revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

IDEIAS-BASE DE FUNÇÃO A PARTIR DE SITUAÇÕES MULTIPLICATIVAS EM LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS INICIAIS

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.25.152-177

Marli Schmitt Zanella[1]
Veridiana Rezende[2]

Resumo: Nesta pesquisa, assume-se que, dentre outros elementos, o Campo Conceitual Multiplicativo contempla as ideias-base associadas ao conceito de função – correspondência, dependência, variável, regularidade e generalização, que possibilitam a compreensão deste conceito. Nesse sentido, tem-se por objetivo nesse estudo explicitar as ideias-base de função em situações multiplicativas de uma coleção de livros didáticos de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Para o seu desenvolvimento, foram analisados todos os volumes da Coleção Ápis, de Matemática, de maior distribuição em território brasileiro, com olhar voltado para as situações do Campo Conceitual Multiplicativo. Apresenta-se neste texto uma classificação de todas as situações multiplicativas identificadas e, em cada uma, explicitam-se as ideias-base de função. Como resultados, identificou-se que, para as relações ternárias, as situações de produto cartesiano e combinatória permitem mobilizar a correspondência e a dependência, e a classe de multiplicação comparativa permite mobilizar as ideias de correspondência, dependência e variável. Já para as situações envolvendo relações quaternárias, identificam-se as ideias-base de correspondência, dependência e variável.
Palavras-chave: Didática da Matemática. Campos Conceituais. Estrutura Multiplicativa. Função.

BASE IDEAS OF FUNCTION FROM MULTIPLICATIVE SITUATIONS IN EARLY YEARS TEXTBOOKS

Abstract: In this research, it is assumed that, among other elements, the Multiplicative Conceptual Field contemplates the base ideas associated with the concept of function – correspondence, dependence, variable, regularity and generalization –, which makes possible the understanding of this concept. In this sense, the aim of this study is to explain the base ideas of function in multiplicative situations of a collection of Mathematics textbooks from the Early Years of Elementary School. For the development of the research, all volumes of "Coleção Ápis", belonging to Mathematics and with the largest distribution in Brazilian territory, were analyzed, focusing on the situations of the Multiplicative Conceptual Field. This text presents a classification of all multiplicative situations identified and, in each of them, the base ideas of function are explained. As a result, it was identified that, for ternary relations, Cartesian and combinatorial product situations allow mobilizing correspondence and dependence, and the comparative multiplication class allows mobilizing the ideas of correspondence, dependence and variable. For situations involving quaternary relations, the base ideas of correspondence, dependence and variable are identified.
Keywords: Mathematics Didactics. Conceptual Fields. Multiplicative Structure. Function.

---

[1] Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Pós-doutoranda no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual do Oeste de Paraná (UNIOESTE). Docente do Departamento de Ciências e do Programa de Pós-graduação em rede Nacional para o Ensino das Ciências Ambientais (PROFCIAMB) da Universidade Estadual de Maringá (UEM), Goioerê-PR, Brasil. E-mail: mszanella@uem.br - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-1621-9934.

[2] Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Docente do Colegiado de Matemática e do Mestrado em Educação Matemática (PRPGEM) da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Campo Mourão-PR, Brasil. Docente do Programa em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), Cascavel – PR. E-mail: rezendeveridiana@gmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-4158-2196.

Introdução

O ensino de Matemática voltado aos anos iniciais do Ensino Fundamental tem como respaldo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que indica a articulação entre ideias fundamentais dos diferentes campos da Matemáticas, a saber: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2018).

O pensamento numérico, por exemplo, favorece o desenvolvimento das ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, que requerem o estudo de diferentes situações e sucessivas ampliações dos campos numéricos. Já o trabalho com a Álgebra proporciona o desenvolvimento das ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades de igualdade, sem o uso de letras para expressá-las (BRASIL, 2018). A articulação entre as unidades temáticas Números e Álgebra possibilita a elaboração do conceito de função no decorrer do processo escolar, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (NOGUEIRA, REZENDE, 2018), visto que a noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de situações envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas.

De acordo com a BNCC, a proporcionalidade se observa no estudo das operações com números Naturais, na representação fracionária de números Racionais, áreas e funções, desde os anos iniciais (BRASIL, 2018). Tais conceitos estão relacionados ao Campo Conceitual Multiplicativo, que compreende o conjunto de situações cujo domínio requer uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisá-las.

Com relação aos conceitos matemáticos abordados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a BNCC cita aqueles direcionados à resolução de problemas de multiplicação e divisão com números Naturais e Racionais, contagem, grandezas diretamente proporcionais, partição, entre outros (BRASIL, 2018). Como habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, constam a resolução de problemas envolvendo o princípio multiplicativo, combinação, proporção direta e partilha, que estão diretamente relacionadas ao Campo Conceitual Multiplicativo, conforme proposto por Vergnaud (1996; 2009).

Pavan (2010) mostrou que ideias-base de correspondência, dependência, variável, regularidade e generalização base podem ser manifestadas por estudantes do atual 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem situações envolvendo estruturas aditivas e multiplicativas. Com respaldo em Tinoco (2002), Caraça (1998) e Nogueira e Rezende (2018), denominamos estas ideias - *correspondência*, *dependência*, *variável*, *regularidade* e *generalização* - de *ideias-base* de função, por serem essenciais para a compreensão deste conceito.

Com base em Vergnaud (1990; 1996; 2009), assumimos que a aprendizagem do estudante se estabelece frente a uma diversidade de situações, dependendo dos enunciados, da estrutura cognitiva dos estudantes, do contexto envolvido, da característica numérica dos dados e de sua apresentação no livro didático (VERGNAUD, 2009).

Apoiadas em Freitas e Almouloud (2016), reconhecemos o livro didático como um instrumento utilizado pelo professor para o planejamento de suas aulas, e como apoio para o aluno na realização das tarefas. Além disso, entendemos que a análise de livros didáticos pode trazer contribuições para nortear a prática de futuros professores, pois esse material apresenta uma orientação sobre os saberes matemáticos, respeitando os princípios da BNCC. As escolhas didáticas do autor também expressam características sobre como o ensino de um determinado conceito é elaborado e abordado pelo professor, especialmente porque, em muitos casos, o livro didático é o único material disponível para organizar a prática do docente.

Nessa ótica, estabelecemos como objetivo para esta pesquisa *explicitar ideias-base de função em situações multiplicativas de uma coleção de livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Este trabalho compõe as discussões do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMA), que se interessa pelo estudo do estudo do Campo Conceitual das Funções e refere-se à pesquisa de pós-doutoramento da primeira autora[3].

Imbricações entre o Campo Conceitual Multiplicativo e as ideias-base de função

De acordo com Vergnaud (1996, p. 167), um campo conceitual é entendido a partir de um conjunto de situações, o que permite atribuir uma classificação que se assenta "[...] na análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser postos em jogo em cada uma delas". Desse modo, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) privilegia modelos que atribuem papel essencial aos próprios conceitos matemáticos, embora o enunciado e a quantidade de elementos em jogo também possam interferir no nível de complexidade de cada situação.

Dentre outros elementos, o Campo Conceitual Multiplicativo ou das Estruturas Multiplicativas está organizado em relações ternárias e quaternárias, e compreende as ideias envolvidas na "[...] proporção simples e proporção múltipla, função linear e n-linear, relação escalar direta e inversa, quociente e produção de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, relação, número racional, múltiplo e divisor" (VERGNAUD, 1996, p. 168).

[3] Pós-doutorado em andamento no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE).

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A relação quaternária[4] envolve quatro quantidades, sendo, duas a duas, medidas diferentes, com uma das quantidades correspondendo ao valor unitário. É organizada em três classes de situações: (i) proporção simples, subdividida em multiplicação um para muitos, cota, partição e quarta proporcional; (ii) proporção múltipla, subdividida em multiplicação um para muitos e muito para muitos; e (iii) função bilinear.

A relação ternária[5] envolve três quantidades, das quais uma é o produto de outras duas, tanto no plano numérico quanto no plano dimensional. Distinguem-se duas classes de situações: (iv) produto cartesiano, subdividido em configuração retangular e combinatória, e (v) comparação multiplicativa, subdividida em relação desconhecida, referido desconhecido ou referente desconhecido (VERGNAUD, 1996; GITIRANA *et al.*, 2014). No Quadro 1 apresentamos um esquema organizando as duas relações que compõem o Campo Conceitual da Estrutura Multiplicativa.

