

TRAÇOS DOS EQUIPAMENTOS PRAXEOLÓGICOS DE ALGUNS ESTUDANTES A PARTIR DE REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS NAS RESOLUÇÕES DE UMA TAREFA

DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.25.345-362>

Jany Santos Souza Goulart¹
Claudiano Goulart²

Resumo: Este artigo tem como objetivo analisar uma tarefa envolvendo a representação de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas no espaço euclidiano tridimensional à luz da Teoria Antropológica do Didático – TAD. A escolha da questão ocorreu após a correção de uma das avaliações de Geometria Analítica, pertencente à grade curricular do Curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Brasileira. A partir de distintos esboços ostensivos, foi possível promover inferências acerca dos equipamentos praxeológicos de alguns estudantes por meio das variações apresentadas enquanto soluções. Como via metodológica, optou-se por uma análise praxeológica, a qual viabilizou mapear as técnicas, tecnologias e teorias evocadas no processo representacional. Os resultados apontam para a emergência de um olhar mais atento para o trânsito entre representações no plano e espaço.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático. Geometria Analítica. Equipamento Praxeológico. Praxeologias Pessoais.

TRACES OF THE PRAXEOLOGICAL EQUIPMENT OF SOME STUDENTS CONSIDERING THEIR GEOMETRIC REPRESENTATIONS IN SOLVING A TASK

Abstract: This article aims to analyze a task involving the representation of points in a Cartesian coordinate system in the three-dimensional Euclidean space in the light of the anthropological theory of the didactic – ATD. The choice of the question occurred after the correction of one of the Analytical Geometry assessments, belonging to the curriculum of a mathematics degree course at a Brazilian university. Considering the different ostensive sketches, it was possible to promote inferences about some students' praxeological equipment through the variations presented as solutions. As a methodological approach, a praxeological analysis was chosen, which made it possible to map the techniques, technologies, and theories evoked in the representational process. The results point to the emergence of a closer noticing of the transit between representations in the plane and space.

Keywords: Anthropological theory of the didactic. Analytical geometry. Praxeological equipment. Personal praxeologies.

Introdução

O acesso ao saber, geralmente, se dá por intermédio de múltiplos caminhos que, normalmente, conduzem e são refletidos em relações pessoais dos sujeitos para com os objetos sobre os quais almejam ter domínio a partir de um determinado conhecimento. Na interpretação

¹ Doutora em Ensino Filosofia e História das Ciências com área de concentração em Educação Científica e Formação de Professores pelo Programa de Pós Graduação em Ensino Filosofia e História das Ciências – PPGEFHC (UFBA/UEFS). Professora Adjunto do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, e-mail: jssgoulart@uefs.br.

² Doutor em Matemática com área de concentração em Geometria Diferencial pela Universidade de Brasília – UnB. Professor Titular do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS, e-mail: cgoulart@uefs.br.

de Conne (1996), a fronteira entre o saber e o conhecimento se assenta na utilidade, pois “um conhecimento assim identificado é um saber, é um conhecimento útil, utilizável, porque permite ao sujeito agir sobre a representação” (CONNE, 1996, p.231). Em contrapartida, no contexto da Teoria Antropológica do Didático – TAD, concebe-se que “conhecer um objeto O [...] é ter uma relação com O” (CHEVALLARD, 1996, p.128). No âmbito educacional, essas concepções têm um elevado grau de relevância e estão presentes no cerne do processo de ensino e aprendizagem, as quais se ancoram em Sistemas Didáticos – SD que têm, como estrutura de base, as relações entre professor, estudantes e saber (BROUSSEAU, 2008).

A partir desta perspectiva, é pertinente acrescentar que a relação institucional de um objeto, em determinada posição institucional, é moldada e remoldada por um conjunto de tarefas que devem ser cumpridas, por intermédio de algumas técnicas, pelas pessoas que ocupam essa posição. Assim, “é frente ao cumprimento de diferentes tarefas que a pessoa, ao longo de sua vida, em diversas instituições, nas quais ela está assujeitada, sucessiva ou simultaneamente, estabelece relações pessoais com o objeto considerado” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 6). Essa afirmação se entrelaça ao que se observa nas avaliações, pois as mesmas se apresentam como um dos instrumentos de verificação dos níveis de conhecimento e aprendizagem. Soma-se a este aspecto, a interpretação de revelar traços ostensivos inerentes à bagagem praxeológica do sujeito, o que significa dizer que, por meio dos registros de uma gestão resolutiva, é viável identificar traços do conjunto de relações que o estudante desenvolveu com o objeto ao longo do tempo.

A escolha da tarefa ocorreu a partir de dois aspectos: o primeiro, consiste em dificuldades detectadas em representações de objetos tridimensionais em sua forma planejada, em que se faz necessária a implementação da técnica “projeção paralela” (LEHMANN, 1991), comumente empregada ao esboçar uma planificação de um objeto espacial. O segundo, ratifica este obstáculo ao identificar limitações na implantação dessa técnica a partir do que foi revelado no registro resolutivo de tarefas avaliativas. Esse fato permitiu direcionar o olhar para a gestão dessas representações, em termos praxeológicos, já que, segundo Chevallard (1998, p.91), “toda atividade humana pode ser modelada em termos de praxeologias”.

O desenho do texto foi delineado a partir de três eixos: em primeiro lugar, foca-se em alguns pressupostos da TAD que embasam e fundamentam a argumentação. Em seguida, apresentam-se os registros que subsidiaram a análise da gestão representacional dos pontos em um sistema de coordenadas cartesianas no espaço euclidiano, viabilizando estabelecer confrontações com a espera institucional. E, por fim, esboçam-se as praxeologias pessoais (CROSET e CHAACHOUA, 2016) mobilizadas pelos estudantes, o que permitiu identificar

elementos inerentes aos equipamentos praxeológicos (CHEVALLARD, 2009) desses sujeitos.

