revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PROPOSTA DE UMA ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA PARA A CONSTRUÇÃO DAS FÓRMULAS DA MEDIDA DE PERÍMETRO E ÁREA DO FRACTAL ILHA DE KOCH

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.25.217-237

Vinícius Murilo Fratucci[1]
Mariana Moran[2]

Resumo: Este trabalho consiste em parte de uma proposta de dissertação de mestrado em andamento que apresenta análises prévias realizadas a partir da construção de uma Organização Praxeológica (OP) para a compreensão de fórmulas para o cálculo das medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch. Para isso, a pesquisa se constituirá de uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo e, como aporte teórico da nossa investigação, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a qual permitirá modelar o conhecimento por meio de uma OP. Coo metodologia, utilizaremos a Engenharia Didática para subsidiar a análise *a priori* realizada. Deste modo, pretendemos realizar uma análise praxeológica de algumas tarefas que poderão ser conduzidas a estudantes do 2º ano do Ensino Médio, na construção e exploração de fórmulas para determinar as medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch, também conhecido como Floco de Neve. Utilizaremos a TAD para buscarmos identificar os objetos e as Organizações Matemáticas (OM) que estão envolvidas em tais situações, assim como o quarteto praxeológico que evidenciamos com as tarefas propostas. Portanto, observamos que a TAD permitiu a elaboração, o estudo e análise acerca de um conhecimento e de práticas em sala de aula, propiciando um material de ensino e aprendizagem para estudantes da Educação Básica adequando ao contexto e à situação vigente.
Palavras-chave: Educação Matemática. Didática da Matemática. Teoria Antropológica do Didático. Geometria Fractal.

PROPOSAL FOR A PRAXEOLOGICAL ORGANIZATION FOR THE CONSTRUCTION OF THE PERIMETER AND AREA MEASUREMENT FORMULA OF KOCH'S ISLAND FRACTAL

Abstract: This paper is part of an ongoing master's thesis proposal that presents previous analysis carried out from the construction of a Praxeological Organization (PO) for the understanding of formulas for calculating the measures of perimeter and area of the Island of Koch Fractal. For this, the research will be a qualitative approach of interpretative nature and, as a theoretical support of our investigation, we use the Anthropological Theory of Didactics (ADT), which will allow modeling the knowledge through a PO. As a methodology, we will use Didactic Engineering to support the a priori analysis performed. Thus, we intend to perform a praxeological analysis of some tasks that can be conducted to 2nd year high school students, in the construction and exploration of formulas to determine the perimeter and area measures of the Koch Island Fractal, also known as Snowflake. We will use TAD to try to identify the objects and the Mathematical Organizations (OM) that are involved in such situations, as well as the praxeological quartet that we evidence with the proposed tasks. Therefore, we observed that the TAD allowed the elaboration, study and analysis about a knowledge and classroom practices, providing a teaching and learning material for students of Basic Education adapted to the context and the current situation.
Keywords: Mathematics Education. Didactics of Mathematics. Anthropological Theory of Didactics.

---

[1] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Secretária de Estado da Educação e do Esporte (SEED-PR). E-mail: viniciusfratucci@outlook.com.
[2] Doutora em Educação para a Ciência e Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora da Universidade Estadual de Maringá (UEM) e do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PRPGEM) da Universidade Estadual do Paraná (Unespar). E-mail: marianamoranbar@gmail.com.

Fractal Geometry.

Introdução

Para iniciar a nossa discussão, entendemos ser oportuno, mesmo que brevemente, destacar a importância da geometria, uma vez que a partir dela podemos chegar às nossas discussões e ao objeto matemático em estudo. Nesse sentido, corroboramos com Lovis e Franco (2020), em que apresentam seis justificativas da importância da geometria, contudo destacamos a terceira justificativa apresentada por estes pesquisadores, dizendo que "a Geometria é utilizada em todas as áreas da Matemática: ela se comporta como um tema unificante e é um recurso importante de visualização de conceitos aritméticos, algébricos e estatísticos" (LOVIS; FRANCO, 2020, p. 77).