Quadro 1: Classes de situações do Campo Conceitual da Estrutura Multiplicativa

<table>
<tr><th>Campo conceitual</th><th>Relações</th><th>Classes</th><th>Subclasses (códigos)</th></tr>
<tr><td rowspan="12">Estrutura multiplicativa</td><td rowspan="7">Relação quaternária</td><td rowspan="4">Proporção simples</td><td>Multiplicação um para muitos (P1)</td></tr>
<tr><td>Cota (P2)</td></tr>
<tr><td>Partição (P3)</td></tr>
<tr><td>Quarta proporcional (P4)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Proporção múltipla</td><td>Um para muitos (P5)</td></tr>
<tr><td>Muitos para muitos (P6)</td></tr>
<tr><td>Função bilinear</td><td>Função bilinear (P7)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Relação ternária</td><td rowspan="2">Produto cartesiano</td><td>Configuração retangular (P8)</td></tr>
<tr><td>Combinatória (P9)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Comparação multiplicativa</td><td>Relação desconhecida (P10)</td></tr>
<tr><td>Referido desconhecido (P11)</td></tr>
<tr><td>Referente desconhecido (P12)</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Vergnaud (1996) e Gitirana *et al.* (2014)

Segundo Vergnaud (1996), os processos cognitivos e as respostas do sujeito são elaboradas em função das diferentes situações que este enfrenta e domina durante sua vida escolar. Para o autor duas ideias principais estão associadas às situações: a ideia de variedade e de história. A ideia de variedade de situações de um campo conceitual, assim como as variáveis didáticas ou o domínio numérico em que subsistem, interfere no modo como os estudantes

[4] Uma apresentação mais detalhada de classes e subclasses é explicitada na seção “Análise das situações envolvendo relações quaternárias”.

[5] Uma apresentação mais detalhada de classes e subclasses é explicitada na seção “Análise das situações envolvendo relações ternárias”.

resolvem tais situações; a ideia de história proporciona que os conhecimentos dos alunos sejam elaborados a partir da variedade de situações que enfrentam e dominam progressivamente.

É a partir da variedade de conceitos em diversificadas situações que o campo conceitual se estabelece. Vergnaud (1996) afirma que existe grande variedade de situações em um campo conceitual, e que as variáveis de cada situação constituem um meio para construir sistematicamente o conjunto das classes possíveis, de modo que as experiências do aluno não se repetem da mesma forma nas diferentes situações.

As primeiras evidências do pensamento funcional estão apoiadas no Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, visto que, nas situações envolvendo relações quaternárias, estão presentes as relações funcionais (VERGNAUD, 1996). Ademais, as operações aritméticas e as funções são representantes para a natureza algébrica da aritmética, uma vez que o algoritmo da multiplicação é um modelo algébrico (MAGINA, PORTO, 2018).

Pavan (2010) identificou a manifestação das ideias-base de *dependência*, *correspondência*, *variável*, *regularidade* e *generalização* por alunos de 5º ano do Ensino Fundamental a partir de um estudo com situações aditivas e multiplicativas. Além de considerarmos essas ideias-base de função, respaldadas em Pavan (2010), Caraça (1998) e Tinoco (2002), temos o entendimento de que uma função é uma relação matemática entre dois conjuntos A e B não vazios, de modo que, para cada elemento do conjunto A, existe um único elemento correspondente no conjunto B (LIMA *et al.*, 2006).

Segundo Tinoco (2002), a relação de *dependência* ocorre entre grandezas variáveis. Em uma relação funcional, uma das grandezas (variável dependente) é determinada pela variação da outra (variável independente). As relações de dependência entre grandezas podem ser observadas em situações cotidianas, como, por exemplo, ao calcularmos a velocidade média de um carro, obtendo a razão entre a distância percorrida e o tempo que o móvel levou para percorrer essa distância. Desse modo, relacionamos a distância percorrida e o tempo necessário para percorrê-la, ou seja, relacionamos uma medida de comprimento com uma medida de tempo, que representam, no exemplo dado, as duas variáveis, sendo que a distância percorrida é a variável dependente, e o tempo é a variável independente.

A ideia de *correspondência* está associada a uma correspondência unívoca no sentido de $x \to y$, em que x e y representam variáveis de conjuntos distintos, X e Y, respectivamente. A relação de correspondência representada por $x \to y$, significa que para cada elemento x do conjunto X, existe um único elemento correspondente y pertencente ao conjunto Y, ou seja, o próprio conceito de função está alicerçado na relação de correspondência (LIMA *et al.*, 2006; PAVAN, 2010). Podemos observar a correspondência quando imaginamos uma situação em que, para entrar em um cinema, cada pessoa precisa comprar um bilhete. Temos nessa situação dois conjuntos distintos, não nulos, representados por P: conjunto de pessoas e B: conjunto de bilhetes. Relacionamos cada bilhete entregue na bilheteria a uma pessoa que, assim, tem acesso ao cinema.

A ideia de *variável* representa um número qualquer de um conjunto, mas não é um número específico deste conjunto. Geralmente, uma variável é representada por um símbolo ou uma letra, referindo-se a um número arbitrário, desconhecido. No entanto, quando olhamos para as situações multiplicativas, a ideia de variável nem sempre está explícita no enunciado do problema, uma vez que uma variável é dependente ou independente de outra grandeza. Entende-se que uma quantidade x é variável quando x passa por diferentes valores de determinada grandeza. A ideia de variável surge pela necessidade de representação simbólica para relacionar elementos entre conjuntos, sendo proveniente da ideia de correspondência; do contrário, teríamos que usar resultados particulares e não obteríamos uma generalização para tratar situações da própria Matemática. Podemos escrever a seguinte relação para compreender as noções de variável dependente e independente: sejam x e y duas variáveis para representar conjuntos de números, podemos relacioná-las, escrevendo y é função de x, expresso por $y = f(x)$. Se entre duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$, então x é variável independente e y é variável dependente em relação a x (CARAÇA, 1998).

A ideia de *regularidade* possibilita identificar a ocorrência regular de um determinado fenômeno, e constitui uma das primeiras noções para a construção do conceito de função (TINOCO, 2002), pois está explícita quando observamos uma repetição de valores, sequências numéricas, padrões geométricos, ou na identificação de regularidade de um determinado padrão icônico (PAVAN, 2010), estando presente desde muito cedo nas atividades da Educação Infantil, quando uma sequência de desenhos ou imagens é repetida aos estudantes (MAGINA, PORTO, 2018).

A ideia de *generalização* permite identificar os fenômenos que ocorrem regularmente e, assim, podem ser generalizados; envolve abstração e argumentação, para que se verifique a validade de uma certa lei para quaisquer casos (TINOCO, 2002; PAVAN, 2010). A ideia de generalização está presente nas situações multiplicativas e em todas as situações aritméticas, embora não explicitamente. Uma situação do tipo “Sabendo que 1 bicicleta tem 2 rodas, quantas rodas têm 3 bicicletas?” pode ser expressa algebricamente por $f(x) = 2x$; mesmo que essa representação não esteja explícita no enunciado da situação, é possível estabelecer uma relação funcional linear entre bicicletas e rodas, dois conjuntos distintos não vazios, que expressam uma regularidade em que a quantidade de rodas depende da quantidade de bicicletas (MAGINA, PORTO, 2018).

Por se tratar de uma análise de material didático, e por considerar o livro didático relevante na prática do professor, nos respaldamos em Freitas e Almouloud (2016) para assumir que o livro é uma instituição bem organizada, em que os conteúdos matemáticos estão bem definidos e direcionados para cada nível de ensino, com vistas a desenvolver habilidades matemáticas conforme orientações propostas na BNCC (BRASIL, 2018).

Nesse sentido, antes de realizar o estudo da Coleção Ápis, aprofundamos as análises sobre o principal documento oficial que normatiza e orienta o trabalho do professor de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2018). Após o estudo das Estruturas Multiplicativas, segundo o aporte de Vergnaud (1996; 2009), buscamos olhar para as escolhas didáticas feitas pelo autor do livro didático, e olhamos também para as variáveis didáticas envolvidas nos problemas, pois estas trazem inferências para as orientações didáticas que o professor trilha em sua prática pedagógica.

Consideramos como variáveis didáticas para serem analisadas nesta pesquisa aquelas que podem ser alteradas pelo professor, que interferem diretamente na estratégia de resolução da situação ou que podem indicar uma hierarquia de dificuldade na resolução das situações (SILVA, 2021). Além das variáveis didáticas, constam os valores destas variáveis (ALMOULOUD, 2016), como mostraremos a seguir.