Alguns pressupostos da TAD

A Teoria Antropológica do Didático – TAD tem como base a premissa de que “toda praxeologia é um sistema de tarefas em torno do qual técnicas, tecnologias e teorias são desenvolvidas e organizadas” (CHEVALLARD, 1997, p. 17, tradução nossa³). Segundo esse mesmo direcionamento, o autor ora citado estruturou a organização praxeológica:

[...] em torno de um tipo de tarefas T, que encontramos em princípio, um triplete formado de uma técnica (pelo menos), τ , de uma tecnologia de τ , θ e uma teoria de θ , Θ . O conjunto, denotado $[T / \tau / \theta / \Theta]$, constitui uma praxeologia específica, este qualificador significa que se trata de uma praxeologia relacionada a um único tipo de tarefas, T. Essa praxeologia – ou organização praxeológica – portanto, consiste em um bloco técnico prático, $[T / \tau]$, e um bloco tecnológico-teórico, $[\theta / \Theta]$ (CHEVALLARD, 1998, p. 5, tradução nossa⁴).

Em sintonia com a abordagem descrita, Chaachoua e Bessot (2016, p. 3) defendem “que um dos objetos de observação do pesquisador são tarefas e que um tipo de tarefa é definido por um verbo de ação e um complemento fixo”, pressuposto que dialoga diretamente com a perspectiva antropológica em que não há práxis sem logoi. Neste sentido, adotou-se como ponto de partida uma argumentação descritiva da tarefa, na busca por um maior detalhamento das técnicas empregadas em cada esboço ostensivo dos pontos, frente ao que foi solicitado no enunciado.

Agrega-se a esse entendimento que as organizações matemáticas são ativadas por meio da manipulação ostensiva ao evocar não ostensivos, isto é, o domínio dos objetos ostensivos permite dar forma à estruturação praxeológica própria da TAD (CHEVALLARD, 1999). Em sentido análogo, Bosch e Chevallard (1999, p. 26, tradução nossa⁵) pontuam que: “os ostensivos têm uma dupla função: eles têm um ‘valor semiótico’, ligado ao seu poder de representar objetos não ostensivos, e um ‘valor instrumental’, ou seja, sua função como ferramentas de práticas

³ Le socle de toute praxéologie est un système de tâches autour duquel se développent et s’organisent techniques, technologies, théories.

⁴ Autour d’un type de tâches T, on trouve ainsi, en principe, un triplet formé d’une technique (au moins), τ , d’une technologie de τ , θ , et d’une théorie de θ , Θ . Le tout, noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie ponctuelle, ce qualificatif signifiant qu’il s’agit d’une praxéologie relative à un unique type de tâches, T. Une telle praxéologie – ou organisation praxéologique – est donc constituée d’un bloc pratique-technique, $[T/\tau]$, et d’un bloc technico-théorique, $[\theta/\Theta]$.

⁵ “les ostensifs ont une double fonction: ils ont une “valeur sémiotique”, liée à leur pouvoir de représentation d’objets non ostensibles, et une “valeur instrumentale”, c’est-à-dire leur fonction en tant qu’outils de pratiques mathématiques”.

matemáticas”.

Neste contexto, admite-se que as técnicas empregadas nas gestões estruturais ostensivas, além de fornecer características do bloco tecnológico-teórico, comunicam traços da bagagem praxeológica dos estudantes, que nem sempre se encontra ajustada à espera institucional. A respeito, Chevallard (2019) destaca a necessidade em diferenciar as relações estabelecidas entre pessoas (x) e objetos (o) desenvolvidas no âmbito institucional, ou mais exatamente, as posições que x ocupam nas instituições e suas interações para com os objetos.

Denotamos por $R_I(p, o)$ a *relação institucional (ou posicional) de p para o* . $R_I(p, o)$ descreve como a relação pessoal de uma pessoa x com o deveria ser idealmente se x ocupasse a posição p em I . Nesse caso, dizemos que $R(x, o)$ está em conformidade com $R_I(p, o)$ e escreva: $R(x, o) \cong R_I(p, o)$. Quando uma pessoa x ocupa a posição p em I , dizemos que x está sujeito a p ou, mais concretamente, às relações institucionais $R_I(p, o)$, para todos os objetos o que são conhecidos por p (isto é, tais que $R_I(p, o) \neq \emptyset$): x é dito sujeito de I na posição p . Se $R(x, o) \cong R_I(p, o)$, diz-se que a pessoa x é um bom sujeito de I na posição p em relação a o . Claro que x será considerado um sujeito ruim se $R(x, o) \not\cong R_I(p, o)$ (CHEVALLARD, 2019, p.78, grifos do autor, tradução nossa⁶).

Para Chevallard (2019), são as sujeições posicionais às quais x foi submetido ao longo da vida que fazem dela uma pessoa. Isso significa dizer que “a cada momento de sua biografia, as pessoas são, por assim dizer, o ‘resultado’ do complexo de sujeições institucionais a que foram submetidas. Suas relações pessoais $R(x, o)$ surgem das diversas relações institucionais $R_I(p, o)$ a que estão ou estiveram submetidos” (p.78).

Dito isto, esse viés, se estabelece como intenção central do texto, ou seja, vislumbrou-se a viabilidade de identificar e descrever o distanciamento entre as praxeologias institucionais e pessoais, pois acredita-se que, a partir desta confrontação, será possível identificar falhas no equipamento praxeológico (CHEVALLARD, 2009) do estudante e, conseqüentemente, propor ações que mitiguem estas discrepâncias.

