações: *praxeologia pontual* $[T, \tau, \theta, \Theta]$, *praxeologia local* $[Ti, \tau_i, \theta, \Theta]$, *praxeologia regional* $[Tij, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ e *praxeologia global* $[Tijk, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta k]$.

As mudanças sequenciais que ocorrem entre as praxeologias colocam alguns elementos em evidência, ou seja, de uma *praxeologia pontual* $[T, \tau, \theta, \Theta]$ para uma *praxeologia local* $[Ti, \tau_i, \theta, \Theta]$, evidencia-se a tecnologia θ . Assim como de uma *praxeologia regional* $[Tij, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ para uma *praxeologia global* $[Tijk, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta k]$, a evidência recai sobre a teoria Θ .

⁶ Lugar funcional ocupado pelo objeto do saber no sistema ou praxeologia dos objetos com os quais interage. (Chevallard, 1994).

Essa estrutura praxeológica nos remete ao cerne das práticas relativas aos saberes matemáticos, realizadas em uma dada instituição (I) e correspondentes a dois tipos: a realidade matemática a ser construída, cujos indícios constam no livro didático, nos programas de ensino, entre outros, falamos da Organização Matemática (OM); e, a forma como ocorre essa construção, formalizada na prática do professor, sua Organização Didática (OD). Chevallard (2002) define as relações entre as Organizações Matemática e Didática como *fenômeno de codeterminação*.

Segundo Chevallard (1999 apud Barbosa, 2011, p. 69), “a construção da praxeologia se inicia em uma falta de técnica para a resolução de um determinado tipo de tarefa”. Observemos a exemplificação desse contexto com a seguinte pergunta em Lopes (2020, p. 57): “*Como somar frações com denominadores diferentes?*” Para essa indagação, a versão para uma Organização Didática significa dar resposta à outra pergunta em Lopes (2020, p. 58): “*Como realizar o ensino da resolução da soma de frações com denominadores diferentes?*”.

Qualquer que seja o caminho considerado para a trajetória dos trabalhos de estudo de uma certa organização matemática, alguns elementos situacionais sempre aparecem, mesmo que estes se apresentem em formatos diversificados (BATISTA, 2019). A TAD classifica esses momentos situacionais como *momentos de estudo* ou *momentos didáticos*, os quais, sempre direcionarão as práticas para momentos de institucionalização, avaliação, entre outros. São eles:

O *Primeiro Momento* é o primeiro *encontro* com a organização matemática (OM), ou seja, ela passa a existir para o aluno ao ser disponibilizada no cenário didático (sala de aula). Essa existência pode ser inédita ou não, caso o aluno já a conheça, será então um reencontro. Há várias formas desses (re)encontros ocorrerem, contudo, uma delas atenderá emergencialmente, a um grupo de problemas referentes a no mínimo um tipo de tarefas T que a constitui. O *Segundo Momento* corresponde à *exploração* de um tipo de tarefa T e a *elaboração* de uma técnica τ relativa a T. Segundo Chevallard (1999), a elaboração de técnicas é o coração da atividade matemática. O *terceiro momento* materializa-se na constituição do bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$, relativo à técnica τ . Esse momento não é isolado dos outros citados anteriormente (1º e 2º), existe uma inter-relação estreita com cada um dos outros momentos, pois quando uma determinada técnica τ é escolhida e elaborada, ela passa a ser explicada e justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$. O *quarto momento* refere-se ao trabalho da técnica (τ), que visa aperfeiçoá-la, fazendo-a mais confiável, aumentando

assim o seu domínio, ação que geralmente requer o aprimoramento da tecnologia (θ) em questão. O *quinto momento* é o da institucionalização, que classifica e oficializa os elementos que de fato foram escolhidos para integrar à Organização Matemática (OM) e o descarte daqueles não requisitados à sua construção. O *sexto momento* é o de avaliação das relações pessoais $R(X,O)$ e das relações institucionais $RI(O)$ tomando como enfoque o objeto de estudo matemático O . O momento de avaliação na TAD constitui uma etapa de bastante importância, pois normalmente, é o momento em que o professor assume como sendo objeto de estudo as soluções elaboradas pelos seus alunos. O *sexto momento* é aquele da avaliação que se articula com o momento da institucionalização. Essa avaliação compreende os aspectos das relações pessoais $R(X,O)$ e institucionais $RI(O)$ com relação ao objeto de estudo O . “O momento de avaliação na TAD constitui uma etapa de bastante importância, pois normalmente, é o momento em que o professor assume, como sendo objeto de estudo, as soluções elaboradas por seus alunos.”. (BATISTA, 2020, p. 157).

Cenário de outras pesquisas correlatas

Sobre algumas pesquisas correlatas Santos (2010), investigou a noção de fração a partir do significado parte-todo utilizando uma sequência didática. Seus resultados apontaram indícios da participação do livro didático na não aprendizagem dos alunos. Castro (2014) investigou as contribuições da compreensão de fração com significado de medida no contexto de quantidades intensivas no 5º ano do ensino fundamental. Os seus resultados mostraram que esse significado foi muito relevante na aprendizagem de fração pelos alunos.

Bittar (2017, p. 365) reforça que “[...] se queremos compreender algumas das razões de dificuldades de aprendizagem enfrentadas por alunos, o livro didático utilizado por eles é uma das fontes a serem consultadas”.

Kichow (2009), investigou a descrição e análise da implementação de procedimentos didáticos a partir do estudo dos números racionais para alunos do sexto e sétimo anos do ensino fundamental, tomando como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático. Dentre os resultados obtidos, observou que as técnicas são valorizadas a partir de práticas efetivas na sala de aula, atribuindo esse fator a vivência do professor no período que era aluno na educação básica.

O professor, as frações e o livro didático no cenário da sala de aula

A sala de aula é um laboratório de experimentos didáticos, de formas de fazer e

também de ser, em que se constroem as relações que qualificam (se bem-sucedidas) ou não o ensino ali construído. Na sala de aula estão imersos os participantes diretos do sistema didático,⁷ responsáveis por transpor internamente o conhecimento frações.

Neste *locus* de experimentação, replicação e (re)construção de técnicas, o professor de matemática precisa de certa perícia para trabalhar com o sentido abstrato e intuitivo que envolve os números fracionários e suas aplicações, necessitando, muitas vezes, superar as possíveis limitações do seu livro didático. Para Wu (1998) o ensino de frações é um assunto delicado, [...] apresentando alto nível de abstração conceitual envolvendo classes de equivalência, diferentes significados e múltiplas representações.