Especificamente, consideramos neste estudo as seguintes variáveis didáticas e seus respectivos valores: (i) *classe das situações multiplicativas* - embora tratemos somente de situações multiplicativas, o grau de dificuldade de cada uma das classes é diferente entre si; (ii) *abrangência numérica* - conjunto numérico (Naturais ou Racionais) e respectivos valores assumidos nas situações (quantidades envolvendo unidade, dezena ou centena, unidade de milhar); (iii) *representação simbólica* - a apresentação do enunciado também interfere no nível de dificuldade da situação, por exemplo, em alguns casos, além do enunciado em língua natural, uma representação pictórica, quadro ou tabela pode ser fornecida como apoio visual.

Nosso olhar para estas variáveis didáticas está relacionado com as diferentes situações esperadas para o de ensino em questão, enunciadas na BNCC nas unidades temáticas Números, Álgebra e Grandezas e Medidas (BRASIL, 2018), intrinsicamente relacionadas com o objeto de estudo, a saber, as situações que compõe a Estrutura Multiplicativa.

Tendo apresentado os referenciais teóricos que embasaram as análises, descrevemos, na próxima seção, os encaminhamentos metodológicos da pesquisa, desde a seleção do livro didático e das situações, como também, explicitamos uma organização para analisar as situações multiplicativas e identificar as ideias-base de função.

Aspectos metodológicos

Com base nas informações de distribuição das obras aprovadas pelo Programa Nacional do livro e do Material Didático (PNLD) de 2019, selecionamos a Coleção Ápis, de autoria de Luiz Roberto Dante, da Editora Ática, por ser tratar da coleção mais vendida em território nacional (BRASIL, 2019).

A análise desta coleção foi realizada em todos os volumes, não especificamente em capítulos contendo a multiplicação e a divisão, pois para o primeiro volume, por exemplo, embora não seja específico o estudo da Estrutura Multiplicativa, foram identificadas situações envolvendo esses conceitos. No segundo volume, o autor apresenta um capítulo referente à multiplicação, e a partir do terceiro ano, capítulos referentes à multiplicação e divisão são contemplados pelo autor. Outro fator que nos fez olhar para todo o conteúdo apresentado em cada volume é que situações multiplicativas foram identificadas em outros capítulos, e dentre estes, o maior número de situações multiplicativas também foi identificado no capítulo envolvendo grandezas e medidas, por exemplo.

Todas as tarefas pertencentes à estrutura multiplicativa apresentadas pelo autor foram analisadas neste estudo, desde as situações explicativas na abertura de um capítulo àquelas resolvidas ou propostas para resolução, sendo excluídas da análise as tarefas com enunciado do tipo “calcule” ou “complete”, visto que não estavam elaboradas de maneira contextualizada.

Primeiramente, identificamos as situações multiplicativas presentes nos cinco volumes da Coleção Ápis. Na sequência, classificamos essas situações conforme os pressupostos teóricos do Campo Conceitual da Estrutura Multiplicativa (VERGNAUD, 1996; 2009). Dessa forma, identificamos as variáveis didáticas consideradas pertinentes pelo autor para o nível de ensino em questão, a saber: (i) *classificação das situações multiplicativas* - subclasses P1, P2, P3, P4, P5, P7, P8, P9, P10; (ii) *abrangência numérica* - Naturais: valores numéricos envolvendo (a) dezena, (b) centena, (c) milhar, (d) contínuo – (hora e minuto) e, Racionais - (e) ideia de porcentagem – (aumento ou desconto), (f) decimal – (dezena), (g) decimal – (centena), (h) representação fracionária; (iii) *tipo de representação* - (LN) língua natural, (I) ilustração, (AV) apoio visual.

Por fim, analisamos todas as situações multiplicativas selecionadas para identificarmos, em cada classe de situações, a mobilização de ideias-base de função *correspondência*, *dependência*, *variável*, *regularidade* e *generalização*, conforme os pressupostos de Caraça (1998), Tinoco (2002) e Pavan (2010). Essas ideias-base de função não estão explícitas nos enunciados das situações, mas elas podem ser identificadas a fim de favorecer o desenvolvimento do conceito de função durante todo o processo escolar, uma vez que o livro didático, considerado uma ferramenta base para o planejamento de aulas (FREITAS; ALMOULOUD, 2016), está presente nas práticas pedagógicas do professor, cujas escolhas didáticas podem elucidar algumas ideias-base de função ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental, como veremos nas análises dos enunciados das diferentes situações multiplicativas.

Análise e discussão dos resultados

A partir dos pressupostos teóricos de Vergnaud (1996; 2009), olhamos para todas as situações multiplicativas contextualizadas apresentadas na Coleção Ápis, que foram classificadas de acordo com os raciocínios envolvidos para as relações ternárias e quaternárias. A Tabela 1 apresenta um resumo das situações identificadas na coleção. Organizamos estas informações com referência à quantidade de situações identificadas em cada classe e por volume, para obter uma visão geral da Estrutura Multiplicativa nesta coleção.

Tabela 1: Quantidade de situações multiplicativas identificadas nos livros do 1º ao 5º ano

Relações	Classes	Subclasses	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	Total
Relação quaternária	Proporção simples	Multiplicação um para muitos	6	33	41	46	42	168
		Cota	-	-	6	17	13	36
		Partição	2	8	9	22	31	72
		Quarta Proporcional	-	-	1	5	9	15
	Proporção múltipla	Multiplicação um para muitos	-	-	-	1	-	1
	Função Bilinear		-	-	-	1	1	2
Relação ternária	Produto cartesiano	Configuração retangular	1	1	3	10	27	42
		Combinatória	-	1	2	3	4	10
	Comparação multiplicativa	Relação desconhecida, referido ou referente	-	-	4	11	8	23

Fonte: Autoras

Nossas discussões estão organizadas em cada uma das classes de situações multiplicativas, conforme identificadas em cada volume da Coleção Ápis. Na sequência, apresentamos as interpretações referentes a cada uma das classes de situações multiplicativas, com exemplos dessas situações, e as análises sobre a identificação de ideias-base de função.

Análise das situações envolvendo relações quaternárias

A relação quaternária contempla 3 classes: proporção simples, proporção múltipla e função bilinear. Iniciamos nossas análises explicitando situações identificadas na Coleção Ápis com as subclasses da Proporção Simples: (P1) Multiplicação um para muitos, (P2) Cota, (P3) Partição e (P4) Quarta Proporcional; Proporção Múltipla: Subclasse multiplicação um para muitos (P5) e Função Bilinear (P7).

Na subclasse (P1), multiplicação um para muitos, conhecemos o valor unitário e outras duas quantidades (m_1 e m_2), em dois tipos de medidas. Esta classe de situações está presente em todos os volumes da coleção.

Nos livros do 1º e 2º ano, as situações estão elaboradas no conjunto dos Naturais, e, nos demais volumes, se estende também aos Racionais. Na Tabela 2 apresentamos os valores das variáveis didáticas identificadas em cada volume da coleção para a classe P1, de acordo com (ii) abrangência numérica e (iii) representação simbólica.

Tabela 2: Valores das variáveis didáticas para P1 em todos os volumes

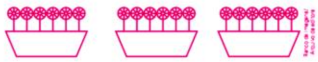
Ano/ Livro	Abrangência numérica								Representação simbólica		
	a	b	c	d	e	f	g	h	LN	I	AV
1º	6	-	-	-	-	-	-	-	1	1	4
2º	32	1	-	-	-	-	-	-	11	18	4
3º	28	2	1	-	-	9	1	-	22	15	4
4º	14	11	3	1	-	11	5	1	33	8	5
5º	11	7	3	-	1	17	1	2	35	5	2

Fonte: Autoras

A Tabela 2 explicita uma evolução da abrangência numérica conforme se avança o ano escolar; de acordo com a BNCC, além dos números Naturais, devem ser apresentadas situações com números racionais (decimais e frações). Números envolvendo dezena são a maioria, enquanto 7 situações envolvem milhares.

O primeiro volume prioriza o apoio visual, que interfere na interpretação e resolução da situação; nos demais volumes, a maioria das situações são apresentadas em língua natural e ilustração. Na Figura 1 trazemos exemplos de situações extraídas dos volumes do 1º ao 4º ano da classe de multiplicação um para muitos (P1).