Elementos descritivos da tarefa

A tarefa, a qual será descrita e analisada sob o viés praxeológico, compôs o repertório

⁶ We denote by $R_I(p, o)$ the *institutional (or positional) relation of p to o* . $R_I(p, o)$ describes what the personal relation of a person x to o should ideally look like if x were to occupy the position p in I . In such a case, we say that $R(x, o)$ conforms to $R_I(p, o)$ and write: $R(x, o) \cong R_I(p, o)$. When a person x occupies the position p in I , we say that x is subjected to p or, more concretely, to the institutional relations $R_I(p, o)$, for all the objects o that are known to p (i.e., such that $R_I(p, o) \neq \emptyset$): x is said to be a subject of I in the position p . If $R(x, o) \cong R_I(p, o)$, the person x is said to be a good subject of I in the position p with respect to o . Of course x will be deemed a bad subject if $R(x, o) \not\cong R_I(p, o)$

de questões da primeira avaliação da disciplina EXA 374 – Geometria Analítica do semestre 2021.1 do Curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade pública brasileira. Trata-se da representação gráfica de um triângulo de vértices A, B, C no espaço. Entretanto, o docente, ao elaborá-la, correlacionou as iniciais do nome e dos dois primeiros sobrenomes de cada estudante, às letras gregas α , β e γ , cujos valores serão determinados através de uma associação entre letras do alfabeto e os números naturais 2, 3, 4 e 5 (Figura 1). Este feito oportunizou a cada discente, salvo algumas exceções, ter sua própria questão a ser solucionada,

Figura 1: Instruções para resolução da tarefa.

Considere a seguinte associação entre números inteiros e as letras do alfabeto.

A, B	/	C, D	/	E, F	/	G, H	/	I, J	/	K, L
2	/	4	/	3	/	5	/	4	/	2

M, N	/	O, P	/	Q, R	/	S, T	/	U, V, W	/	X, Y, Z
5	/	3	/	2	/	4	/	3	/	5

Sejam α , β , γ os valores correspondentes às três primeiras iniciais de seu nome (desconsidere expressões como "dos", "das", "de", etc). Considere o seguinte exemplo, tomando o nome "Zé de Fulano Silva" teríamos:

$$\alpha = Z = 5 \quad / \quad \beta = F = 3 \quad / \quad \gamma = S = 4.$$

De modo análogo, usando o seu nome e a correspondência entre as letras do alfabeto e números inteiros estabelecidos anteriormente proceda ao preenchimento das informações abaixo.

$$\alpha = \quad = \quad / \quad \beta = \quad = \quad / \quad \gamma = \quad = \quad .$$

Transcreva estas informações em todas as página de sua prova. Feito isto, substitua estes valores nas questões, antes de iniciar sua resolução.

IMPORTANTE: Questões sem as devidas substituições no início de sua resolução ou substituída de forma errada serão desconsideradas.

Fonte: Primeira Avaliação EXA 374

Pelas orientações apresentadas, nota-se que o docente teve a intenção de particularizar cada questão, o que fornecerá um traçado mais nítido dos elementos inerentes aos equipamentos praxeológicos de cada estudante. Neste sentido, Chevallard (2019) sinaliza que

É o quarteto $\mathcal{p} = [T / \tau / \theta / \Theta]$ que é chamado de *praxeologia*. A estrutura arborescente da atividade - resultado da interação entre os tipos de tarefas e técnicas - sugere que qualquer pessoa x ou posição institucional p usa uma multiplicidade de praxeologias. Estas praxeologias compõem o equipamento praxeológico $E(x)$ da pessoa x 's ou a posição p 's do equipamento praxeológico $E_I(p)$ da pessoa x . A relação de x com um objeto o , $R(x, o)$, deriva do repertório de praxeologias $\mathcal{p} \in E(x)$ que, de uma forma ou de outra, "ativam" o objeto o . O mesmo se aplica a uma posição institucional: a relação $R_I(p, o)$ emerge do

conjunto mutável de praxeologias envolvendo o que são ativadas pelos sujeitos do I ocupando a posição p (CHEVALLARD, 2019, p.92, grifos do autor, tradução nossa⁷).

Esta pluralidade de praxeologias ativadas pelos sujeitos, cotidianamente, emerge de um repertório de tarefas em associação às técnicas legitimadas pelo bloco teórico $[\theta / \Theta]$, ou seja, exigindo que os equipamentos praxeológicos $E(x)$ e $E_I(p)$ contenham praxeologias relevantes para o desenvolvimento da atividade. Pautando-se nesta perspectiva, revela-se a tarefa que será objeto de análise, a qual integrou a avaliação de EXA 374, como ilustrado na figura 2,

Figura 2: Tarefa 1 item (a)

1. Dado um sistema de coordenadas cartesianas no espaço, considere os pontos $A = (1, -\gamma, \beta)$, $B = (0, 0, -\gamma)$ e $C = (0, \alpha, \beta)$.
- (a) [12 pontos] Represente graficamente o triângulo de vértices A, B, C .

Fonte: Primeira Avaliação EXA 374

O enunciado da questão apresenta três pontos não colineares (A, B e C) do espaço, sendo, portanto, vértices de um triângulo que deverá ser representado graficamente pelos estudantes após a substituição de α, β e γ pelos valores correspondentes, como descrito na figura 1. Nestes termos, emerge o seguinte questionamento: que praxeologias os Equipamentos Praxeológicos $E(x)$ dos alunos devem conter para solucionar a tarefa?

O primeiro destaque aponta para um aspecto que envolve uma das etapas iniciais dos estudos de Geometria Analítica, ou seja, a relevância da representação gráfica. Assim, solicita-se que os estudantes tenham domínio e um olhar mais atento para a dimensionalidade e para o tratamento analítico do espaço. Como destacou Lehmann (1991),

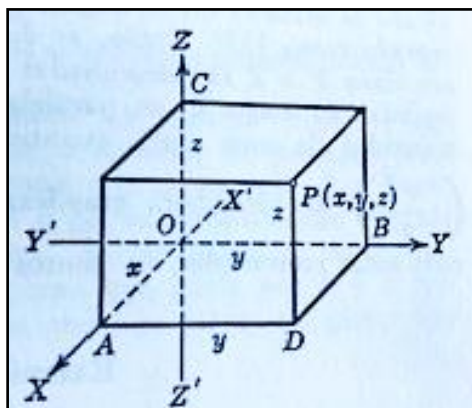
o estudante deverá sentir que a terceira dimensão da Geometria Analítica do espaço exigirá maiores esforços de seu poder de visualização de figuras no espaço do que era necessário para figuras no plano. [...] O estudante pode visualizar facilmente o primeiro octante considerando um canto de um quarto retangular onde duas paredes adjacentes e o piso representam os planos coordenados (LEHMANN, 1991, p.281-282).