Para apoiar a pesquisa, temos documentos que são norteadores para a Educação Básica brasileira, indicando aos seus professores caminhos a trilhar e direcionamentos no ensino da Matemática para além das aulas básicas. Como exemplo, temos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento de esfera nacional, e as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCE) do estado do Paraná. Com relação às DCE, observamos que esse tema deve ter seus estudos aprofundados no Ensino Médio, dizendo que as "[...] noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica" (PARANÁ, 2008, p. 57). Ainda, o mesmo documento ressalta que podem ser realizados estudos a respeito do Floco de Neve da Curva de Koch, em que está relacionado a Geometria Fractal.

Com relação à BNCC, ela nos apresenta em seu objetivo de aprendizagem EM13MAT105[3] no Ensino Médio a indicação de se "Utilizar as noções de transformações isométricas [...] e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (**fractais**, construções civis, obras de arte, entre outras)" (BRASIL, 2018, p. 545, grifo nosso). Além disso, assuntos pertinentes a Álgebra e Números, são abordados enquanto se faz a construção e a exploração matemática de objetos fractais, alcançando outras habilidades de Matemática apontadas na BNCC.

Sallum (2005) destaca a importância de se utilizar a Geometria Fractal no Ensino Médio,

[3] As duas primeiras letras indicam a etapa do Ensino Médio. O primeiro par de algarismos (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio. Depois, MAT significa a componente curricular de Matemática e suas Tecnologias. E os algarismos finais, 105, indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência.

afirmando que esta possibilita desenvolver fórmulas gerais, de modo a “[...] criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas” (SALLUM, 2005, p. 1).

Com base nessas recomendações, nas observações realizadas em sala de aula e análise de livros didáticos, observamos que o ensino de Geometria Não Euclidiana, mais estritamente, o ensino da Geometria Fractal, é pouco trabalhado em sala de aula. Logo, a não abordagem desse assunto na Educação Básica pode direcionar os alunos a acreditar que temos somente a Geometria Euclidiana.

> Percebe-se que as noções de geometrias não-euclidianas [assim como é o caso da Geometria Fractal] têm sido negligenciadas nas aulas de matemática pela maioria dos professores, tanto no ensino fundamental como no ensino médio, não pelo descaso do professor, mas sim pelo fato dos mesmos não terem tido contato com essas geometrias em sua formação, considerando que a maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática, não contempla este conteúdo em suas estruturas curriculares (VEJAN; FRANCO, 2009, p. 2-3, inserção nossa).

Com isso, a presente proposta está pautada na Geometria Fractal, pois além de ser um assunto atual, este é pouco mencionado, tanto na sala de aula quanto em livros didáticos. Assim, o documento (PARANÁ, 2008, p. 56) indica que “na Geometria dos Fractais pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski [...]”. No mesmo entendimento, autores como Gressler (2008), Mineli (2012) e Carvalho (2005), apresentam em suas pesquisas trabalhos envolvendo sequências de atividades envolvendo a Geometria Fractal.

Portanto, nos norteando nas discussões anteriores, esse trabalho tem como pressuposto estudar uma Organização Matemática (OM) para a construção de fórmulas para a medida de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch sob as perspectivas da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Essas fórmulas irão emergir a partir das técnicas que serão mobilizadas durante a construção e a exploração do Fractal Ilha de Koch e possibilitam o trabalho com diversos assuntos da Matemática como temas de Números e Álgebra, além da própria Geometria.

A Ilha de Koch, ou conhecida como Floco de Neve de Koch pela sua semelhança com um floco de neve, é o nosso objeto de estudo para este trabalho. Este objeto fractal se desenvolve a partir da Curva de Koch, e sua construção se inicia com um segmento de reta qualquer que em segundo passo é dividido em três partes iguais, e deste modo, construímos um triângulo equilátero na terça parte do segmento original suprimindo o segmento da base. Deste modo, temos que o Fractal Ilha de Koch é inicialmente construído com um triângulo equilátero, no qual em cada um dos seus lados se realiza a Curva de Koch.

Para tanto, o seu estudo praxeológico será realizado a partir da Geometria Fractal, porém, nos direcionando para o Fractal Ilha de Koch, partindo dos pressupostos teóricos da TAD, como análises das tarefas propostas para o cálculo de perímetro e área do fractal.