Diante disso, a relação do professor ao saber, balizadora desse estudo, requer do professor o desenvolvimento de competências para superar as limitações próprias dos livros, que por seu caráter genérico, por vezes, não podem contextualizar os saberes como não podem ter exercícios específicos para atender todas as problemáticas locais (NUÑEZ *et al*, 2003, p. 3). É tendencioso que as intenções do(s) autor(es) do livro didático para um dado objeto de ensino influenciem as decisões curriculares, didáticas e técnicas do professor. Nesse contexto, o livro didático pode ser um termômetro do trabalho docente, em que sua análise poderá revelar determinadas particularidades do processo de ensino, neste caso, das frações.

Para Wu (2009), a compreensão de fração é o passo crítico na compreensão de números racionais porque as frações constituem a primeira introdução à abstração. Elas ocupam lugar de destaque no rol dos conteúdos matemáticos mais abstratos, consequência de duas características, a primeira se refere aos seus múltiplos conceitos, estes matematicamente representados por uma mesma simbologia, mas com significados conceituais totalmente diferentes, o que costuma ser um obstáculo na aprendizagem para a maioria dos alunos. A segunda característica considera que a sua simbologia desafia o professor, exigindo que sejam explorados certos artifícios didáticos e técnicas possíveis para uma transposição que permita aos alunos a formulação dos conceitos e sua aplicação nos problemas propostos nos livros didáticos. Sobre isso, David e Fonseca (1997) atribuem significância ao trabalho com os números racionais, cuja atenção especial precisa estar voltada para o ensino da representação fracionária considerando o seu aspecto conceitual.

Essas indagações nos dizem que o sentido de transformação no contexto da transposição do saber é mais profundo devido às ações que atuam nesse processo, caso não aconteça, não passará de uma simples replicação de formas pedagógicas e métodos falíveis de

7 Em referência ao sistema didático professor/aluno/saber, proposto por Brousseau (1996a), Chevallard (1999) propõe, nos moldes da TAD, o triângulo didático *sujeito/instituição/saber*.

ensino. Com as frações não é diferente, o mais comum de se encontrar são as mesmas propostas de sempre, que segundo Bertoni (2009, p. 16), “começam informando às crianças sobre nomes e símbolos de frações, apresentando quadrados, retângulos ou círculos divididos e parcialmente pintados”.

Como parte fundamental dessas ações, destacamos a necessidade de um aprofundamento didático-pedagógico do professor, que em muitos casos, vai além dos conhecimentos adquiridos nas suas formações, precisa ser uma ação deliberada por ele no sentido do aperfeiçoamento da sua docência. Isso permite que o professor lide com o objeto de ensino no nível de especialista da sua prática, esse momento é libertador, pois condiciona aos estudantes a participação efetiva na construção do saber transposto.

Considerando as premissas do fazer pedagógico do professor, o contexto de como as frações são ensinadas e a construção dos conceitos por esses agentes na sala de aula, Vygotsky (1999, p. 104) endossa que a formação de conceitos é o resultado de uma atividade complexa, em que todas as funções intelectuais básicas (atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar) tomam parte.

Assim, guiados pelos variados pontos de vista apresentados nos trabalhos já citados, julgamos importante que os alunos aprendam a lidar com a abstração, interpretando e conceituando as frações enquanto: *medida, razão, quociente, parte de um todo, operador multiplicativo e porcentagem*. Conceitos essenciais para uma eficiente aprendizagem das frações.

O livro didático, texto do saber ou manual de instruções do professor, seja qual for a sua nomeação, exerce um papel relevante no processo de transposição do saber, pois segundo Chevallard (1991), o conhecimento matemático é construído conforme as mediações estabelecidas em sala de aula pelo professor, apoiado no texto do saber. No cerne dessa afirmação, interessa-nos também analisar as praxeologias matemáticas fundamentadas nos Tipos e subtipos de tarefa referentes ao conceito e aplicabilidade das *frações* apresentadas no livro didático, reveladoras das intenções dos autores.

Segundo Chevallard (1999), o livro didático determina em grande parte a opção do professor com relação ao tipo de conteúdo a ser desenvolvido na sala de aula. Acreditamos que essa influência é determinante para fazer com que os significados fracionários não sejam transpostos na sala de aula de forma significativa, pois quando não fazem parte do currículo do livro escolhido, não são complementados pelo professor e quando compõem esse currículo, são ensinados de forma simplória. Sobre isso, Barbosa (2017, p. 25), diz que “o livro didático exerce grande influência sobre a atuação do professor em sala de aula, pois no

contexto brasileiro, ele se torna uma das únicas ferramentas disponíveis para o trabalho docente”.

No contexto da TAD, Bittar (2017) reforça que “a análise de LD pode trazer muitas outras contribuições para as pesquisas em didática” (p. 366). Dentro dessa perspectiva, Chaachoua e Comiti (2010, *apud* Bittar, 2017, p. 366) “evidenciam o aporte da análise de livros didáticos para apreender (e compreender) relações institucionais de um objeto em uma determinada organização matemática”.

Partindo desse contexto de análise nos moldes da TAD, os autores referenciados no parágrafo anterior propõem que esses elementos caracterizadores do livro didático são: o momento da edição (publicação) do livro; a sua representatividade; a sua estrutura; a análise ecológica; e, a sua análise praxeológica. Considerando mais fortemente esse último, apresentamos aqui uma proposta de modelização (*a priori*) das praxeologias matemáticas pontuais que vigoram no contexto dos Tipos e subtipos de tarefas referentes aos conceitos e estrutura das frações apresentados no livro didático.

Instrumentos de pesquisa e procedimentos metodológicos

Como parte estruturante da pesquisa, registramos em vídeos as 38 aulas do professor (P) de matemática sobre o ensino de frações numa turma de sexto ano do ensino fundamental pertencente à Rede Municipal de Ensino da cidade de Caruaru/PE, resultando em 25 vídeo-gravações posteriormente transcritas. O professor (P) foi selecionado no universo de cinco docentes, segundo critérios preestabelecidos (solicitude em participar, licenciatura em matemática, tempo mínimo de docência de três anos e que lecionasse em turma de sexto ano).

Para complementar essas informações, utilizamos uma entrevista semiestruturada composta por três blocos: no bloco I buscamos respostas sobre as formações do professor e as contribuições destas para sua prática; no bloco II indagamos sobre a relação do professor ao saber (frações e seus significados), sua proficiência e/ou dificuldades ao lecionar frações, quais significados não foram abordados nas suas aulas, qual sequência didática é mais utilizada e seu ponto de vista acerca da importância do ensino de frações para o currículo de matemática e para o contexto social; o bloco III respondeu aos questionamentos acerca do livro didático analisado (Vontade de Saber Matemática), sua participação na adoção, como o qualifica, se utiliza nas suas aulas, se atendeu às suas expectativas.