Esta concepção torna-se evidente e é reforçada a partir de um paralelepípedo retângulo,

⁷ It is the quadruplet $\mathcal{p} = [T / \tau / \theta / \Theta]$ that is called a praxeology. The arborescent structure of human activity—resulting from the interplay between types of tasks and techniques—suggests that any person x or institutional position p uses a multitude of praxeologies. These praxeologies compose the person x 's praxeological equipment $E(x)$ or the position p 's praxeological equipment $E_I(p)$. The relation of x to an object o , $R(x, o)$, derives from the repertoire of praxeologies $\mathcal{p} \in E(x)$ that, in one way or another, “activate” the object o . The same applies to an institutional position: the relation $R_I(p, o)$ emerges from the changing set of praxeologies involving o that are activated by the subjects of I occupying the position p .

como exposto na figura 3:

Figura 3: Representação de um paralelepípedo retângulo



Fonte: Lehmann (1991, p.283)

Observa-se, então, o emprego do método denominado “projeção paralela” que, segundo o autor, é comumente empregado, como apresentado na figura 3. Neste sentido,

[...] os eixos Y e Z são desenhados mutuamente perpendiculares, mas o eixo X é desenhado de maneira que o ângulo XOY é maior que 90°, sendo usualmente tomado como 135°. O que significa dizer que as distâncias medidas ao longo dos eixos ou paralelas aos eixos Y e Z são desenhadas em verdadeira grandeza, mas as distâncias medidas ao longo do ou paralelas ao eixo X são colocadas em perspectiva reduzida de uma certa quantidade, geralmente cerca de sete décimos ($\frac{\sqrt{2}}{2}$) da verdadeira grandeza (LEHMANN, 1991, p. 284).

Desta forma, infere-se que a representação de figuras espaciais no plano reflete deformações, em termos das projeções e perspectivas utilizadas, que podem constituir obstáculos à aprendizagem de conteúdos que envolvem características dos objetos espaciais, pois, de acordo com Brousseau (1976), todas as concepções podem constituir obstáculos às aquisições futuras. Noções como essas nos induzem a refletir sobre os obstáculos didáticos que se configuram em restrições às práticas institucionais, as quais podem ser geradas a partir de conhecimentos incompletos ou inadequados (BROUSSEAU, 2009). Assim, os registros gráficos apresentados pelos estudantes, enquanto resposta à tarefa, refletem falhas nos $E(x)$ destes sujeitos institucionais.

Uma análise praxeológica das produções dos estudantes

Nesta seção, serão apresentadas produções dos estudantes sobre a representação do triângulo ABC (figura 2), que reportam e permitem mapear as técnicas (τ), ou escopo das

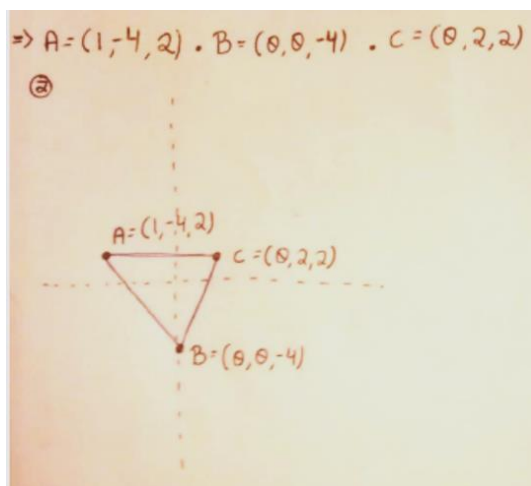
técnicas fundamentado na concepção de Chaachoua e Bessot (2018, p. 121), ao definir que “escopo de uma técnica τ é o conjunto de tarefas realizadas por τ , denotado por $P(\tau)$.” Aspecto este que dialoga diretamente com o que postula Chevallard (2019) acerca das relações pessoais para com os objetos, pois:

Dado um objeto o e uma pessoa x , postulamos que existe uma entidade considerada, em que este conjunto é denotado por $R(x, o)$ e compreende todas as “maneiras” em que x se relaciona com o através da reflexão sobre o , falar ou escrever sobre o , usar o , manusear o , sonhando ou sonhando acordado ou fantasiando sobre o , etc. Em um sentido ampliado do verbo saber, a relação de x para o , $R(x, o)$, encapsula tudo o que x “sabe” sobre o . Diremos que x sabe o ou, dualmente, que o existe para x se $R(x, o) \neq \emptyset$ (CHEVALLARD, 2019, p.77, grifos do autor, tradução nossa⁸).

Na busca por elementos que caracterizam o que x (estudantes) sabem sobre o (representação de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas no espaço) – dito de outra forma, $R(x, o)$ existe, não existe ou existe parcialmente? – postulamos que, a partir das representações gráficas apresentadas como respostas ao item (a) da primeira questão avaliativa, obteremos traços inerentes ao nível desse saber.

Preocupados em preservar as identidades dos alunos, assume-se a seguinte notação: estudante um - E_1 , estudante dois - E_2 e assim sucessivamente, como apresentado na figura 4,