Pressupostos da Teoria Antropológica do Didático

Nessa proposta de estudo de uma OM a respeito do Fractal Ilha de Koch, utilizaremos os pressupostos da Didática da Matemática, pois ela nos dá subsídios para compreendermos aspectos envolvidos no processo de aprendizagem da Matemática. Além disso, Pais (2019) afirma que ela tem por objetivo estudar e elaborar a conceitualização e teorização das peculiaridades dos saberes matemático escolar e desta maneira, propicia a compreensão dos diversos entrelaçamentos entre a teoria e a prática.

Além disso, Almouloud (2007) explica que a TAD é uma teoria relevante no que se refere a análise de práticas em sala de aula, permitindo realizar análises de situações de ensino e aprendizagem da Matemática escolar. Ainda, esta teoria apresenta contribuições significativas para a Didática da Matemática, pois, a TAD

> [...] focaliza o estudo das Organizações Praxeológicas didáticas [OD] pensadas para o ensino e aprendizagem de organizações matemáticas [OM]. A teoria antropológica do didático (TAD) estuda condições de possibilidades e funcionamentos de sistemas didáticos, entendidos como relação sujeito-instituição-saber (ALMOULOUD, 2007, p. 111).

Nesse sentido, Chevallard (1999) pontua que as organizações (ou praxeologias) que são relacionadas a um estudo matemático, são destacadas por dois tipos: Matemática e Didática. Ao que diz respeito à Organização Matemática, ela refere-se à realidade matemática que pode ser construída numa disciplina de matemática em que se estuda um tema. No que se refere à Organização Didática, ela associa-se com a maneira como pode ser estudada a construção desta realidade matemática, ou seja, a forma como se pode realizar o estudo desse tema. Partindo do exposto, observamos que há uma relação entre tais praxeologias. Com isso, entendemos que a Organização Matemática (OM) e a Organização Didática (OD) constituem Organizações Praxeológicas (OP).

Diante disso, as praxeologias são a essência da Teoria Antropológica do Didático. Nesse sentido, a estrutura mais elementar de uma OM é constituída por noções referente ao tipo de tarefa, a técnica, a tecnologia e uma teoria. De acordo com Almouloud (2015), essas noções nos permitem estruturar diversas práticas sociais, assim como a atividade matemática na qual estamos nos referindo. Nesse sentido, Chevallard (2018) explicita uma estrutura a respeito dessas noções praxeológicas.

> A estrutura praxeológica mais simples (que poderíamos chamar de "atômica", mas nós realmente chamamos de "pontual") consiste um tipo de tarefa T, uma técnica τ, maneira de executar as tarefas t do tipo T, de uma tecnologia θ, discurso fundamentado (logos) sobre a técnica (tekhnê) que é suposto tornar t inteligível como meio para realizar as tarefas do tipo T, enfim - por último, não menos importante - uma componente teórica Θ, que rege a tecnologia em si (e, portanto, todos os componentes da praxeologia) (CHEVALLARD, 2018, p. 34).

Concernente a isso, podemos exemplificar como se caracteriza cada uma dessas noções, como é apresentado por Chevallard (1999). Com isso, os tipos de tarefa são caracterizados como várias tarefas que se assemelham, por exemplo, resolver uma equação $3x + 2 = 1$, é uma tarefa t, e ela se assemelha a $4 + 2x = 0$, e assim por diante. Definindo deste modo, a noção do tipo de tarefa T. A outra noção que estrutura a praxeologia, é a técnica τ. Ela é entendida como a maneira pela qual podemos executar um tipo de tarefa, em específico, a tarefa, ou seja, de que modo resolvemos determinada tarefa que compõe o tipo de tarefa. A noção de tecnologia θ refere-se ao que justifica a técnica, ou seja, é o discurso racional a respeito da técnica, de maneira que a justifique racionalmente garantindo que essa técnica funcione bem para aquele tipo de tarefa. Por fim, temos a noção de teoria Θ, ela se assemelha ao que se entende por tecnologia, porém, a teoria tem um papel na qual ela faz a justificação-explicação-produção, ou seja, rege e justifica a tecnologia. Portanto, são essas as noções praxeológicas, que juntas são denominadas como quarteto praxeológico, simbolizado como $[T, \tau, \theta, \Theta]$ (CHEVALLARD, 1999).