Conforme os elementos pesquisados, a metodologia se constitui numa abordagem qualitativa, tipificada em exploratória e descritiva para o contexto do professor. “As pesquisas

descritivas são, juntamente com as exploratórias, as que habitualmente realizam os pesquisadores sociais preocupados com a atuação prática” (GIL, 2008, p. 28). No contexto do livro didático, essa pesquisa se caracteriza em bibliográfica. “A pesquisa bibliográfica é uma modalidade de estudo e análise de documentos de domínio científicos tais como livros, enciclopédias, periódicos, ensaios críticos, dicionários e artigos científicos” (OLIVEIRA, 2016, p. 69). A outra parte estruturante da pesquisa correspondeu à análise e categorização do livro didático, como vemos a seguir.

Análise e categorização do livro didático

Utilizamos a categorização do livro didático Lopes (pp. 12-13), consubstanciada em seus Tipos, subtipos de tarefas e suas técnicas para servir de comparativo com aquelas vindas das aulas do professor e, assim, observarmos as possíveis aproximações, afastamentos, supressões ou complementos deste professor ao currículo, bem como o percentual de replicação de técnicas ou mesmo criação de novas técnicas, ocorridos no universo da sala de aula.

Organizamos essa categorização que serviu de norte para as comparações entre as análises, identificando os elementos categóricos como: Tipos de tarefa (T), subtipos de tarefa (t) e as técnicas (τ), explícitas e manipuladas pelos autores do livro didático. Vamos a ela:

$T_{1(EFM)} \rightarrow$ *Escrever a forma mista de uma fração:*

τ_{DPF} (pictórica/auxiliar) \rightarrow *Desenhar e pintar figuras (registro figural) para representar o número misto $2\frac{1}{4}$ (registro numérico).* / τ_{DND} (implícita) \rightarrow *Dividir o numerador pelo denominador obtendo dois inteiros (quociente) e um quarto fracionário (sobreposição do resto com o divisor). $\frac{9}{4} = 2$ com resto igual a 1 $\rightarrow 2\frac{1}{4}$.*

$T_{2(DFE)} \rightarrow$ *Determinar frações equivalentes:*

$t_{2.1(CFE)} \rightarrow$ *Calcular frações equivalentes.*

$\tau_{MDND} \rightarrow$ *Multiplicar ou dividir numerador e denominador da fração por um mesmo número natural para obter frações equivalentes.* / τ_{DPF} (pictórica/auxiliar) \rightarrow *Desenhar e pintar figuras para representar as frações equivalentes obtidas e comparar as partes pintadas.*

$t_{2.2(CFI)} \rightarrow$ *Calcular a forma irredutível de uma fração.*

$\tau_{DND} \rightarrow$ *Dividir sucessivamente numerador e denominador da fração por números naturais convenientes para obter frações equivalentes até chegar à forma irredutível.*

$T_{3(SSF_DI)} \rightarrow$ Somar ou subtrair frações com denominadores iguais:

$\tau_{SN(RD)} \rightarrow$ Somar ou subtrair os numeradores e repetir o denominador comum. /

$\tau_{DPF(pictórica/auxiliar)} \rightarrow$ Desenhar e pintar figuras para representar a soma das frações e observar as partes pintadas.

$T_{4(SSF_DD)} \rightarrow$ Somar ou subtrair frações com denominadores diferentes:

$t_{4.1(SSF_PE)} \rightarrow$ Somar ou subtrair frações com denominadores diferentes utilizando o princípio da equivalência.

$\tau_{MDND_SN(RD)} \rightarrow$ Multiplicar e dividir numerador e denominador das duas frações por números naturais convenientes para obter frações equivalentes, com denominadores iguais; / Somar os numeradores e repetir o denominador comum.

$t_{4.2(SSF_MMC)} \rightarrow$ Somar ou subtrair frações com denominadores diferentes utilizando o artifício do m.m.c.

$\tau_{FDF_D(MMC)_SN(RD)} \rightarrow$ Fatorar os denominadores das frações para calcular o m.m.c. entre eles. / Dividir o m.m.c. pelo denominador inicial de cada fração e multiplicar o resultado por seu respectivo numerador; / Somar e/ou subtrair os numeradores das frações e repetir o denominador comum.

$T_{5(APF)} \rightarrow$ Aplicar o produto às frações:

$t_{5.1(CFN)} \rightarrow$ Calcular a fração de um número ou quantidade.

$\tau_{MNO_DPD} \rightarrow$ Multiplicar o numerador da fração pela quantidade numérica e o denominador desta pelo número 1 (divisor implícito sob a quantidade numérica); / Dividir o resultado do produto pelo denominador para obter o valor correspondente à fração dada.

$t_{5.2(CFF)} \rightarrow$ Calcular a fração de outra fração.

$\tau_{DPF(pictórica/auxiliar)} \rightarrow$ Desenhar e pintar figuras para representar o produto das frações obtidas e observar as partes pintadas. / $\tau_{M(NsDs)_DPD} \rightarrow$ Multiplicar os numeradores entre si e os denominadores entre si; / Dividir os resultados dos produtos pelo denominador para obter o valor correspondente à fração dada.

$T_{6(CPQV)} \rightarrow$ Calcular a porcentagem de uma quantidade ou valor.

$\tau_{MDND_ENP} \rightarrow$ Multiplicar ou dividir numerador e denominador da fração por número natural conveniente para originar a fração centesimal equivalente à fração dada; / Escrever o numerador da fração centesimal seguido do sinal de porcentagem, fazendo uma conversão de registros.

Principais resultados

Neste tópico apresentamos as análises dos principais resultados sobre as organizações matemáticas e didáticas verificadas no livro didático *Vontade de Saber Matemática* (SOUZA; PATARO, 2015) e nas aulas do professor, principalmente, no que se refere aos conceitos de frações.

Na categorização acima, identificamos e nomeamos nove Tipos e Subtipos de tarefas (*T e t*) e nove técnicas (\mathcal{T}_{DPF} (*pictórica/auxiliar*); \mathcal{T}_{DNPD} (*implícita*); \mathcal{T}_{MDND} ; \mathcal{T}_{DND} ; $\mathcal{T}_{SN(RD)}$; $\mathcal{T}_{MDND_SN(RD)}$; $\mathcal{T}_{FDF_D(MMC)_SN(RD)}$; \mathcal{T}_{MNQ_DPD} ; \mathcal{T}_{MDND_ENP}). Dentre as quais algumas se tornaram mistas para atender aos objetivos propostos pelos Tipos e Subtipos de tarefas.