Figura 4: Solução apresentada por E_1 ao item (a) da primeira questão



Fonte: Resolução da Primeira Avaliação EXA 374

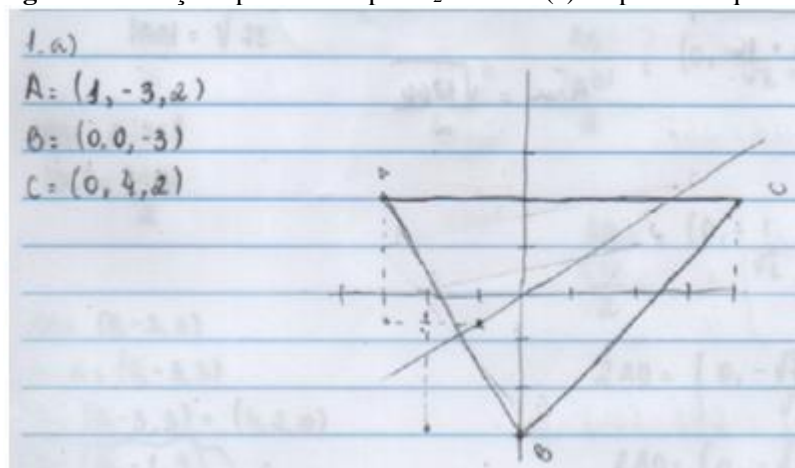
⁸ Given an object o and a person x , we posit that there exists an entity—regarded, in what follows, as a set—called the personal relation of x to o . This set is denoted by $R(x, o)$ and comprises all the “ways” in which x relates to o —through pondering over o , speaking or writing about o , using o , handling o , dreaming or daydreaming or fantasizing about o , etc. In an expanded sense of the verb to know, the relation of x to o , $R(x, o)$, encapsulates all that x “knows” about o . We shall say that x knows o or, dually, that o exists for x if $R(x, o) \neq \emptyset$.

Ao observar as técnicas inerentes a produção de E_1 , é possível identificar que suas relações com as representações de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas no espaço euclidiano inexistem, visto que a interpretação se apoiou, essencialmente, no plano. Assim, pode-se inferir que para E_1 não há diferenças entre representações no plano e no espaço. Outra constatação faz referência à “localização” das coordenadas x, y e z dos pontos A, B e C, visto que, no ponto A foram considerados $x = -4$ e $y = 1$, enquanto o ponto B foi marcado em $y = -4$ e as demais coordenadas nulas, e no ponto C foram considerados $x = 2$ e $y = 2$, ou seja, ele marcou os três pontos sem um critério pré-definido.

Nestes termos, conclui-se que o objetivo do estudante era, tão somente, a representação do triângulo. Assim, diante do exposto, nota-se que E_1 não compreendeu que, antes de iniciar a marcação dos pontos, é necessário desenhar os três eixos coordenados e associá-los a um sistema de coordenadas cartesianas no espaço. E, para isto, faz-se necessário recorrer à noção de projeção paralela. Outro ponto de destaque na construção são as duas retas pontilhadas que remetem aos tradicionais eixos das abscissas e ordenadas de um sistema de coordenadas cartesianas no plano.

A segunda construção fornece indícios de um terceiro eixo, que passa pela origem do sistema cartesiano e intercepta transversalmente os outros dois eixos, como exposto na figura 5.

Figura 5: Solução apresentada por E_2 ao item (a) da primeira questão



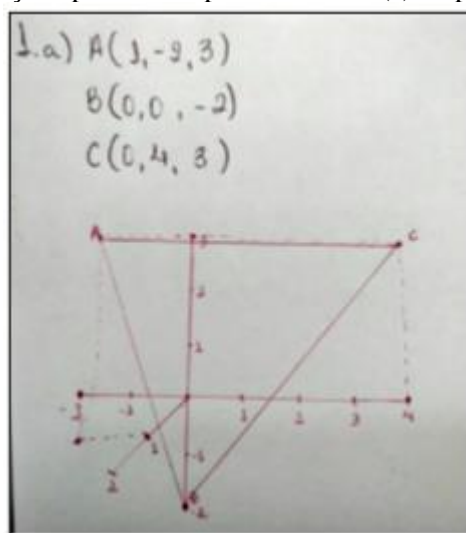
Fonte: Resolução da Primeira Avaliação EXA 374

O estudante E_2 marca as coordenadas do ponto A (escopo da técnica) nos três eixos, o que nos permite realizar a seguinte interpretação do escopo da técnica $P(\tau)$: eixo Y representado na horizontal, eixo Z na vertical e eixo X interceptando transversalmente esses dois eixos. Entretanto, a representação do triângulo permanece vinculada ao plano. Em termos gráficos/visuais, usando a noção de projeção paralela, o ponto C deveria estar situado um pouco

acima do ponto A, pois os dois possuem a mesma cota (figura 5).

Analogamente, E_3 segue o mesmo direcionamento que E_2 e sua construção revela elementos similares aos ilustrados na figura 5, com exceção do eixo das abscissas, em que se apresentou somente a parte positiva e as coordenadas dos pontos, como exposto na figura 6:

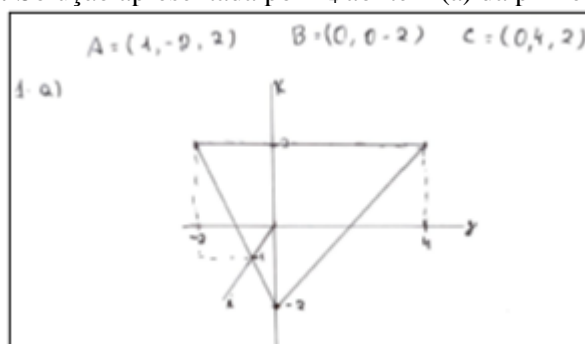
Figura 6: Solução apresentada por E_3 ao item (a) da primeira questão



Fonte: Resolução da Primeira Avaliação EXA 374

A técnica revelada no registro da construção do estudante – E_4 , figura 7, exhibe a tentativa de representação de uma base ortonormal $\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$ do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Tal notação é usualmente utilizada em livros de Geometria Analítica publicados por diversos autores tais como Camargo e Boulos (2005), Corrêa (2006), Loreto e Loreto Junior (2014), Mello e Watanabe (2011), Steinbruch e Winterle (1987) e Winterle (2000), dentre outros. No entanto, o aluno indica apenas o sentido de cada um destes vetores, sem deixar claro o seu comprimento unitário. Percebe-se que E_4 , assim como E_2 e E_3 , não recorreu ao conceito de projeção paralela na resolução da tarefa.