Figura 1: Exemplos de situações da subclasse P1

Língua natural com apoio visual - 1º ano (DANTE, 2017a, p. 52)	Língua natural – 2º ano (DANTE, 2017b, p. 138)
OBSERVE AS CRIANÇAS NOS BALANÇOS DO PARQUE E ESCREVA OS NÚMEROS. AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO  A) QUANTOS BALANÇOS HÁ NA CENA? 3 B) QUANTAS CRIANÇAS HÁ PARA CADA BALANÇO? 3 C) ENTÃO, QUANTAS CRIANÇAS HÁ NO TOTAL? 9	Marina vai enfeitar a casa dela com arranjos de flores em vasos. Ela vai usar 3 vasos com 6 flores em cada um deles. Desenhe os vasos com as flores e, depois, indique como obter o número total de flores com adição de números iguais e com a multiplicação correspondentes.  Adição: 6 + 6 + 6 = 18 Multiplicação: 3 × 6 = 18
Língua natural com ilustração – 3º ano (DANTE, 2017c, p. 140)	**Língua natural – 4º ano (DANTE, 2017d, p. 130)**
Fernanda viu o preço do vidro de palmito e fez um arredondamento para calcular mentalmente quanto vai gastar, aproximadamente, na compra de 3 vidros de palmito.  	Um pipoqueiro vendeu 196 saquinhos de pipoca em 1 dia. Mantendo essa média, em 1 mês ele venderá aproximadamente 6 000 saquinhos. 30 × 200 = 6 000

Fonte: Adaptações das autoras

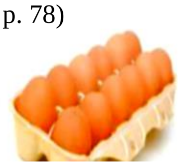
Na Figura 2 apresentamos uma situação de P1, extraída de Dante (2017e), referente ao 5º ano, em que analisamos o raciocínio multiplicativo e as ideias-base de função.

Figura 2: Situação da subclasse (P1)

Enunciado de P1 (Dante, 2017e, p. 78)

Converse com os colegas sobre mais estas questões.

a) Se você comprar 5 dúzias de ovos, então quantos ovos terá comprado? 60 ovos.



Esquema sagital

Quantidade de Dúzias	Quantidade de ovos
1 →	12
5 →	x

Fonte: Autoras

O enunciado da situação é elaborado em língua natural, contendo ilustração. O conjunto numérico é o dos Naturais, e os valores são menores do que 60. A primeira grandeza é representada pela quantidade de dúzias de ovos (conjunto de partida), enquanto a segunda grandeza é representada pela quantidade de ovos (conjunto de chegada). Com essa interpretação, podemos explicitar a relação de *correspondência* entre a quantidade de dúzias e a quantidade de ovos em cada dúzia, ou seja, cada dúzia tem 12 ovos.

De acordo com Tinoco (2002), a relação de *dependência* entre esses conjuntos se manifesta quando a quantidade de ovos depende da quantidade de dúzias: conforme se altera a quantidade de dúzias, altera-se também a quantidade de ovos. Nesse caso, temos como *variável dependente* a quantidade de ovos, e *variável independente* a quantidade de dúzias de ovos. Inferimos que a partir do enunciado ainda não possível explicitar as ideais de *regularidade* e *generalização*, visto que seria necessário incluir outras perguntas para conduzir o estudante à mobilização dessas ideias-base, como por exemplo, perguntar quantos ovos têm 2 dúzias, ou quantos ovos há em 3 dúzias, para favorecer a mobilização de relações que ocorrem com regularidade e que podem indicar uma generalização que permite identificar a quantidade de ovos para qualquer quantidade de dúzias de ovos, como mostrou a pesquisa de Silva (2021).

Nas situações em que se aborda a relação de cota (P2), identifica-se uma divisão, e busca-se a quantidade de unidades, ou seja, conhecemos o valor unitário, e seu valor correspondente em outra quantidade é conhecido, portanto, m_1 e m_3 (VERGNAUD, 2009).

Situações da subclasse P2 foram identificadas nos volumes do 3º, 4º e 5º ano. Conforme indica a Tabela 3, a maioria das situações envolve valores na ordem das dezenas. Identificamos uma situação envolvendo decimais no 3º e 5º ano, e quatro situações no 4º ano. Apenas uma situação foi apresentada com apoio visual no 3º e no 5º ano.

Tabela 3: Valores das variáveis didáticas para P2 nos volumes do 3º ao 5º ano

Ano/ Livro	Abrangência numérica								Representação simbólica		
	a	b	c	d	e	f	g	h	LN	I	AV
3º	5	-	-	-	-	1	-	-	-	5	1
4º	9	1	2	1	-	4	-	-	12	5	-
5º	5	4	1	-	1	1	1	-	9	3	1

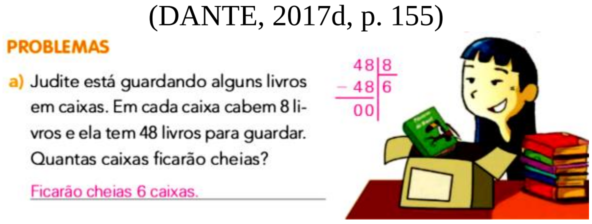
Fonte: Autoras

No que se refere às representações simbólicas utilizadas, não há indicativos de evolução, pois se priorizam enunciados em língua natural e ilustrações, que não auxiliam a resolução das situações. Com relação à abrangência numérica, há um total de 7 situações envolvendo Racionais (decimais) e 29 situações envolvendo Naturais, e nenhuma destas na representação fracionária. Na Figura 3 apresentamos exemplos de situações de cota, dos volumes do 3º e 4º ano.

Figura 3: Exemplos de situações da subclasse P2

Língua natural com apoio visual - 3º ano (DANTE, 2017c, p. 151)

Língua natural com ilustração – 4º ano (DANTE, 2017d, p. 155)



Fonte: Adaptações das autoras

Na Figura 4 apresentamos uma situação da subclasse P2, extraída de Dante (2017e), referente ao 5º ano, em que analisamos o raciocínio multiplicativo e as ideias-base de função.

Figura 4: Situação da subclasse (P2)

Enunciado de P2 (Dante, 2017e, p. 85)

Em uma padaria, as broas de milho serão embaladas em pacotes com 6 broas em cada um. Quantos pacotes serão obtidos com 136 broas? Devemos efetuar 136 ÷ 6 para saber quantos grupos de 6 cabem em 136.
Observe a resolução pelo algoritmo usual e, depois, complete a resposta.

Esquema sagital

Quantidade de pacotes	Quantidade de broas
1 →	6
x →	136

Fonte: Autoras

O enunciado da situação é elaborado em língua natural, com ilustração; o conjunto numérico é o dos Naturais, e os valores, na ordem das centenas. A primeira grandeza é representada pela quantidade de pacotes (conjunto de partida), e a segunda grandeza é representada pela quantidade de broas (conjunto de chegada). A relação de *correspondência* é explicitada entre a quantidade de pacotes e a quantidade de broas em cada pacote, ou seja, “cada pacote tem 6 broas”.

A ideia de *dependência* se verifica na relação “quantidade de broas depende da quantidade de pacotes”. Quando se altera a quantidade de pacotes, também se altera a quantidade de broas, e, nesse caso, temos como *variável dependente* a quantidade de broas, e *variável independente* a quantidade de pacotes. O enunciado dessa situação (Figura 4) não favorece a mobilização das ideias-base de regularidade e generalização, haja vista a necessidade de adaptações para promover a mobilização de tais ideias, conforme explicitou Silva (2021).

A Partição (P3) considera uma divisão ao buscar a quantidade correspondente ao valor unitário. Apresenta outras duas quantidades (m_2 e m_3), em dois tipos de medidas (VERGNAUD, 2009).

As situações de Partição foram identificadas em todos os volumes da Coleção Ápis. Nos volumes do 1º, 2º e 3º ano, a variável didática da abrangência numérica são números Naturais envolvendo dezenas. Uma única situação envolvendo unidade de milhar foi apresentado no volume do 3º ano (indicado na Figura 8), e uma também no volume do 4º ano. Na Tabela 4 apresentamos uma análise dos valores atribuídos às variáveis didáticas (ii) abrangência numérica e (iii) representação simbólica.