Na análise do material transcrito das aulas sobre frações, percebeu-se que o professor realizou 7 blocos de atividades dos quais 6 foram originados do seu livro didático e 1 foi originado de outro material de apoio, o livro *Matemática na Medida Certa* (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015, p. 185-186) do 6º ano, pois correspondia ao assunto divisão de frações não abordado no livro *Vontade de Saber Matemática* (SOUZA; PATARO, 2015). No lugar de divisão de frações, os autores optaram por abordar porcentagem.

Cada bloco foi proposto no final de cada assunto lecionado, totalizando 84 questões destinadas aos exercícios de classe e casa, em que uns eram resolvidos em sala pelo professor e os demais eram propostos para casa, com correção agendada para a aula seguinte. Das 84 questões, selecionamos 43 para compor os Tipos, subtipos de tarefas e suas técnicas devidamente justificadas. Usamos como critério, serem atividades cujo verbo em destaque nas descrições dos Tipos e subtipos de tarefas (categorização), exprime uma ação, pois na concepção de Chevallard (2006), uma estrutura de ação constitui, no centro das organizações matemáticas, um tipo de tarefa inerente às atividades humanas.

Na tabela 1 a seguir dispomos dos Tipos e subtipos de tarefas observados nas aulas do professor e os conceitos abordados e identificamos quantitativamente e percentualmente.

Tabela 1: As Tarefas e os tipos de tarefas sobre frações nas aulas do professor (P)

Tipos e subtipos de tarefas		Significado	Quantidade	Percentual
T ₁		Parte-todo	6	11
T ₂	t _{2.1}	Parte-todo	22	26
	t _{2.2}	Parte-todo	11	13
T ₃		Parte-todo	5	9
T ₄	t _{4.1}	Parte-todo	-	5
	t _{4.2}	Parte-todo	11	9
T ₅	t _{5.1}	Fração de quantidade discreta	19	11
	t _{5.2}	Fração de fração	9	7
T ₆		Porcentagem	-	-

T ₇	Divisão	4	8
----------------	---------	---	---

Fonte: Lopes (2019)

Verificamos que, mesmo citados no livro didático, os significados razão e quociente não foram atendidos nos exercícios propostos. O significado parte-todo dominou percentualmente em abrangência, fato observado nos dados da tabela 1. Outro problema detectado repercute na ausência dos demais significados. Chamamos a atenção para o significado de fração enquanto medida, significado esse que originou as primeiras frações, pois os povos da antiguidade fizeram os primeiros rabiscos de uma fração pela necessidade de medir em algumas situações do seu cotidiano.

Outrossim, observamos que o significado de fração como porcentagem, de grande importância curricular e social, poderia ter sido contemplado pelo professor sem necessariamente deixar de introduzir o conceito de divisão de frações. Sobre isso, o professor responde em trecho da entrevista com o mesmo (quadro 1).

Quadro 1: Recorte da fala do professor (P) sobre a alteração no currículo de Matemática (Porcentagem por Divisão de frações).

<p>Pergunta do Bloco III – nº 13.1</p> <p>13.1. Com relação ao ensino de frações, você pode relatar alguma(s) alteração(ões) realizada(s)?</p> <p>R_{13.1}: <i>Sim. Por exemplo, no livro 'Vontade de Saber', utilizado na rede, eu preferi dar para os alunos na conclusão do assunto, divisão de frações que o livro não aborda ao invés de porcentagem, isso porque porcentagem com certeza, mais adiante em outras séries eles voltarão a estudar ou terão uma abordagem mais profunda nesse conteúdo, enquanto a divisão de fração que o livro não traz, eles não teriam uma abordagem tão específica quanto a série exige, no caso o 6º ano.</i></p>
--

Fonte: Lopes (2019).

Vejamos a seguir as organizações matemáticas pontuais observadas na aula do professor, elas e referem aos Tipos de tarefas, subtipos de tarefas, as técnicas utilizadas e as tecnologias caso sejam detectadas, ancorados na modelização *a priori* (quadro 1). As organizações matemáticas pontuais, reveladas no dia a dia da sala de aula do professor pelas vídeo-gravações e posteriormente suas transcrições nos possibilitaram ver as seguintes praxeologias matemáticas apresentadas no quadro abaixo.

Quadro 2: Organização matemática pontual do professor (P)

Tarefas e subtipos de tarefa	Técnicas utilizadas
<ul style="list-style-type: none"> Relacionar a fração com sua representação pictórica. 	<ul style="list-style-type: none"> Desenhar ou manipular objetos e escrever a parte considerada como numerador e o todo como denominador.
<ul style="list-style-type: none"> Estabelecer a relação entre a parte e o todo na sua forma $\frac{a}{b}$ e a equivalente a:b 	<ul style="list-style-type: none"> Escrever a forma fracionária e dividir o numerador pelo denominador.

para buscando saber a quantidade de partes que cabem no todo.	
<ul style="list-style-type: none"> • Escrever a forma mista de uma fração imprópria e vice-versa. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dividir o numerador pelo denominador, escrever o seu quociente como parte inteira, o resto como numerador e o divisor como denominador da fração. ▪ No processo inverso, repete-se o denominador da parte fracionária e o numerador compreende a multiplicação do denominador pelo inteiro e o resultado soma como o numerador.
<ul style="list-style-type: none"> • Obter frações equivalentes a uma fração dada. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Multiplicar ou dividir numerador e denominador por um mesmo número natural conveniente.
<ul style="list-style-type: none"> • Simplificar frações. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Utilizar a técnica de frações equivalentes com a divisão.
<ul style="list-style-type: none"> • Comparar duas ou mais frações. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Utilizar a técnica das frações equivalentes. ▪ Determinar o menor múltiplo comum (ou usar técnica auxiliar fatorando os denominadores), dividir o m.m.c. pelo denominador de cada fração e multiplicar o resultado por seu numerador respectivo, depois soma os numeradores e repete o denominador.
<ul style="list-style-type: none"> • Somar ou subtrair frações. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Utilizar a técnica das frações equivalentes. ▪ Determinar o menor múltiplo comum (ou usar técnica auxiliar fatorando os denominadores), dividir o m.m.c. pelo denominador de cada fração e multiplicar o resultado por seu numerador respectivo, depois soma os numeradores e repete o denominador.
<ul style="list-style-type: none"> • Calcular a fração de um número ou de outra fração. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Multiplicar os numeradores entre si e os denominadores também entre si. Simplificar o resultado se possível (técnica complementar).
<ul style="list-style-type: none"> • Efetuar a divisão entre frações ou entre número e fração. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Inverter a segunda fração, multiplicar os numeradores entre si e os denominadores também entre si. Simplificar o resultado se possível (técnica complementar).