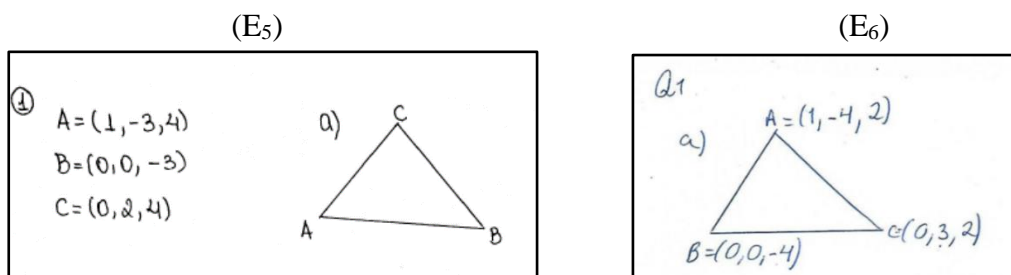
Figura 7: Solução apresentada por E_4 ao item (a) da primeira questão



Fonte: Resolução da Primeira Avaliação EXA 374

Conforme ilustrado na figura 8, os estudantes E₅ e E₆ optaram por apresentar uma técnica que expõe uma representação genérica do triângulo ABC, sem nenhuma vinculação com o sistema de coordenadas cartesianas mencionado no enunciado da questão.

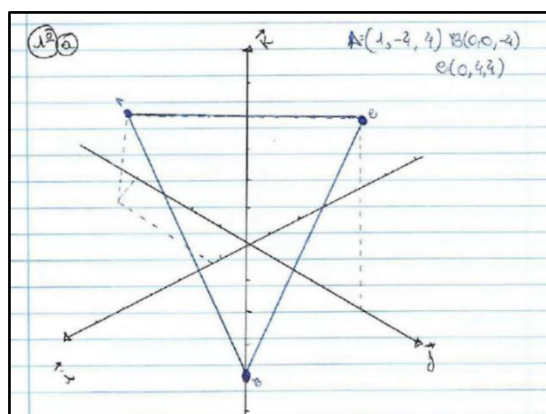
Figura 8: Solução apresentada por E₅ e E₆ ao item (a) da primeira questão



Fonte: Resolução da Primeira Avaliação EXA 374

Em mais um exemplo, o estudante E₇ se aproxima da ideia de projeção paralela. Entretanto, como revelado na figura 9, as cotas dos pontos A e C estão marcadas de forma incorreta. A distância entre estes pontos e suas projeções no plano gerado pela origem e pelos vetores \vec{i} e \vec{j} (usualmente denominado plano XOY) deveriam ser a mesma, pois A e C possuem a mesma cota.

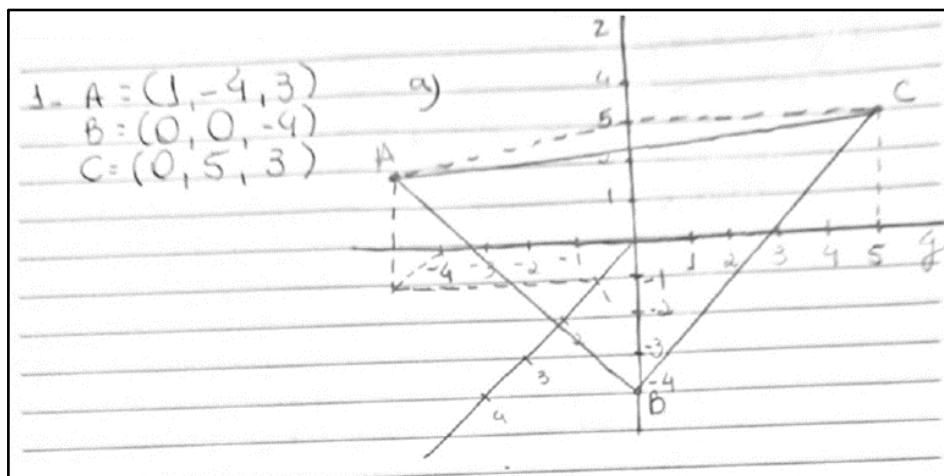
Figura 9: Solução apresentada por E₇ ao item (a) da primeira questão



Fonte: Resolução da Primeira Avaliação EXA 374

E por fim, apresentam-se as produções de dois estudantes que revelam aproximações com a concepção de Chevallard (2019) para um bom sujeito institucional, o que remete a equipamentos praxeológicos mais consistentes no âmbito das representações geométricas no espaço, que estão expostas nas figuras 10 e 11:

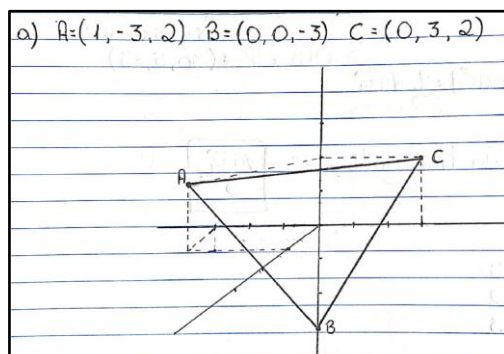
Figura 10: Solução apresentada por E₈ ao item (a) da primeira questão



Fonte: Resolução da Primeira Avaliação EXA 374

Embora E₈ não tenha sinalizado o eixo coordenado OX, percebe-se o emprego correto do método da Projeção Paralela, deixando claro também a escala utilizada. Foi identificado apenas um erro de escrita no eixo das cotas em que se escreveu “5” onde seria “3”. O estudante E₉ seguiu o mesmo direcionamento que E₈, com exceção do erro sinalizado anteriormente.