Tabela 4: Valores das variáveis didáticas para P3 nos volumes do 1º ao 5º ano

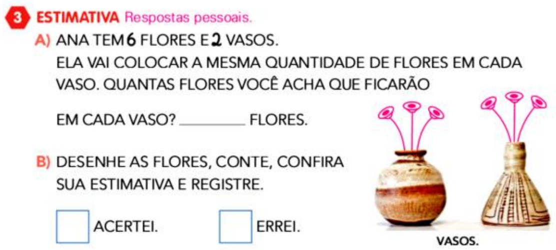
Ano/ Livro	Abrangência numérica								Representação simbólica		
	a	b	c	d	e	f	g	h	LN	I	AV
1º	2	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1
2º	8	-	-	-	-	-	-	-	1	6	1
3º	8	-	1	-	-	-	-	-	2	5	2
4º	15	2	1	1	-	2	1	-	17	4	1
5º	11	4	-	2	-	10	4	-	27	3	1

Fonte: Autoras

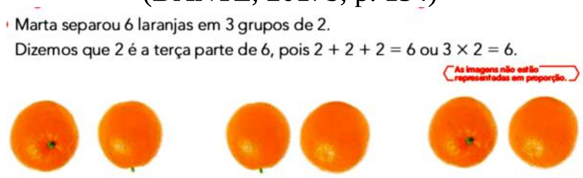
Na Figura 5 apresentamos 4 situações de partição identificadas nos volumes do 1º ao 4º ano. Não há indicativos de avanço em relação às situações desta classe nos volumes do 1º, 2º e 3º ano. Já nas situações partitivas do 4º e 5º ano, identificamos um avanço em relação ao conjunto numérico abordado - Naturais e Racionais -, embora para as representações simbólicas utilizadas se priorize a apresentação das situações em língua natural e ilustração, que não auxiliam a resolução das situações.

Figura 5: Exemplos da subclasse (P3)

Língua natural com ilustração - 1º ano (DANTE, 2017a, p. 46)



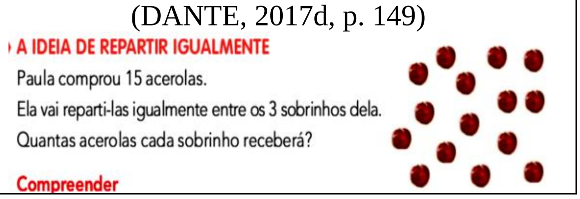
Língua natural com ilustração - 2º ano (DANTE, 2017b, p. 154)



Língua natural – 3º ano (DANTE, 2017c, p. 182)

Se 1 kg de farinha foi separado em 5 vasilhas, todas com a mesma quantidade, então cada vasilha ficará com 200 gramas de farinha.
1 000 ÷ 5 = 200, pois 5 × 200 = 1 000.

Língua natural com ilustração – 4º ano (DANTE, 2017d, p. 149)



Fonte: Adaptações das autoras

Na Figura 6 apresentamos uma situação partitiva retirada do quinto volume, apresentada em língua natural, com valores numéricos na casa das centenas.

Figura 6: Situação da subclasse (P3)

Enunciado de P3 (Dantee, 2017e, p. 84)

Em uma fábrica trabalham 456 funcionários, distribuídos igualmente em 3 setores. Quantos funcionários trabalham em cada setor?

Esquema sagital

Quantidade de setores	Quantidade de funcionários
1 →	x
3 →	456

Fonte: Autoras

O esquema sagital que permite interpretar a primeira grandeza é representado pela quantidade de setores da fábrica (conjunto de partida), e a segunda grandeza é representada pela quantidade de funcionários (conjunto de chegada). Nesta subclasse se situação, a *correspondência* se estabelece pela relação "3 setores têm 456 funcionários". Também é possível identificar a relação de *dependência* entre esses conjuntos, pois a "quantidade de funcionários depende da quantidade de setores". Outra relação manifestada está expressa quando se altera a quantidade de setores, pois também se altera a quantidade de funcionários. Nesse caso, temos como *variável dependente* a quantidade de funcionários, e *variável independente* a quantidade de setores.

Nesta subclasse de situações, a partir do enunciado, podem ser identificas as ideias-base de *correspondência*, *dependência* e *variável*. A ideia base de regularidade pode ser identificada a partir da resolução da situação, o que também ocorre para a ideia-base de generalização, desde que com apoio do professor, indicando aos alunos reflexões e encaminhamentos, se assim desejar, acerca destas ideias-base. Enfatizamos, contudo, que, neste estudo, estamos analisando o enunciado das situações, não olhando para possíveis resoluções, visto que o estudo não envolve participantes resolvendo tais situações.

De acordo com Gitirana *et al.* (2014), as situações de Quarta Proporcional (P4) envolvem uma proporção, pois conhecemos um valor qualquer relacionado a outras duas quantidades (m_1 e m_2), em dois tipos de medidas. No entanto, a situação se torna mais fácil ou difícil dependendo dos valores dados numa mesma grandeza serem ou não múltiplos um do outro.

As situações da subclasse P4 foram identificadas nos volumes do 3º, 4º e 5º ano. Situações envolvendo dezenas e centenas foram contempladas. Uma única situação foi apresentada no terceiro volume (indicado na Figura 11). Na Tabela 5 apresentamos uma análise dos valores atribuídos às variáveis didáticas (ii), abrangência numérica e (iii) representação simbólica para a classe P4.

Tabela 5: Valores das variáveis didáticas para P4 nos volumes do 3º ao 5º ano

Ano/ Livro	**Abrangência numérica**								**Representação simbólica**		
	a	b	c	d	e	f	g	h	LN	I	AV
3º	-	1	-	-	-	-	-	-	1	-	-
4º	2	1	-	-	-	2	-	-	3	2	-
5º	1	2	-	-	-	5	-	1	7	2	-

Fonte: Autoras

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Na Figura 7 apresentamos um exemplo de situação retirada de cada volume, envolvendo P4. Analisamos uma situação do quinto volume, apresentada em língua natural e ilustração, com valores numéricos na casa das centenas, para explicitar as ideias-base de função que podem ser manifestadas em situações de (P4).

Figura 7: Situação da subclasse (P4)

<table>
<tr><td>Língua natural – 3º ano (DANTE, 2017c, p. 198)
Quando dá 2 voltas em uma praça, Marcelo percorre 100 metros. Então, quando dá 8 voltas ele percorre 400 metros.
8 = 4 × 2   4 × 100 = 400</td><td>Língua natural com ilustração – 4º ano (DANTE, 2017d, p. 170)
Se Marcela comprar 6 cadernos, todos de mesmo preço, então ela vai gastar R$ 75,00.
Se comprar apenas 2 desses cadernos, então quanto ela vai gastar?
</td></tr>
<tr><td>Língua natural com ilustração – 5º ano (DANTE, 2017e, p. 81)
Pedro percorreu 160 metros dando 3 voltas na pista. Se ele der 6 voltas ness pista, então quantos metros ele vai percorrer?
Complete o esquema e responda.
× 2   3 voltas → 160   × 2
6 voltas → ?
160 × 2 = 320
</td><td>Esquema sagital<table><tr><th>Quantidade de voltas</th><th>Quantidade em metros</th></tr><tr><td>3 →</td><td>160</td></tr><tr><td>6 →</td><td>x</td></tr></table></td></tr>
</table>

Fonte: Autoras

As duas grandezas envolvidas na situação, extraída do 5º ano, referem-se a voltas em uma pista e distância percorrida, em metros. Desse modo, a primeira grandeza é representada pela quantidade de voltas (conjunto de partida), e a segunda grandeza é representada pela distância percorrida (conjunto de chegada). Nas situações de Quarta Proporcional, a partir do enunciado, são explicitadas as seguintes ideias-base: *correspondência*, *dependência* e *variável*. A relação de *correspondência* associa a quantidade de voltas e a distância percorrida em metros.

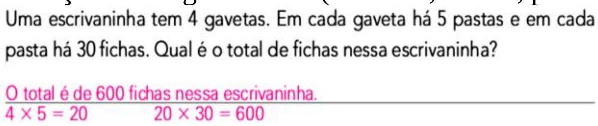
A relação de *dependência* se estabelece entre esses conjuntos, em que a distância percorrida depende da quantidade de voltas na praça/pista. Nesse sentido, conforme se altera a quantidade de voltas, altera-se também a distância percorrida. Logo, temos como *variável dependente* a distância percorrida em metros, e *variável independente* a quantidade de voltas na pista.