Fonte: Lopes (2019).

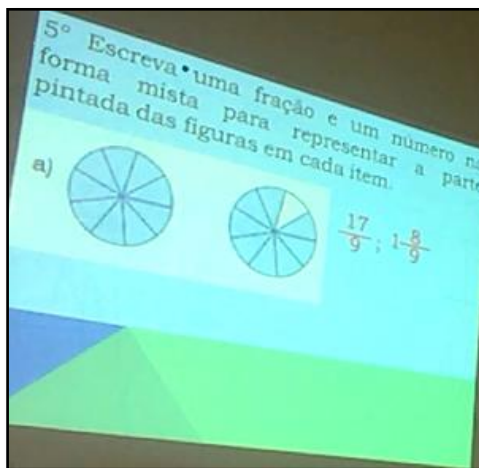
As informações dispostas no quadro no revelam que a praxeologia matemática do professor atendeu a oito subtipos de tarefa referentes ao ensino de frações no 6º ano do ensino fundamental.

O professor fez opção por três das técnicas utilizadas: Multiplicar ou dividir numerador e denominador por um mesmo número natural conveniente; determinar o menor múltiplo comum (ou usar técnica auxiliar fatorando os denominadores), dividir o m.m.c. pelo denominador de cada fração e multiplicar o resultado por seu numerador respectivo, depois soma os numeradores e repete o denominador; e, multiplicar os numeradores entre si e os denominadores também entre si. Simplificar o resultado se possível (técnica complementar).

Registramos o primeiro cálculo com frações no 4º encontro (filmagem da aula) no qual o professor anunciou a Tarefa: *Escrever a forma mista de uma fração imprópria e vice-versa.*

A aula foi sequenciada tendo como aporte o livro do professor, Vontade de Saber Matemática do qual temos o fragmento da figura.

Figura 1: Cálculo da forma mista de uma fração imprópria por meio da técnica τ_{DNPDP} .



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 133).

O recorte da aula do professor abaixo transcrito descreve e torna explícita a técnica utilizada por ele para calcular a forma mista de uma fração imprópria.

Quadro 3: Recorte 03, fala do professor (P) sobre forma mista.

Ação: O professor P faz a leitura com os alunos da seguinte projeção:

R_{TEC}: Projeção da seguinte definição de número misto: Número misto é um número escrito na forma da soma de sua parte inteira com a sua parte fracionária (esta é sempre uma fração própria). Os números mistos também podem ser escritos como frações não contáveis. Exemplo: $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. O quociente será o primeiro número, o resto será o novo numerador e o denominador permanente.

P: Oh! Vamos a um exemplo aqui de como eu coloco um número (pausa). Oh! A₄₄, você está aí com o seu inteiro dividido em quantas partes mesmo?

R_{TEC}: Projeção de etapas da escrita do número misto na lousa.

A₄₄: três!

P: Dividido em três partes, não é?

A₄₄: É!

P: A₄₄, retire por favor, uma parte qualquer aí. Só uma. De um desses inteiros. Ó! Você retirou uma parte aí não foi A₄₄? Você retirou uma parte de um dos inteiros. (...) Veja, o seu inteiro está dividido aí em quantas partes?

A₄₄: Três!

P: Em três partes. De três você retirou uma. Quantos inteiros havia restado?

A₄₄: dois!

P: Restaram dois inteiros não foi? Estão aqui A₄₄. Esses dois inteiros aqui são os canudos que você tem por completo aí. Agora veja só A₄₄, qualquer fração que você queira escrever para representar a forma mista que você tem, essa fração A₄₄, ela vai ter denominador quanto?

A₄₄: três!

P: Por que denominador três? O inteiro está dividido em?

A₄₄: Três!

P: Em três partes. Do inteiro A₄₄ que você retirou uma parte, quantas restaram?

A₄₄: duas!

P: Restaram duas não foi? Então quanto vai ser o numerador dessa fração? Olhe, veja se você compreendeu. Você tem aí dois inteiros dos canudos que estão com todas as suas partes completas e o outro inteiro que está dividido em três partes, você está considerando quantas dessas partes?

A4: Duas!

P: Duas partes. Então dois inteiros e dois terços, é o número que está representado na sua forma mista.

Legenda: Professor (P), Aluno (A_n) e Recurso tecnológico (R_{TEC}).

Fonte: Lopes (2019).

A seguir, mostraremos um comparativo entre as tarefas propostas pelos autores do livro didático Vontade de Saber Matemática, utilizado pelo professor para construir a sua praxeologia matemática e as tarefas efetivamente trabalhadas. Com isso, procuramos verificar aproximações ou distanciamentos entre as intenções dos autores e a prática docente nessa turma de 6º ano do Ensino Fundamental.

Tabela 2: Comparativo entre os Tipos de tarefas referentes ao ensino de frações pelo professor (P) e aquelas sugeridas no livro didático.

Tipos e subtipos de tarefas		Tarefas sugeridas no livro didático	%	Tarefas propostas pelo professor	%
T ₁		6	9	6	11
T ₂	t _{2.1}	12	18	12	22
	t _{2.2}	6	9	6	11
T ₃		5	8	5	9
T ₄	t _{4.1}	1	2	-	-
	t _{4.2}	6	9	6	11
T ₅	t _{5.1}	10	15	10	19
	t _{5.2}	5	8	5	9
T ₆		14	22	-	-
T ₇		-	-	4	8
Total		65	100	54	100

Fonte: Lopes (2019).

Em relação ao livro didático, a tabela revela a predominância do Tipo de tarefa T₂ correspondente aos seus subtipos t_{2.1} com 18% e t_{2.2} com 9%, que trata da equivalência entre frações, totalizando para o Tipo de tarefa T₂ uma abrangência de 27% na preferência dos autores. Em segunda opção ficou o tipo T₅, cujos subtipos alcançaram t_{5.1} com 15% e t_{5.2} com 8%, totalizando para esse grupo 23% constantes no livro didático. Por fim, o tipo T₆ que alcançou 22% da preferência dos autores.

Destacamos que essa opção dos autores sobre os Tipos de tarefa se configuraram também como os “Topos” do professor, frente a isso, percebemos na tabela, que a sua preferência esteve de acordo com as propostas do livro didático com certa ampliação para algumas, a exemplo do Tipo de tarefa T₂ com seus subtipos t_{2.1} (22%) e do t_{2.2} (11%) alcançando 33% das tarefas propostas. Em seguida o tipo T₅ cujos subtipos alcançaram t_{5.1} (19%) e do t_{5.2} (9%), totalizando 27% da preferência do professor, já o Tipo de tarefa T₆

(porcentagem) não integrou as opções do professor, cuja preferência recaiu sobre a T₇ (divisão de frações), como vimos na resposta do professor (quadro 1).