Figura 11: Solução apresentada por E₉ ao item (a) da primeira questão



Fonte: Resolução da Primeira Avaliação EXA 374

A partir das nove soluções apresentadas nota-se um distanciamento entre as relações pessoais para com objeto *o* (representação de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas) e as relações institucionais almejadas. A identificação e análise praxeológica das produções dos estudantes remetem a praxeologia pessoal, concebida por Croset e Chaachoua (2016) como

[...] o quarteto da organização praxeológica da atividade de um sujeito institucional composto de quatro componentes: - Um tipo de tarefa pessoal é o conjunto de tarefas que o sujeito percebe como similares, fazendo com que ele aplique uma técnica. Se dois tipos de tarefas pessoais são distintos,

necessariamente suas respectivas técnicas pessoais são distintas. A divisão em tipos de tarefas pessoais, portanto, não corresponde necessariamente a da instituição. - Uma técnica pessoal usada pelo aluno resolve apenas um tipo de tarefa pessoal. Ela pode estar errada, correta, legitimada pela instituição de referência ou não. Ela deve ter uma certa estabilidade em seu uso para ser considerada uma técnica de resolução: só obtém legitimidade para um determinado aluno se for usada regularmente por esse aluno. Nós evitamos considerar como técnica pessoal erros de descuido ou derrapagem pontual. Uma tecnologia pessoal, explícita ou não, governa e legitima o uso da prática pessoal. Frequentemente, um simples déficit tecnológico institucional pode ser capaz de explicar técnicas pessoais errôneas. Mas, às vezes, há situações em que uma tecnologia que tem legitimidade para responder a certos tipos de tarefas passa a ser generalizada e a técnica que legitima é usada fora de seu escopo (CROSET; CHAACHOUA, 2016, p.19, tradução nossa⁹).

A partir dessa concepção, as praxeologias pessoais dos estudantes foram sintetizadas na tabela 1:

Tabela 1: Praxeologias Pessoais

Produções dos Estudantes	T	$t \in T$	τ_p	θ_p	Θ
E_1			Marcação de pontos que pertencem ao espaço no plano	Geometria Analítica Plana	Geometria Analítica
E_2			Traçam-se três segmentos de retas, porém usam-se apenas dois dos segmentos	Geometria Analítica Plana	Geometria Analítica
E_3			Traçam-se três segmentos de retas, porém não utiliza o terceiro segmento na determinação do ponto A.	Geometria Analítica Plana	Geometria Analítica
E_4		Dado um sistema de coordenadas cartesianas no	Traçam-se três segmentos de retas e exibe	Geometria Analítica	Geometria

⁹ [...] le quadruplet d'organisation praxéologique de l'activité d'un sujet institutionnel constitué de quatre composantes. - Un type de tâches personnel est l'ensemble des tâches que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une technique. Si deux types de tâches personnels sont distincts, alors nécessairement leurs techniques personnelles respectives sont distinctes. Le découpage en types de tâches personnel ne correspond donc pas nécessairement à celui de l'institution. - Une technique personnelle utilisée par l'élève permet de résoudre un seul type de tâches personnel. Elle peut être erronée, correcte, légitimée par l'institution de référence ou non. Elle doit présenter une certaine stabilité dans son utilisation pour être considérée comme technique de résolution: elle n'acquiert sa légitimité pour un élève donné que si elle est régulièrement utilisée par cet élève. Nous évitons ainsi de considérer comme une technique personnelle, des erreurs d'étourderie ou de dérapage ponctuel. - Une technologie personnelle, explicite ou non, gouverne et légitime l'utilisation de praxis personnelles. Souvent un simple déficit technologique institutionnel peut être à même d'expliquer des techniques personnelles erronées. Mais il est parfois des situations où une technologie qui avait sa légitimité pour répondre à certains types de tâches se trouve être généralisée et la technique qu'elle légitimait utilisée en dehors de sa portée.



	Representar pontos no espaço, fixado um sistema de coordenadas cartesianas.	espaço, considere os pontos $A(1, -\gamma, \beta)$, $B(0, 0, -\gamma)$ e $C(0, \alpha, \beta)$. (a) Represente graficamente o triângulo de vértices A, B, C.	vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, paralelos aos eixos coordenados.	Plana	Analítica
E ₅			Representação genérica do triângulo sem vinculação com o sistema de coordenadas.	Geometria Plana	Geometria Plana
E ₆			Representação genérica do triângulo sem vinculação com o sistema de coordenadas.	Geometria Plana	Geometria Plana
E ₇			Aproximação da ideia de projeção paralela. Entretanto as cotas dos pontos A e C estão marcadas de forma incorreta.	Geometria Analítica Plana	Geometria Analítica
E ₈			Emprego correto do método Projeção Paralela	Geometria Analítica Espacial	Geometria Analítica
E ₉			Emprego correto do método Projeção Paralela	Geometria Analítica Espacial	Geometria Analítica

Fonte: acervo dos autores (2022)

Diante das dificuldades representativas do espaço apontadas nas tentativas resolutivas de uma tarefa avaliativa, acende-se um “sinal de alerta” que ilumina a necessidade de promover interações que venham a contribuir para a criação ou mudança destas relações. Goulart (2021) destaca a relevância de criação e desenvolvimento de recursos didáticos que materializem a representação tridimensional no intuito de gerar entendimentos nos aspectos inerentes aos registros da terceira dimensão planejada. Assim, a autora idealizou um protótipo, figura 12, que poderá auxiliar na visualização da projeção de um vetor no espaço.

Figura 12: Protótipo tridimensional



Fonte: Goulart (2021, p.154)

Inspirados em perspectivas como esta, vislumbramos possibilidades de gerar “incrementos” nos equipamentos praxeológicos dos discentes, os quais se encontram distantes do que é preconizado institucionalmente, como sublinhado por Chevallard (2019, p. 78) “[...] Se $R(x, o) \cong R_I(p, o)$, diz-se que a pessoa x é um bom sujeito de I na posição p em relação a o . Claro que x será considerado um sujeito ruim se $R(x, o) \not\cong R_I(p, o)$.” Assim, no intuito de mitigar as limitações apresentadas nas resoluções de tarefas que demandam como respostas representações de elementos tipificados no espaço tridimensional, protótipos como estes podem ser um ponto de partida para dirimir dúvidas e questionamentos revelados em todas as soluções apresentadas. Neste sentido, busca-se propor mudanças nas relações de x (estudantes) com o (representação de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas) para que os mesmos alcancem o *status* de um bom sujeito de I (EXA 374).