As situações de Quarta Proporcional não apresentam informações sobre a grandeza correspondente ao valor unitário, embora haja uma proporcionalidade múltipla entre valores de uma mesma grandeza (quantidade de voltas). Por esse motivo, a ideia de *regularidade* se torna mais difícil de ser explicitada na resolução, pois depende de valores proporcionais muitos para muitos.

De acordo com Gitirana *et al.* (2014), a proporção múltipla é a composição de duas proporções simples. Nesse caso, quando se altera o valor de qualquer uma das grandezas, alteram-se todas as demais grandezas. Vergnaud (1996) esclarece que na proporção múltipla a composição de duas proporções simples origina outra relação de proporcionalidade, como veremos na Figura 8, na situação extraída do quarto volume.

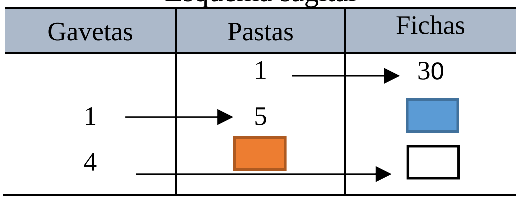
Figura 8: Situação da subclasse (P5)

Situação em lingua natural (DANTE, 2017d, p. 133)


Uma escrivaninha tem 4 gavetas. Em cada gaveta há 5 pastas e em cada pasta há 30 fichas. Qual é o total de fichas nessa escrivaninha?

O total é de 600 fichas nessa escrivaninha.
4 × 5 = 20 20 × 30 = 600

Esquema sagital



Fonte: Autoras

Apenas uma situação de proporção múltipla foi identificada em toda a Coleção Ápis, apresentada em língua natural, no quarto volume. Os valores numéricos estão na casa das centenas. O contexto do enunciado é considerado fácil para o aluno. Podem ser mobilizadas nessa classe de situações as ideias-base de *correspondência, dependência* e *variável*.

A ideia de *correspondência* se identifica na seguinte relação: “para cada gaveta há 5 pastas” e “cada pasta tem 30 fichas”, ou, ainda, uma correspondência direta seria “para cada gaveta há 150 fichas”. A ideia de *dependência* se identifica por meio da seguinte relação: “a quantidade de fichas depende da quantidade de gavetas”. Conforme variamos a quantidade de gavetas, alteramos também a quantidade de fichas, o que nos permite escrever como *variável dependente* a quantidade de fichas, e *variável independente* a quantidade de gavetas.

A classe de função bilinear envolve seis grandezas (três pares da mesma natureza), em que uma delas é proporcional às outras duas, separadamente (GITIRANA *et al.*, 2014). No quarto volume, identificamos uma situação desta classe, envolvendo a distância percorrida por um ônibus quando se desloca entre duas cidades, três vezes na semana. O conjunto numérico é dos Números Naturais, e os valores numéricos estão na casa dos milhares. O enunciado é dado em língua natural com ilustração. Além do raciocínio envolvido na classe P7 estar entre as situações mais complexas das relações quaternárias, os valores numéricos também podem acarretar maior nível de dificuldade para os alunos, visto que apenas uma situação desta classe foi apresentada no 4º ano.

Na Figura 9 apresentamos o enunciado da única situação da classe P7 identificada no quinto volume, e o esquema sagital que permite resolvê-la, com base em Vergnaud (1996).

Figura 9: Função Bilinear (P7)

Enunciado de P7 (DANTE, 2017e, p. 83)

Segundo especialistas, o leite é essencial para o desenvolvimento das crianças, pois é um alimento com grande concentração de cálcio, importante na formação óssea.
Uma creche abriga 365 crianças. Durante o dia são servidos 2 copos de leite para cada criança.
Quantos copos de leite são consumidos em 2 semanas nessa creche? 10220 copos de leite.

Esquema Sagital

Crianças \ Dias	1	2	3	...	y
1	2	4	6	...	2y
2	4	8	12	...	...
...	...	...	...	...	...
x	2x	...	...	...	2xy

Fonte: Autoras

Essa classe estabelece uma relação funcional bilinear de duas quantidades *variáveis independentes*, isto é, a quantidade de crianças e a quantidade de dias. A *correspondência* está relacionada aos 2 copos de leite que cada criança toma por dia. Já a *dependência* está vinculada à quantidade de copos de leite que as crianças tomam no decorrer dos dias. Nessa classe, a partir do enunciado, podem ser explicitadas as ideias-base de *correspondência*, *dependência* e *variável*.

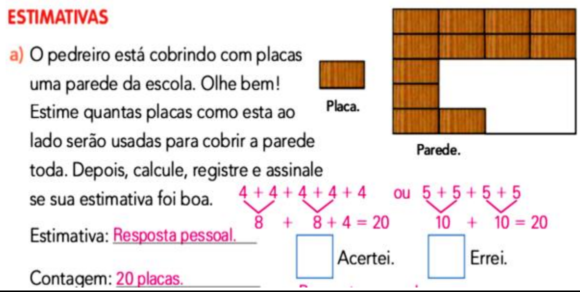
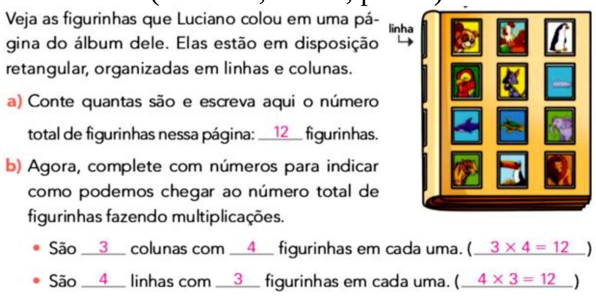
Análise das situações envolvendo relações ternárias

A relação ternária compreende duas classes: Produto Cartesiano e Comparação Multiplicativa. O Produto Cartesiano está subdividido em Configuração retangular (P8) e Combinatória (P9). A Comparação Multiplicativa está subdividida em relação desconhecida (P10), referido desconhecido (P11) e referente desconhecido (P12).

As situações da subclasse de Configuração Retangular (P8) assumem significado de “produto cartesiano”, que ocorre quando uma nova grandeza é obtida como produto de duas (ou mais) outras grandezas (GITIRANA *et al.*, 2014). São encontradas situações que envolvem área e volume, sem que uma das grandezas dependa da outra (BELLEMAIN, 2021). No caso da Coleção Ápis, identificamos ao menos uma situação em cada volume, sendo uma situação nos volumes do 1º e 2º ano, três situações no 3º ano, 10 no 4º ano e 27 situações no 5º ano. Neste último caso, ressaltamos que a maioria das situações envolvia volume, também considerado nesta análise, uma vez que, para Vergnaud (1996), o volume é proporcional à área da base quando a altura se mantém constante ou vice-versa, ou seja, uma das características desta subclasse é a ideia de *dependência*, e o volume depende da área da base e da altura.

Em todas as situações o conjunto numérico é o dos Naturais, e os valores numéricos são menores do que 100. Nas situações envolvendo o cálculo de área, em todos os volumes, há predominância de uma ilustração para esclarecer ao aluno a situação. Na Figura 10 trazemos exemplos de situações extraídas dos volumes do 1º ao 4º ano.

Figura 10: Exemplos de situações da subclasse P8

Língua natural com apoio visual - 1º ano (DANTE, 2017a, p. 200)	Língua natural com apoio visual – 2º ano (DANTE, 2017b, p. 193)
	
Língua natural com ilustração – 3º ano (DANTE, 2017c, p. 122)	Língua natural com apoio visual – 4º ano (DANTE, 2017d, p. 123)
	

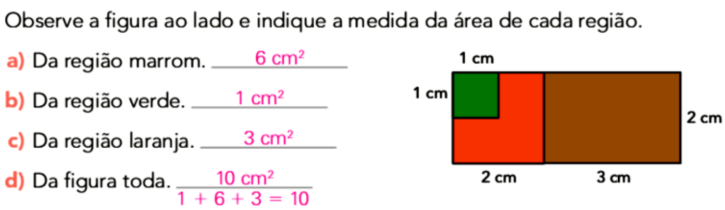
Fonte: Adaptações das autoras

Nas situações envolvendo configuração retangular, em especial as indicadas na Figura 10, destacam-se as quantidades discretas. Somente no quinto volume situações envolvendo quantidades contínuas foram identificadas, especialmente para abordar as ideias de área e de volume. Não é possível identificar um avanço da abrangência numérica para esta classe nos diferentes volumes, o que é esperado para o raciocínio nela envolvido.