Destacamos que o livro didático *Vontade de Saber Matemática*, distribuído pelo PNLD (2017-2019) e adotado na escola pesquisada, não foi a opção do professor pesquisado, embora ele tenha utilizado a proposta do livro em suas aulas. O fragmento da entrevista relata essa situação, vamos a ele.

Quadro 4: Recorte da fala do professor (P) sobre a escolha do livro didático.

Pergunta do Bloco III – nº 10.3

10.3. Você optaria pelo livro didático disponibilizado pela Secretaria Municipal de Educação de Caruaru? Justifique sua resposta.

R_{10.3}: *Não, não optaria por este livro que foi utilizado no período 2017-2019. Por ter conhecimento de que existiam naquele momento outros livros que trabalhavam não só o conteúdo fração, mas outros diversos conteúdos de uma forma bem melhor do que o que foi “escolhido”, como exemplo, a Conquista da Matemática, livro este que foi escolhido novamente agora no ano de 2019, mas a gente já recebeu informação de que a Prefeitura não aderiu a essa escolha, escolheu lá um livro que nem na escola para ser analisado esse livro chegou, mas foi a Secretaria Municipal que fez a opção de utilizar no próximo ano (2020) na rede.*

Fonte: Lopes (2019).

Percebemos que, mesmo não concordando com a escolha do livro didático, o professor decidiu trabalhar com ele, atendendo às normatizações da Rede Municipal de Ensino, entendendo as demandas dos seus alunos e buscando fazer as adequações necessárias para melhorar a sua aula, além de entender a importância do processo de elaboração, estruturação, escolha e distribuição do livro didático. Vejamos o fragmento da sua fala.

Quadro 5: Recorte da fala do professor (P) sobre a utilização do livro didático.

Pergunta do Bloco III – nº 11

11. Você utilizou o livro didático *Vontade de Saber Matemática* nas suas aulas? Se a resposta for sim, qual a constância desse uso?

R₁₁: *Utilizo sempre. Sempre que abordo um conteúdo, procuro direcioná-lo ao livro didático, até porque não faria sentido o aluno dispor dessa ferramenta e você não fazer utilização dela.*

Fonte: Lopes (2019).

A seguir conferimos a Organização didática do livro de Souza e Pataro (2015), que corresponde à transposição das organizações matemáticas identificadas em torno dos Tipos e subtipos de tarefas referentes ao estudo de frações como descrito no quadro abaixo.

Quadro 6: Descrição dos momentos didáticos do livro didático.

Momentos Didáticos	Critérios de Análise	Livro Didático
Momento 1	Como foi feita a introdução de frações no livro didático?	Iniciou com a apresentação do trecho sobre a história e composição da liga de ouro seguida de



		outro trecho sobre a história das frações que remonta ao Egito antigo como berço das primeiras noções de frações, em seguida é sugerida uma situação-problema sobre a noção de fração (Souza e Pataro, 2015. p. 127 e 128). Contudo, a sistematização da técnica só ocorreu com a apresentação de uma situação (Tipo de tarefa) que demandando o seu uso. (Souza e Pataro, 2015. p. 135).
Momento 2	Como ocorreu a exploração do Tipo de tarefa T ou subtipo de tarefa t no livro e a elaboração das técnicas τ relativas a esse Tipo de tarefa?	Esse momento é previsto nas seções Atividades, Revisão e ENEM e OBMEP, no livro didático.
Momento 3	Como se constituiu o ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?	Semelhantemente às aulas do professor, no livro didático não encontramos vestígios do elemento tecnológico, sendo por isso que não será possível, nesse trabalho, realizarmos as análises posteriores referentes ao bloco tecnológico-teórico.
Momento 4	Como os autores propõem o trabalho das técnicas?	Foi proposto por meio de seções específicas. Os autores propuseram 104 questões das quais 65 foram selecionadas por atender aos três Tipos de tarefa e aos seis subtipos de tarefa definidos.
Momento 5	Como se efetiva a institucionalização? No início, no meio ou no final do livro didático?	A institucionalização acontece em decorrência da apresentação das técnicas (Multiplicar ou dividir numerador e denominador da fração por um mesmo número natural para obter frações equivalentes / Desenhar e pintar figuras para representar as frações equivalentes obtidas e comparar as partes pintadas).
Momento 6	De que forma se realizou a avaliação, no início, no meio ou no final do livro didático?	A avaliação acontece explicitamente, logo após a institucionalização decorrente apresentação das técnicas.

Fonte: Lopes (2019).

De forma semelhante, buscamos descrever os momentos didáticos do professor, para então analisarmos comparativamente, as praxeologias efetivadas.

Quadro 7: Descrição dos momentos didáticos do professor (P).

Momentos Didáticos	Critérios de Análise	Critérios realizados pelo Professor
Momento 1	O professor fez a introdução de frações para os seus alunos?	O professor utilizou material concreto para exemplificar a ideia de fração, em seguida, apresentou a representação numérica básica de uma fração (parte de um todo), finalizando com um fragmento da história das frações contido no livro didático, esses foram os caminhos utilizados pelo professor para introduzir o assunto aos seus alunos.
Momento 2	Como ocorreu a utilização do Tipo de tarefa T em sala de aula, bem como a elaboração das técnicas τ relativas a esse Tipo de tarefa na sala de aula?	Ocorreu no 3º encontro (6ª aula) quando o professor indagou que: <i>Os números mistos também podem ser escritos como frações não contáveis. Exemplo: $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$. O quociente será o primeiro número, o resto será o novo numerador e o denominador permanente.</i>

Momento 3	Como foi realizada a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?	Com relação a esse momento, encontramos apenas resquícios que, a partir da noção de equivalência, nos remete vagamente às propriedades gerais da igualdade, motivo esse que nos impossibilitou de realizar mais adiante, as análises no tocante ao elemento tecnologia.
Momento 4	Como ocorreu o trabalho do professor no tocante às técnicas?	Aconteceu a partir da 6ª aula mediante a resolução de atividades exemplificadas na lousa, nos exercícios realizados na sala de aula.
Momento 5	Em qual período ocorre a institucionalização pelo professor? No início, no meio ou no final do conteúdo?	A institucionalização se formalizou ao passo que as técnicas foram sendo experimentadas: determinar frações equivalentes pelo processo multiplicativo; calcular a porcentagem através de fração centesimal, entre outras, essa experimentação distinguiu aquelas consideradas “matematicamente necessárias” das “matematicamente contingentes” e, portanto, passíveis de descarte. (Chevallard, 1999, p. 244).
Momento 6	Como foi realizada a avaliação das relações pessoais $R(X;O)$ e institucionais $RI(O)$, se no início, no meio, no final da aula ou unicamente no final do conteúdo?	Esse momento foi um dos mais abrangentes, pois foi verificado nas indagações do professor para com os alunos sobre frações ao longo das 37 aulas, oralmente. Esse momento se complementou com duas avaliações escritas realizadas no meio e no final do processo, respectivamente.