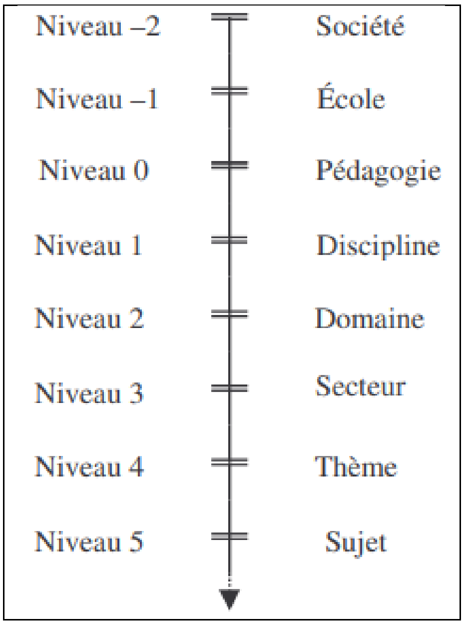
À vista disso, a noção de praxeologia apresentada pela teoria envolve dois termos gregos: *práxis*, que significa "praticar" e *logos*, que significa "razão", "discurso fundamentado", de maneira que nos permita realizar análises desde uma situação de perspectiva teórica do saber com a sua perspectiva prática (saber-fazer). Em que ambas as perspectivas nos levam a ter dois blocos, o bloco saber-fazer, constituído pelas noções de tipo de tarefa e técnica, e o bloco prático-técnico, formado pelas noções de tecnologia e a teoria (CHEVALLARD, 1999).

Nesse sentido, para esclarecer esses apontamentos, Almouloud (2007, p. 113) diz que "O *conhecimento* – e o saber: considerado como uma certa *forma de organização de conhecimento* – entende que um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece, se há um conhecimento e um saber reconhecido como forma de organização desse conhecimento". De maneira geral, o objeto somente existe quando há uma relação e a constatação por uma pessoa ou por uma instituição para com aquele objeto. Nesse contexto, Chevallard (1991) nos explica que o objeto matemático, particularmente, não existe por si só.

Para tanto, o saber matemático para Chevallard (1999) é entendido como uma maneira particular do conhecimento, ou seja, é o produto da ação humana em uma determinada instituição, seja ela qual for, e pode ser descrito como qualquer que seja a produção, a maneira como se utiliza e o modo como se ensina. Partindo disso, com a pretensão na elaboração de uma praxeologia que associe com esse determinado saber, Chevallard (2002) explica que quando se trata de uma organização de estudo de um determinado assunto, devemos levar em consideração uma escala hierárquica dos níveis de co-determinação didática.

A respeito disso, Chevallard (2002) apresenta um esboço desse nível de co-determinação, como podemos ver a seguir.

Figura 1: Nível de co-determinação



Fonte: Chevallard (2002, p. 10).

Assim, esses "[...] níveis não são considerados dados, mas sim uma construção histórica. Cada nível ajuda a ecologia de uma Organização Matemática e Organização Didática por meio das dificuldades em que impõem a um estudo" (CHEVALLARD, 2002, p. 10, tradução nossa)[4]. Nesse sentido, esclarecemos que os níveis -2, -1 e 0 referem-se às organizações curriculares e os níveis 1, 2, 3, 4 e 5 são designados para as Organizações Praxeológicas. A partir disso, elaboramos um nível de co-determinação que diz respeito às análises *a priori* desta proposta de

[4] […] niveau se réfère à une réalité (la société, l'École, les mathématiques, etc.) qui n'est nullement un donné, mais un construit historique. Chaque niveau concourt à déterminer l'écologie des organisations mathématiques et des organisations didactiques par les points d'appui qu'il offre et les contraintes qu'il impose.

pesquisa, como podemos observar na Figura 2.

Figura 2: Nível de co-determinação da análise *a priori*

Nível -2
Secretaria de Educação do estado
↓
Nível -1
Documentos curriculares do estado
↓
Nível 0
Ensino Médio
↓
Nível 1
Matemática
↓
Nível 2
Geometria Não Euclidiana
↓
Nível 3
Geometria dos Fractais
↓
Nível 4
Fractal Ilha de Koch
↓
Nível 5
Cálculo de medidas do perímetro e da área do Fractal Ilha de Koch

Fonte: Autores (2022).