Considerações finais

A partir do que foi explanado, em termos de produções dos estudantes, ou seja, das praxeologias pessoais, identificamos elementos que caracterizam dificuldades inerentes às representações espaciais situadas, ao nosso ver, no âmbito dos equipamentos praxeológicos (CHEVALLARD, 2009) dos estudantes. Nestes termos, detectamos elementos dessas praxeologias que estão fundamentados na associação de concepções que limitam as representações ostensivas intrínsecas ao registro de figuras espaciais.

No contexto dos estudos iniciais de Geometria Analítica, a recorrência à representação gráfica se apresenta como um recurso ostensivo imprescindível para as tarefas desenvolvidas pelo docente em sua prática e, de igual modo, supostamente para os estudantes. Entretanto, foi possível notar que os discentes comunicaram, por meio dos seus registros, a inexistência desta relação para com o objeto (representação de pontos, fixado um sistema de coordenadas cartesianas no espaço), ou seja $R(x, o) = \emptyset$, complementando o que foi sinalizado por Chevallard (2019, p.77). Em alguns casos, a relação existe de forma embrionária, isto é, os estudantes apresentaram traços acerca dos conceitos iniciais de representação no espaço mas sem demonstrar domínio completo sobre o tema.

Assim, a partir da análise praxeológica, foi viável identificar com maior clareza onde residem estes obstáculos e estagnações, pois “o conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras. [...]. No fundo, o ato de conhecer dá-se *contra* um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização” (BACHELARD, 1996, p. 17). Dito isto, torna-se evidente que os discentes estão presos à Geometria Plana frente à necessidade de avançar para um tratamento analítico do espaço.

Em sentido análogo, Brousseau (1976, p. 115) sublinha que “organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno, segundo uma dialética conveniente [...].” Em uma mesma perspectiva, Almouloud (2007) pontua que o objetivo dessas situações é promover a evolução de concepções inadequadas dos alunos, além de revelar suas definições espontâneas diante de problemas em que certo conceito possa ser mobilizado.

A partir das inferências acerca dos equipamentos praxeológicos de alguns estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática, foram retratadas peculiaridades das relações pessoais desses sujeitos institucionais com o objeto matemático “sistema de coordenadas cartesianas no espaço”, que se dá necessariamente por representações ostensivas. Assim, concebe-se, como um primeiro passo para superar obstáculos, identificar sua gênese e, para isso, os docentes e pesquisadores, mesmo assumindo posições diferentes, possam extrair, do que é comunicado pelos estudantes, traços dos equipamentos praxeológicos por meio de diferentes registros.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora da



UFPR, 2007.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução Esteia dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/fis2008/Bachelard1996.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2018.

BOCSH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n° 1, p. 77 – 124, 1999. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=35 Acesso em: 04 de jan. 2019, p. 1- 37.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Willy Vanhamme et Jacqueline Vanhamme. La problématique et l'enseignement de la mathématique. Comptes Rendus de La XXVIII Rencontre Organisée par La Commission Internationale Pour L'étude et L'amélioration de L'enseignement des Mathématiques. **Actes [...]**. Louvain-la-neuve, p. 101-117, 1976. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516569v2/document>. Acesso em: 23 maio 2018.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: conteúdos e métodos de ensino, São Paulo; Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **Estudos Experimentais e Teóricos de Situações Didáticas em Matemática**. In: Curso da Escola de Altos Estudos – EAE. Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN, 2009. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=BQp-dY1P4OM&t=295s. Acesso em: 05 abr. 2018.

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. **Geometria Analítica**: um Tratamento Vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CHAACHOUA, H.; BESSOT, A. Introduction de la notion de variable dans le modele praxéologique. CONGRÈS POUR LA THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE, 5. 2016, Espagne. **Atas [...]**. Castro-Urdiales, Espagne, 2016.

CHAACHOUA, H.; BESSOT, A. A noção de variável no modelo praxeológico. In: **A Teoria Antropológica do Didático**: princípios e fundamentos. ALMOULOU, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (org.). Curitiba: CVR, 2018. p. 119-133.

CHEVALLARD, Y. Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CHEVALLARD, Y. Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique. Colloque international Savoirs scolaires, interactions didactiques et formation des enseignants. **Actes [...]**. Marseille, 1997.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In: **Actes de l'université d'été de la Rochelle**, Juillet 1998. p. 91-118. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27. Acesso em: 10 de mar. 2020.



CHEVALLARD, Y. **Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement.** In: Journal du Séminaire TAD/IDD – 3; pp. 1-39, 2009. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-2010-3.pdf>. Acesso em: 06 jul.2019

CHEVALLARD, Y. Introducing the Anthropological Theory of the Didactic: an Attempt at a Principled Approach. **Hiroshima Journal of Mathematics Education** 12: 71-114, 2019. Disponível: https://www.jasme.jp/hjme/download/05_Yves%20Chevallard.pdf Acesso: 13 de jan. 2022.

CONNE F. Saber e Conhecimento na Perspectiva da Transposição Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas.** Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CORRÊA, P. S. Q. **Álgebra Linear e Geometria Analítica.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

CROSET, M. C.; CHAACHOUA, H. Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD: la praxéologie personnelle. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble,

GOULART, J. S. S. **Uma proposta didática para o ensino da álgebra vetorial fundamentada pelo modelo T4TEL no contexto de um ambiente híbrido de aprendizagem.** Tese (Doutorado) Universidade Federal da Bahia em convênio com a Universidade Estadual de Feira de Santana, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/handle/ri/33990>. Acesso em: 01 de fev. 2022.

LEHMANN, C. H. **Geometria Analítica.** Trad. Ruy Pinto da Silva Sieczkowski – 7. Ed. – São Paulo: Globo, 1991.

LORETO, A. C. da C.; LORETO JUNIOR, A. P. L. **Vetores e Geometria Analítica: teoria e exercícios.** 4. ed. São Paulo: LCTE Editora, 2014.

MELLO, D.; WATANABE, G. R. **Vetores e uma Iniciação à Geometria Analítica.** São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2011.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica.** 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica.** 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2000.

Recebido em: 27 de fevereiro de 2022
Aprovado em: 27 de julho de 2022