Fonte: Lopes (2019).

Identificar que os momentos de estudo foram fundamentais para se compreender e analisar a proposta de ensino do professor, a partir deles foi possível verificar o seu trabalho formalizado nos Tipos de tarefa e nas técnicas utilizadas para cumprir com os seis momentos didáticos propostos por Chevallard (1999) e apresentados no quadro acima.

Ressaltamos que os momentos didáticos não seguem, necessariamente, a ordem apresentada nas páginas 7 e 8, mas que a identificação e a análise da forma como ocorrem, permite uma melhor compreensão do trabalho do professor. Outra questão importante revela-se nas indagações de Bittar (2017, p. 381). “Há privilégio de algum momento em relação aos demais? Caso exista, o que isso significa?”.

As respostas, buscamos em Kaspary (2014, p. 46, apud Bittar 2017, p. 381), ao afirmar que “a conclusão de que o primeiro momento coincide, recorrentemente, com a institucionalização de saberes matemáticos, como teoremas e propriedades, alerta para um ensino mais teoricista”. Essa conclusão reforça que o entendimento sobre os momentos didáticos, ou seja, como ocorrem, qual a sequência em que ocorrem e qual(is) prevaleceu(ram), permite que sejam estabelecidas estratégias para corrigir distorções ou erros graves no processo de ensino e aprendizagem. Para Bittar (2017, p. 381), “A identificação e análise dos momentos de estudo pode ser fundamental para compreender ou, ao menos, levantar hipóteses sobre a proposta de ensino de objetos não matemáticos”.

Trazendo as prerrogativas de Bittar (2017) acima apresentadas para o contexto aqui pesquisado, verificamos a não coincidência ente entre os momentos 1 (*encontro*) e 5 (*institucionalização*) em relação ao livro didático, fato semelhante em relação ao professor, ou seja, as propostas de ensino de ambos tenderam para um ensino que priorizou mais a algoritmização e não a teorização.

Nossas conclusões encerram que a sistematização da técnica ocorreu de formas diferentes para o professor e para os autores do livro didático, pois verificamos que o professor sistematizou à sua maneira própria do fazer (bloco técnico-prático) com as técnicas: Desenhar e pintar figuras (registro figural) para representar o número misto (registro numérico) / Dividir o numerador pelo denominador obtendo dois inteiros (quociente) e um quarto fracionário (sobreposição do resto com o divisor).

Já os autores do livro didático sistematizaram essa prática com as técnicas: Multiplicar ou dividir numerador e denominador da fração por um mesmo número natural para obter frações equivalentes / Desenhar e pintar figuras para representar as frações equivalentes obtidas e comparar as partes pintadas.

É perceptível ainda que a técnica (Desenhar e pintar figuras e comparar as partes pintadas) é pontual a cada situação obtida a partir das demais técnicas, portanto, ela é auxiliar na sistematização das outras.

As abordagens do livro didático apresentaram exemplificações superficiais dos significados de medida, razão, quociente e operador multiplicativo e uma abordagem mais efetiva do significado porcentagem. Como visto, o significado parte-todo aparece como preferência dos autores, situação comum nas questões que envolvem frações neste e em muitos outros livros didáticos. Ao ensinar frações aos seus alunos, o professor optou por abordar o significado parte-todo, replicando as preferências apresentadas no livro didático, nesse ponto, percebemos que não é interessante uma aproximação entre suas praxeologias. Verificamos também que não houve construção dos demais significados na sala de aula, nesse ponto, seria importante haver não só uma aproximação praxeológica, mas sobretudo uma complementação por parte do professor às limitações apresentadas no livro didático.

Considerações finais

A nossa visitação aos trabalhos de muitos estudiosos nos revelou os seus esforços para denunciar a importância das frações no cenário de ensino e pesquisa, buscando entender melhor quais porquês levaram as frações ao patamar de assunto não muito bem aceito na sala de aula.

Esse arcabouço de revelações e, como já falado, denúncias, nos remeteu a estudá-las e observar a forma como são ensinadas no importante cenário da sala de aula.

Além disso, como visto de fato, elas são em termos de importância para o currículo nos mais variados *habitats*, elemento importantíssimo para a sequência curricular, visto que seus conceitos têm, nas orientações dos textos legais, uma construção processual que deve levar em conta a faixa etária dos alunos ao longo das séries do ensino fundamental, onde “sobrevivem”⁸.

Equacionadas as diversas respostas obtidas das imersões nos trabalhos correlatos, nas análises do livro didático e nas aulas do professor, emergiram indagações que abriram novas portas reveladoras sobre esse importante objeto do saber, envolto das mais variadas subjetividades conforme o grau de importância atribuído pelos principais agentes da sua construção teórica e prática, o professor e os alunos, alicerçados pelas introduções dos autores do seu livro didático.

Almejamos então, que de tão importante, desperte a curiosidade, nos deixando esperançosos em saber que esse estado de ser do professor e do aluno é fundamental para o fortalecimento da relação professor/aluno/saber, revelando a passos concretos, esforços didáticos mobilizados, que levem cada vez mais as concepções do professor ao patamar da imaginação e da criatividade ao ensinar frações.

Assim, nos importa oportunizar futuras discussões que tragam outros pontos de vista, dada à abrangência conceitual do objeto frações, tais como investigar a influência de materiais manipuláveis utilizados pelo professor na replicação de velhas técnicas ainda funcionais e/ou na produção de novas técnicas pelos alunos. Também julgamos pertinente a análise do real estado do saber frações em diferentes instituições que compõem a noosfera chevallardiana.

Ousamos que desse e de outros reais esforços, decorra o desejo dos alunos em conceituar, manipular as técnicas aprendidas adaptando-as e criando outras, revelando as frações como um valioso e importante objeto matemático ao passo que se dá a construção dos seus conceitos com suas importantes contribuições para o campo das ciências exatas, em especial a matemática e para a sociedade, começando pela escola.