Nesse sentido, com relação ao nível de co-determinação dessa pesquisa, podemos interpretar que a Secretaria de Educação do estado (Sociedade), Documentos Curriculares do estado (Escola) e Ensino Médio (Pedagogia) são representantes curriculares e estruturantes de modo que nos auxiliaram a determinar a Ecologia Didática.

Deste modo, entendemos que o cálculo das medidas do perímetro e da área do Fractal Ilha de Koch é o nosso Objeto, constituindo o nível 5. Consequentemente, o Fractal Ilha de Koch como sendo Tema, compreendendo ao nível 4, de maneira que o Setor representa a Geometria dos Fractais que se relaciona com o Tema. E essa geometria está inclusa no Domínio da Geometria Não Euclidiana, nível 2. Por fim todos esses elementos estão em associação com a Disciplina da Matemática, nível 1, e todos eles correspondem às Organizações Praxeológicas inerentes a esse estudo.

Portanto a TAD, nos seus constructos teóricos, possibilita que realizemos análises dos processos de ensino para a sala de aula, nos embasando para realizar as análises *a priori* de modo a alcançar nosso objetivo.

Metodologia de Pesquisa

A presente pesquisa consiste numa pesquisa cujo enfoque se faz por meio de um estudo de natureza qualitativa e de cunho interpretativo, pois, do ponto de vista de Bicudo (2004, p. 104), é o pesquisador "qualitativo que engloba a ideia de sujeito, possível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências".

Como a nossa pesquisa se baseia num estudo de Organizações Praxeológicas, entendemos que "quando se trata de um objeto relativo às práticas de ensino, deve-se em primeiro lugar observar os objetos, depois descrevê-lo, analisá-lo e avaliá-lo, para finalmente, desenvolver atividades que tem o objetivo de ensino e a aprendizagem desse objeto" (CHEVALLARD, 2002, *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 123). Ainda, esse mesmo autor, diz que esse objeto pode ser categorizado em duas maneiras, a primeira refere-se "a realidade matemática (OM)" e a segunda forma diz respeito ao "como se pode construir essa realidade (OD)".

Partindo dessas prerrogativas, devemos realizar uma análise das praxeologias matemáticas que serão criadas a partir do quarteto praxeológico, respectivamente, com base nas ideias de Chevallard (1998), pois estes são critérios essenciais para dar um direcionamento na elaboração das Organizações Praxeológicas. Ressaltamos que esta pesquisa adota alguns aspectos teóricos da engenharia didática (MACHADO, 1999), prevista pela Engenharia Didática. Essa metodologia prevê o modelo de 4 fases, são elas, a fase de análise preliminares; a concepção e análise *a priori* das situações didáticas; a experimentação, por fim, a fase da análise *a posteriori* e validação. Contudo, para essa investigação, apresentaremos somente a análise *a priori*, de maneira que exprima uma proposta didática para a sala de aula.

Acerca da concepção e da análise *a priori*, é realizado quando "o pesquisador orientado pelas análises preliminares delimita um certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, as quais são chamadas de variáveis de comodato" (MACHADO, 1999, p. 203). Assim, realizamos, na concepção e análise *a priori*, um estudo acerca das organizações matemáticas, apresentando possíveis praxeologias que podem emergirem durante uma implementação em sala de aula. De maneira, que delimita o tema a ser estudado apresentado algumas variáveis acerca da noção matemática.

Com isso, utilizaremos a Engenharia Didática como metodologia, uma vez que ela apresenta critérios e passos, de modo que possamos desenvolver essa pesquisa de maneira concisa teoricamente e metodologicamente.

Por fim, partindo dessas prerrogativas, a proposta de dissertação de mestrado da qual deriva este texto tem como intuito realizar uma análise das praxeologias Matemáticas e Didáticas que serão criadas a partir do quarteto praxeológico de Chevallard (1998), pois este é um critério essencial para nos dar um direcionamento na elaboração das Organizações Praxeológicas. Tal proposta de pesquisa se baseou em uma implementação da análise *a priori* que será discutida neste texto, portanto, em virtude da objetividade deste texto e de sua limitação de páginas, nos ateremos somente à uma discussão no campo da análise *a priori* da organização matemática elaborada.