Na Figura 11 apresentamos uma situação de P8, extraída de Dante (2017e), referente ao 5º ano, em que analisamos, detalhadamente, o raciocínio multiplicativo e a mobilização das ideias-base de correspondência e dependência.

Figura 11: Situação da subclasse (P8)

Enunciado de P8 (DANTE, 2017e, p. 213)



Esquema sagital

	Comprimento
Largura	?
	Área

Fonte: Autoras

Para entender o esquema sagital representado na Figura 11, podemos interpretá-lo como dupla proporcionalidade. Se fixarmos o comprimento, obtemos uma proporção simples entre largura e área (GITIRANA *et al.*, 2014). Na região marrom da Figura 11, por exemplo, podemos reescrever o esquema sagital conforme apresentado na Figura 12.

Figura 12: Configuração retangular interpretada como proporção simples

Largura	Área
1	3
2	x

Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009)

Da mesma forma, podemos estabelecer proporcionalidade entre comprimento e área, se fixarmos a largura. A compreensão desse tipo de situação como multiplicativa ocorre por entender a formação retangular "linha por coluna" com valores naturais (GITIRANA *et al.*, 2014).

No que diz respeito às ideias-base de função, inferimos que a ideia de *correspondência* é interpretada por "linha por coluna", ou, no caso específico da situação ilustrada na Figura 11, "largura por comprimento". Outra ideia identificada é a *dependência*, dada por "a área depende da largura e do comprimento". No entanto, nessa subclasse de situações não é possível verificar a ideia de *variável*, visto que a correspondência está relacionada ao número fixo de "linha por coluna", o que nos permite inferir que as ideias de *regularidade* e de *generalização* também não são passiveis de serem identificadas.

As situações de Combinatória (P9) envolvem quantidade discreta e contagem, pois nesse caso temos duas grandezas que se relacionam para obter outra grandeza. Na Figura 13 apresentamos um exemplo de situações de cada um dos volumes. No 2º ano, identificamos uma situação; no 3º ano, duas situações contendo ilustração; no 4º ano, três situações com ilustração e apoio visual; e no 5º ano, quatro situações, sendo que uma delas contemplou valores decimais na ordem das dezenas. Para as demais situações, a predominância é o conjunto dos Naturais, na casa das dezenas. Somente uma situação no 3º ano apresentou apoio visual na explicação da resolução da situação. Nos demais volumes, o enunciado foi apresentado em língua natural, e em poucos casos continha ilustração.

Figura 13: Exemplos de situações da subclasse (P9)

Língua natural - 2º ano (DANTE, 2017b, p. 134)

Se você tem 2 tipos de pão (filão e pão de forma) e 3 opções de recheio (manteiga, queijo e presunto), então quantos lanches diferentes você pode fazer com 1 tipo de pão e 1 opção de recheio? 6 lanches.
2 + 2 + 2 = 6 ou 3 + 3 = 6

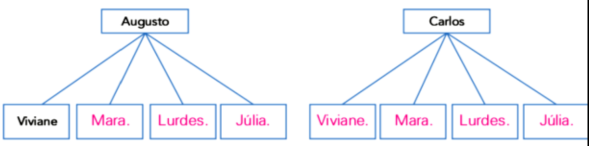
Língua natural - 4º ano (DANTE, 2017d, p. 124)

Uma lanchonete oferece 4 sabores de suco natural: laranja, abacaxi, açaí e manga.
Os sucos são servidos em copos de 3 tipos: pequeno, médio e grande.
De quantas maneiras diferentes podemos pedir um suco?

Língua natural com ilustração - 3º ano (DANTE, 2017c, p. 123)

Para representar a turma do 3º ano **A** será escolhida 1 dupla de alunos, formada por 1 menino e 1 menina. Veja os candidatos.

a) Para saber todas as possibilidades de duplas, podemos usar uma **árvore de possibilidades**. Observe e complete.



b) Agora, responda: Quantos meninos são candidatos? 2 meninos.

c) E quantas meninas? 4 meninas.

d) Quantas duplas é possível formar com esses candidatos? 8 duplas.

Fonte: Autoras

No que diz respeito às ideias-base de função identificadas a partir do enunciado da situação do 5º ano (Figura 14), é possível identificar a ideia de *dependência*, dada por "A formação resulta do tipo de lanche e do sabor do suco escolhido". Embora seja possível identificar a seguinte relação "para cada tipo de lanche, há um tipo de suco diferente", não podemos inferir que esta ideia de *correspondência* esteja relacionada à função, visto que a função está associada a uma relação unívoca, enquanto o produto cartesiano não é unívoco, envolvendo a multiplicação entre pares ordenados de conjuntos distintos. Na Figura 14 apresentamos o esquema sagital referente à situação do quinto volume, indicando o produto cartesiano ente as grandezas "suco e lanche".

Figura 14: Esquema sagital de (P9)

Língua natural com ilustração - 5º ano (DANTE, 2017e, p. 81)

NÚMERO DE POSSIBILIDADES

Uma lanchonete oferece 3 tipos de lanche no pão de fôrma (queijo, frango e patê de berinjela) e 4 tipos de suco de fruta (laranja, uva, morango e acerola).

a) Quantas são as possibilidades de escolha de 1 lanche e 1 suco? 12 possibilidades.

Lanche de queijo e suco de laranja.

Esquema sagital

Suco	Lanche Q	F	P
L	(L, Q)	(L, F)	(L, P)
U	(U, Q)	(U, F)	(U, P)
M	(M, Q)	(M, F)	(M, P)
A	(A, Q)	(A, F)	(A, P)

Fonte: Autoras

Nesse caso, há duas grandezas (sabores de lanche e de suco); ao realizarmos sua junção, obtemos outra grandeza, relativa à combinação desses alimentos, pão e bebida.

As situações da classe de Comparação Multiplicativa comparam, de forma multiplicativa, duas grandezas de mesma natureza por um escalar, chamado de relação ou razão (GITIRANA *et al.*, 2014). As duas grandezas são nomeadas referente e referido. Essa classe subdivide-se em 3 subclasses: relação desconhecida (P10), referido desconhecido (P11) e referente desconhecido (P12).

No terceiro volume identificamos duas situações envolvendo Naturais na ordem das dezenas, e duas envolvendo decimais e centenas, todas apresentadas em língua natural. No quarto volume, 11 situações foram identificadas: uma envolvendo Naturais e centenas, uma envolvendo a ideia de porcentagem com aumento, e 9 envolvendo frações; do total, 10 situações foram apresentadas em língua natural e uma contendo ilustração. No quinto volume foram identificadas 8 situações: duas envolvendo Naturais e dezenas, 4 decimais e dezenas, uma decimal e dezena, e uma envolvendo frações, todas em língua natural. Na Figura 15 apresentamos situações desta classe.

Figura 15: Exemplos de situações da subclasse (P10) e (P11)

(P11) Língua natural (DANTE, 2017c, p. 142).

Raul está arrumando os livros em 3 prateleiras: na de cima ele vai deixar 8 livros, na do meio vai colocar o triplo de livros da prateleira de cima e na de baixo vai colocar o dobro de livros da prateleira do meio. Quantos livros ele arrumará no total?

(P11) Língua natural (DANTE, 2017d, p. 213).

João tinha R$ 60,00 e gastou 50% dessa quantia.

a) Quanto ele gastou? R$ 30,00 b) Com quanto ainda ficou? R$ 30,00

50% de 60 é o mesmo que $\frac{1}{2}$ de 60 = 30.

(P10) Língua natural com ilustração (DANTE, 2017e, p. 157).

O lixo pode ter diferentes destinos dependendo da natureza dele: ir para o aterro sanitário (ser enterrado), ser usado para produzir adubo, ser incinerado (por exemplo, o lixo hospitalar) ou ser reciclado (isto é, reaproveitado).
Em uma cidade foram coletadas 180 toneladas de lixo reciclável em um mês, nas seguintes quantidades.

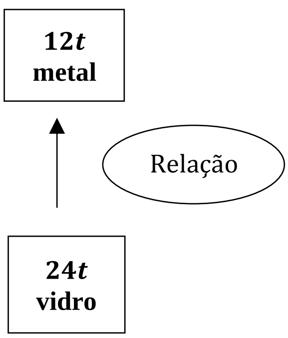
a) Quantas toneladas de cada material foram coletadas?