Referências

ALMOULOUD, S. A. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Unión** (San Cristobal de La Laguna), v. 42, p. 09-34, 2015.

BARBOSA, E. J. T. Equação do 1º Grau em Livros Didáticos Sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático. **Dissertação** (Mestrado profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade

8 “Consideram-se aqui as condições de “sobrevivência” de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel desse saber ou saber-fazer na “cadeia alimentar”?”. (ALMOULOUD, 2015, p. 15).

Estadual da Paraíba. 2011.

BARBOSA, E. J. T. Praxeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau. **Tese** (Doutorado), Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2017.

BATISTA, L. A. L. Limites de funções de uma variável real: análise das praxeologias matemáticas e didáticas propostas em livros didáticos. **Dissertação** (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, 2019.

BATISTA, L. A. L. Limites de funções reais de uma variável em livros didáticos: organizações matemática e didática. **Educação Matemática e Pesquisa.**, São Paulo, v. 22, n. 2, p. 144-170, 2020.

BEHR, M. J. et al. Rational-number concepts. *In*: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of mathematical concepts and process**. New York: 1983, p. 91-123.

BERTONI, N. E. **Frações e Números Fracionários**. Mo 695 Módulo VI. Pedagogia: Educação e linguagem matemática IV. Brasília: Universidade de Brasília, PEDEaD. 2009. 95p.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, Campinas, SP, v.25, n. 3, set./dez.2017, p.364-387. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/322247397_A_Teoria_Antropologica_do_Didatico_como_ferramenta_metodologica_para_analise_de_livros_didaticos. Acesso: 02/02/2022.

BOSCH, M. ; CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19.n.2, p.221-265, 1999.

BROUSSEAU, G. **Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática**. In: BRUN, J. Didáctica das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. p. 35-113.

CÂMARA DOS SANTOS, M.; CAVALCANTI, J. D. B. A Compreensão de Professores das Séries Iniciais do Ensino Fundamental sobre os Diferentes Significados das Frações: o caso do Município de Tupanatinga. In: **Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT**. 2006.

BESSA DE MENEZES, M. A Teoria Antropológica do Didático: uma releitura sobre a teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**. Volume 8, Número Temático – 2015.

CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional: uma abordagem nos livros didáticos** - dissertação de mestrado - PUC-SP, 2000.

CASTRO, F. C. Quantidades intensivas: análises de uma intervenção com alunos do 5º ano no ensino fundamental. 2014, 210 f. **Dissertação** (Mestrado). UFSC, Florianópolis, 2014.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique. (1991).

CHEVALLARD, Y. Les processus de transposition didactique et leur theorisation. In : ARSAC, G. *et al.* **La transposition didactique à l'épreuve**. Grenoble, La Pensee Sauvage. 1994.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. *In* : **Recherches em Didactiques des Mathématiques**, pp. 221-266. 1999.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude: Ecologie & régulation**. Cours donné à la XIe école d'été de didactique des mathématiques. Paru dans les actes correspondants, Grenoble: La Pensée Sauvage,

2002, p. 41-56. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53. Acesso em: 15 fev. 2022.

CHEVALLARD, Y. La théorie anthropologique des faits didactiques devant l'enseignement de l'altérité culturelle et linguistique: Le point de vue d'un outsider. In: **Colloque Construction Identitaire et Altérité: Créations Curriculaires et Didactique des Langues**, Université de Cergy-Pontoise, 2006. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_devant_1_alterite_culturelle_et_linguistique.pdf. Acesso em: 15 jan. 2022.

CHEVALLARD, Y. Readjusting didactics to a changing epistemology. In: **European Educational Research Journal**, 6(2), 131-134, 2007.

DANTE, L. R. Uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no ensino de matemática. Brasília, **Revista do professor de matemática**, 1987.

DAVID, M. M. S.; FONSECA, M. C. F. R. Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. Belo Horizonte, **Presença Pedagógica**, v.3, n.14, mar/abr. 1997.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. – São Paulo: Atlas, 2008.

KIEREN, T. E. Conhecimento pessoal de números racionais: seu desenvolvimento intuitivo e formal. In: J. Hiebert; M. Behr (Eds.), **Número e conceitos e em operações do número nas classes dos middles**. New York: Lawrence Erlbaum Associates. 1988. P. 162-181.

KICHOW, I. V. Procedimentos didáticos relativos ao ensino de números racionais em nível de sexto e sétimo ano do ensino fundamental. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2009.

LOPES, R. N. S. Praxeologia do professor: uma investigação do conceito de fração sob a ótica da teoria antropológica do didático. **Dissertação** (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, 2020.

MATHERON, Y. Analyser les praxeologies quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x*, n. 54, pp. 51-78. (2000). In: **Revista de Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 9, n. 1, pp. 51-81, 2007.

NUNES, T.; BRYANT, P. Compreendendo Números Racionais. In: NUNES, Terezinha, BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997.

OHLSSON, S. Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. **Numbers concepts and operations in the middle grades**. Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1989, p. 53-92.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 7. ed. rev. e atual. Petrópolis, RJ: Vozes, 2016.

ROMANATTO, M. C. Número Racional: Relações Necessárias a sua Compreensão. 1997. 169 f. **Tese** (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1997.

SANTOS, A. O Conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental. **Dissertação** (Mestrado). PUC, 2005.

SANTOS, L. S. Análise dos efeitos didáticos emergentes de uma sequência de atividades na aprendizagem do significado parte/todo do número racional. **Dissertação** (Mestrado em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2010.

SANTOS, S. P. A Teoria Antropológica do Didático: condições e restrições reveladas pelas teses e dissertações defendidas no Brasil na área da educação matemática. **Tese** (Ensino, Filosofia e História das Ciências), Universidade Federal da Bahia – UFBA, 2020.

SCHEFFER, N. F.; POWELL, A. B. Frações na educação básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão, PR, Brasil, v.09, n.20, p.08-37, nov.-dez. 2020.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de Saber Matemática**. Matemática (Ensino Fundamental). 6º ano. 3. ed. São Paulo. FTD, 2015.

VYGOTSKY, L. **Pensamento e linguagem**. 3.ed. São Paulo: M. Fontes, 1999.

WU, H. **Teaching fractions in elementary school**: A manual for teachers. 1998. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/2622173_Teaching_fractions_in_elementary_school_A_manual_for_teachers. Acesso em: 10 fev. 2022.

WU, H. **What's sophisticated about elementary mathematics?** *American Educator*, Vol. 33, Número 3, p. 4–14. 2009. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~wu/wu2009.pdf>. Acesso em 10 de fev. 2022.

Recebido em: 28 de fevereiro de 2022
Aprovado em: 27 de julho de 2022