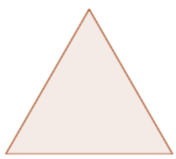
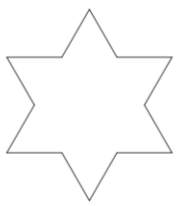
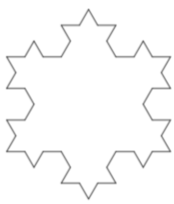
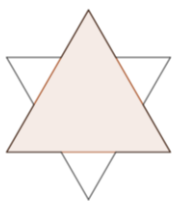
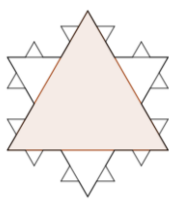
Análise dos dados *a priori*

Neste momento, propomos uma análise a *priori*, proposta pela Engenharia Didática, da construção de uma Organização Matemática para o cálculo das medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch. Nesse sentido, apresentaremos a análise a *priori* de quatro tarefas que foram construídas pelos pesquisadores deste artigo, tais tarefas fazem parte do conjunto que compõe a Organização Matemática, são elas: o cálculo para a quantidade de segmentos, a quantidade de triângulos, a medida de perímetro e de área desse fractal em cada etapa a ser construída.

Como nos pautamos na TAD, faremos uma discussão em torno do tipo de tarefa, da técnica, da tecnologia e da teoria. Assim, nos organizamos para a análise a *priori* considerando o tipo de tarefa para cada momento da construção e da exploração do Fractal Ilha de Koch. A seguir, apresentaremos quatro tipos de tarefa, em que apresentaremos as análises a *priori* da nossa pesquisa.

A princípio, explicamos que para iniciarmos a construção e exploração do Fractal Ilha de Koch, faz-se necessário construir um triângulo equilátero inicial que designamos por Etapa 0. O triângulo ficará conforme a Figura 3 do Quadro 1. Neste quadro, estão organizadas as 3 primeiras etapas da construção da Ilha de Koch.

Quadro 1: Construção de cada etapa do fractal

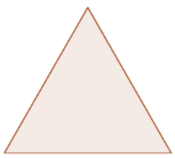
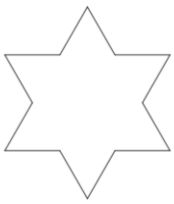
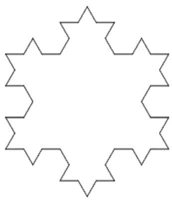
 **Figura 3:** Etapa 0	 **Figura 4**: Etapa 1	 **Figura 5:** Etapa 2	 **Figura 6:** Etapa 1 com as etapas anteriores	 **Figura 7:** Etapa 2 com as etapas anteriores

Fonte: Os autores (2022)

O Quadro 1 será utilizado para referenciar e esclarecer como fica cada uma das etapas do Fractal que iremos abordar durante a análise *a priori*. Organizamos as análises a *priori* considerando o tipo de tarefa para cada etapa da construção e da exploração do Fractal Ilha de Koch. E, deste modo, identificamos as Tarefas e as enumeramos de 1, 2, 3 e 4. As subtarefas referentes a cada uma destas, foram indicadas posteriormente, e em seguida são indicadas a tecnologia, a teoria e a técnica referente a cada uma das subtarefas. Organizamos tais informações nos quadros de 1 a 4, com discussões posteriores a cada um deles.

O Quadro 2, a seguir, apresenta o tipo de tarefa, a técnica, a tecnologia e a teoria previstas para os alunos durante uma aula de matemática de modo a explorar a generalização para o cálculo da quantidade de segmentos em cada etapa da construção da Ilha de Koch.