Papel: 90 t; plástico: 54 t; metal: 12 t; vidro: 24 t.

b) Que fração indica a quantidade de metal em relação à de vidro? $\frac{1}{2}$

Esquema sagital item b)

Relação desconhecida



Fonte: Autoras

Na análise do item (b) da situação classificada como (P10) identificada no livro do 5º ano, a ideia de *correspondência* é dada pela relação “para cada tonelada de vidro, tem-se a metade de uma tonelada de metal”. A relação de *dependência* é expressa por “quantidade de metal depende da quantidade de vidro”. A *variável dependente* é a quantidade de metal, e *variável independente* a quantidade de vidro. Inferimos que, nas situações da classe de comparação multiplicativa, é possível explicitar as ideias-base de *correspondência*, *dependência* e *variável*.

À guisa de conclusões

Os resultados desta investigação mostram que os problemas multiplicativos envolvendo relações quaternárias permitem manter relações entre conjuntos, de modo que exista uma *correspondência* entre eles e vice-versa. Por se tratar de uma correspondência envolvendo proporcionalidade, essas relações mantêm a correspondência do tipo proporcionalidade: se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então, $a \cdot d = b \cdot c$, quando b e d são diferentes de zero. Essa relação permite estabelecer aproximações entre o Campo Conceitual Multiplicativo, as ideias-base de função, e destas com a proporcionalidade, conforme indica a BNCC (BRASIL, 2018).

O maior número de situações multiplicativas presentes na coleção é referente às relações quaternárias (294 situações) e à subclasse (P1) multiplicação um para muitos. Destas, 168 situações foram identificadas em todos os volumes, um avanço no que se refere à abrangência numérica, abordando situações envolvendo Naturais e Racionais (decimais e frações) e explicitando todas as ideias-base de função nas situações da subclasse (P1).

Na subclasse de proporção múltipla (P5), uma situação foi identificada em toda a coleção, em que pese que este tipo de situação favoreça a aprendizagem de outros campos da Matemática, como a Geometria ou a Probabilidade e Estatística. Para a classe de função bilinear (P7), duas situações foram identificadas, uma no 4º ano e outra no 5º ano. Nessas classes podem ser explicitadas as ideias-base de *correspondência*, *dependência* e *variável*. Defendemos a importância de apresentar aos estudantes a variedade de situações, inclusive, as diferentes subclasses, que podem favorecer a conceitualização das ideias envolvidas na estrutura multiplicativa. Também acreditamos que as ideias-base de regularidade e generalização possam ser manifestadas em situações multiplicativas desde os anos iniciais, após serem adaptadas, corroborando com as pesquisas de Pavan (2010) e Silva (2021).

Para as situações envolvendo relações ternárias foram identificadas 75 situações. A subclasse de configuração retangular (P8) apresentou o maior número (42 situações), tendo sido consideradas as situações envolvendo cálculo de área e volume, pois o volume é proporcional à área da base quando a altura se mantém constante ou vice-versa. Uma das características desta subclasse é a ideia de *dependência*, uma vez que o volume depende da área da base e da altura. Os resultados da análise mostram que as ideias-base de *correspondência* e *dependência* podem ser explicitadas nas subclasses (P8) e (P9), enquanto na classe de comparação multiplicativa, as ideias-base de *correspondência, dependência* e *variável* podem ser identificadas a partir dos enunciados das situações.

As análises desta investigação indicam que a variável didática (iii) representação simbólica utilizada no enunciado das situações expressa que o apoio visual foi fornecido em menor número em todas as classes de situações da coleção, ou seja, em 33 situações de um total de 369, sendo privilegiada a ilustração, que não interfere ou auxilia na resolução da situação.

Sugerimos que o trabalho do professor, enquanto mediador do processo didático, é decisivo para colocar em destaque a escolha das situações, com vistas ao desenvolvimento do pensamento funcional desde os anos iniciais, por meio de uma variedade de situações multiplicativas.

A análise de uma coleção de livros didáticos revela que os enunciados das situações multiplicativas das subclasses P1, P2, P3, P4, P5, P7 e P10 permitem mobilizar diretamente as ideias-base de *correspondência*, *dependência* e *variável*. No entanto, sugerimos que o professor faça adaptações, incluindo perguntas que permitam ao estudante verificar a regularidade e, por conseguinte, a generalização. Estudos como os de Pavan (2010), Silva (2021) e Dezilio (2022) explicitam situações puramente multiplicativas ou mistas que foram elaboradas para abordar todas as ideias-base de função nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Já as situações multiplicativas das subclasses P8 e P9 possibilitam diretamente a manifestação das ideias de *correspondência* e *dependência*. Nossas análises mostram que, nessas subclasses, as demais ideias-base de função não são facilmente mobilizadas, pois não possibilitam a condição inicial para a existência de uma função, de modo que para cada elemento do conjunto A existe um único elemento correspondente no conjunto B.

Inferimos que os enunciados de situações multiplicativas identificadas em uma coleção de livros didáticos não explicitam todas as ideias-base de função, o que demanda trabalho do professor para o desenvolvimento do pensamento funcional desde os anos iniciais. Sugerimos que, em sua formação inicial e/ou continuada, o professor tenha estudos acerca de ideias-base de função e sua articulação com situações do campo multiplicativo.

A partir das análises realizadas nos enunciados das situações multiplicativas de uma coleção de livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, e apoiados em Vergnaud (1996), Magina e Porto (2018) e Pavan (2010), esta pesquisa explicitou as ideias-base de função (*correspondência, dependência* e *variável)* em situações do campo multiplicativo, possíveis de serem propostas aos estudantes desde os Anos Iniciais.

Referências

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis, v.11, n. 2, p. 109-141, 2016.

BELLEMAIN, P. M. B. Contribuições da teoria dos campos conceituais para a didática das grandezas geométricas. **VII Seminário internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Uberlândia, Minas Gerais, Brasil, 2021.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, [2018]. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 3 jan. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2019:** Guia digital. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, [2019]. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-pnld/item/11986-escolha-pnld-2019?highlight=WyJlIiwiYSIsIidhIiwiZXNjb2xoYSIsImUgXHUwMGUwIiwiZSBhIGVzY29saGEiLCJhIGVzY29saGEiXQ==. Acesso em: 3 jan. 2022.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. 2ª edição. Lisboa: Gradiva, 1998.

DEZILIO, K. **Ideias de função e problemas mistos:** um estudo com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. 2022. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2022.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática: 1º ano.** 3ª Edição. São Paulo: Ática, 2017a.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática: 2º ano.** 3ª Edição. São Paulo: Ática, 2017b.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática: 3º ano.** 3ª Edição. São Paulo: Ática, 2017c.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática: 4º ano.** 3ª Edição. São Paulo: Ática, 2017d.

DANTE, L. R. **Ápis Matemática: 5º ano.** 3ª Edição. São Paulo: Ática, 2017e.

FREITAS, R. L.; ALMOULOUD, S. Análise de livro didáctico e a construção de um processo de ensino por meio de tarefas e técnicas: contribuições da TAD. In: SALAZAR, J. F.; GUERRA, F. U. (Orgs.). **Investigaciones En Educacion Matematica.** 1ª Ed. Lima: Fondo editorial, 2016. p. 217-237.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. **Repensando multiplicação e divisão.** Contribuição da teoria dos campos conceituais. 1ª Edição. São Paulo: Editora PROEM, 2014.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio:** volume 1. 9ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MAGINA, S. M. P.; PORTO, R. S. O. É possível se ter raciocínio funcional no nível dos anos iniciais? Uma investigação com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. **VII Seminário internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Foz do Iguaçu, Paraná, Brasil, 2018.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. Investigando o campo conceitual das funções: primeiros resultados. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**. Cascavel, v. 2, n. 3, p. 411-431, dez. 2018.

PAVAN, L. R. A Mobilização das Ideias Básicas do Conceito de Função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental em Situações-Problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas**.** 2010. **Dissertação** (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

SILVA, L. D. C. P. As formas operatória e predicativa do conhecimento Manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de Estrutura multiplicativa: uma investigação das ideias base de Função. 2021. **Tese** (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021.

TINOCO, L. A. A. **Construindo o conceito de Função.** 1ª Edição. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2002.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 2.3, pp. 133 a 170, 1990.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas.** Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 155-191.

VERGNAUD, G. **A criança, a Matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. 1ª Edição. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

Recebido em: 26 de fevereiro de 2022
Aprovado em: 27 de julho de 2022