Quadro 2: Análise Praxeológica do tipo de tarefa T_1

Tipo de Tarefa T_1	Generalizar o cálculo da quantidade de segmentos em cada etapa da construção do Fractal Ilha de Koch.			
Tarefa t_1	Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade de segmentos em cada etapa do Fractal Ilha de Koch.			
Etapa	Subtarefa	Técnica τ	Tecnologia θ	Teoria
	$t_{1.1}$: Encontrar a quantidade de segmentos obtidos na Etapa 0 do Fractal.	Contar os segmentos um a um	Noção de contagem e conhecimento do elemento figural “segmento”	Aritmética e Geometria
	$t_{1.2}$: Encontrar a quantidade de segmentos obtidos na Etapa 1 desse Fractal.	Contar os segmentos um a um	Noção de contagem e conhecimento do elemento figural “segmento”	Aritmética e Geometria
	$t_{1.3}$: Encontrar a quantidade de segmentos obtidos na Etapa 2 do Fractal.	a) Contar os segmentos um a um b) Multiplicar a quantidade de segmentos obtidos na etapa anterior (Etapa 1) por 4	a) Noção de contagem e conhecimento do elemento figural “segmento” b) Noção de proporção	Aritmética e Geometria
	$t_{1.4}$: Construir uma fórmula para a quantidade de segmentos obtidos na Etapa n desse Fractal.	Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a quantidade de segmentos em uma Etapa n.	Noção de potenciação e padrão recorrente.	Álgebra e Geometria

Fonte: Os Autores (2022)

Para complementar o quadro, descreveremos uma resposta que é possível de ser obtida para cada uma das subtarefas apresentadas no Quadro 2, que auxiliou na análise praxeológica que culminou na identificação do quarteto praxeológico de cada subtarefa. No que diz respeito a subtarefa $t_{1.1}$, temos que uma resolução seria a contagem de cada um dos segmentos que constitui o triângulo equilátero, totalizando três segmentos, assim constituindo uma resposta para a subtarefa $t_{1.1}$.

Para a subtarefa $t_{1.2}$, uma resolução que entendemos que seja possível, trata-se em contar os segmentos construídos na Etapa 1, chegando a uma quantidade de 12 segmentos, ou também, podendo observar que 12 é 3 multiplicado por 4. Ponderamos que por meio dessa resolução é possível identificar o quarteto praxeológico vigente para essa subtarefa.

Uma primeira resolução possível utilizada na subtarefa $t_{1.3}$, é partir da mesma linha das subtarefas anteriores e contar os segmentos, que resultam em 48 segmentos na Etapa 2. Outra resolução que entendemos ser pertinente para essa subtarefa, seria a realização de uma multiplicação, caso o estudante observe que o segmento da etapa anterior é acrescido de 4 novos segmentos e, como já havíamos feito uma iteração na etapa anterior, é possível observar que o resultado pode ser entendido como $3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^{\,2}$, ou seja, 48 segmentos. Ao observar o Quadro 2, podemos observar que a técnica, tecnologia e teoria, foram identificadas por meio dessas resoluções que apresentamos.

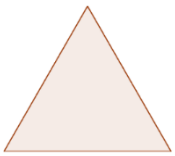
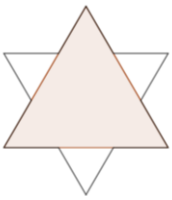
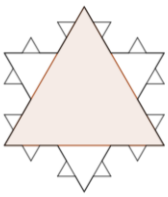
A subtarefa $t_{1.4}$ que completa o ciclo das subtarefas, é destacada pelo fato de ser a construção da fórmula. Assim, nessa resolução, entendemos que se deve compreender que em cada etapa passa de 1 para 4 segmentos do triângulo construído na etapa anterior de maneira que é preciso encontrar um fator comum entre as etapas, ou seja 4^{n}, mas como um triângulo equilátero tem 3 lados, é preciso multiplicar por 3 a generalização encontrada. Logo, a fórmula para o cálculo da quantidade de segmentos é $3 \cdot 4^{\mathrm{n}}$. Com essa resolução, foi possível observar o quarteto praxeológico presente em uma subtarefa que se objetivou na construção de uma fórmula para a quantidade de segmentos.

O Quadro 2 especifica a análise praxeológica da tarefa t_1 prevista para estudantes do 2º ano do Ensino Médio, abaixo do quadro, apresentamos uma possível resolução para que elucidemos a análise praxeológica de uma OM que desenvolvemos. Observe que ao serem trabalhadas as subtarefas $t_{1.1}$, $t_{1.2}$, $t_{1.3}$ e $t_{1.4}$ correspondentes a tarefa t_1, evidencia-se o trabalho contínuo com a Organização Matemática. Assim, entendemos que essa é uma análise praxeológica *a priori* do tipo de tarefa T_1, que consistiu em uma análise matemática.

A seguir, apresentaremos uma análise praxeológica do tipo de tarefa T_2 referente a tarefa

t_2, como está exposto no Quadro 3.

Quadro 3: Análise Praxeológica do tipo de tarefa T_2

Tipo de Tarefa T_2	Generalizar o cálculo da quantidade de triângulos equiláteros que são construídos em cada etapa da construção do Fractal Ilha de Koch			
Tarefa t_2	Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade de triângulos equiláteros em cada etapa.			
Etapas	Subtarefa	Técnica τ	Tecnologia θ	Teoria
	$t_{2.1}$: Encontrar a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa 0 desse Fractal	Contar os triângulos um a um	Noção de contagem e conhecimento do elemento figural "triângulo"	Aritmética e Geometria
	$t_{2.2}$: Encontrar a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa 1 desse Fractal.	Contar os triângulos um a um	Noção de contagem e conhecimento do elemento figural "triângulo"	Aritmética e Geometria
	$t_{2.3}$: Encontrar a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa 2 desse Fractal.	a) Contar os triângulos um a um b) Multiplicar a quantidade de triângulos obtidos na etapa anterior (Etapa 1) por 4	a) Noção de contagem e conhecimento do elemento figural "triângulo" b) Noção de proporção	Aritmética e Geometria
	$t_{2.4}$: Construir uma fórmula para a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa n desse Fractal.	Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a quantidade de triângulos em uma Etapa n.	Noção de potenciação e padrão recorrente.	Álgebra e Geometria

Fonte: Autores (2022)

Em vista do que foi dito no Quadro 3, apresentamos uma possível resolução que articule com a análise praxeológica realizada, ou seja, iremos escrever os cálculos e procedimentos necessários para poder identificar a técnica, tecnologia e teoria de cada subtarefa desenvolvida.

Para a subtarefa $t_{2.1}$, compreendemos que uma resolução possível consiste na observação de que no Fractal em sua Etapa 0 contém somente um triângulo equilátero, nesse sentido, entendemos que seria necessário somente realizar a contagem desse triângulo obtido nessa etapa. Podemos observar que essa resolução permitiu na identificação do quarteto praxeológico disposto no Quadro 3.

Entendemos que para a subtarefa $t_{2.2}$, a resolução consiste em contar os triângulos, ou seja, é preciso atentar ao processo de construção desse Fractal, pois em cada lado do triângulo obtido na Etapa 0 é realizada a construção da Curva de Koch. Deste modo, considerando os triângulos que foram obtidos na Etapa 0 e na Etapa 1, temos um total de 4 triângulos.

Para a subtarefa $t_{2.3}$, que trata na Etapa 2 do fractal, entendemos que uma possível resolução seria a compreensão do padrão recorrente, pois ao observar um dos lados do triângulo referente a Etapa 1, é possível identificar a construção de um total de 4 triângulos e, como tem 3 lados, então temos um total de 12 triângulos. Portanto, como queremos todos os triângulos, basta somar com os triângulos obtidos na Etapa 1, logo obteremos um total de 16 triângulos. Portanto, identificamos que na Etapa 2 tem-se $16 = 4 \cdot 4$ triângulos. Observe que nessa resolução, distinta das anteriores, é preciso mobilizar outras noções matemáticas para o desenvolvimento da resolução dessa subtarefa.

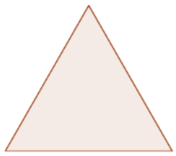
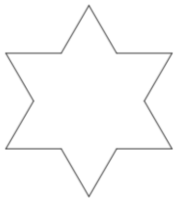
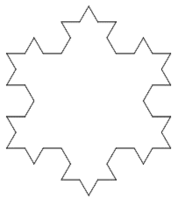
O objetivo da subtarefa $t_{2.5}$ é encontrar a quantidade de triângulos equiláteros obtidos para uma etapa qualquer desse Fractal de maneira que conclua uma generalização para qualquer etapa. Nesse sentido, temos então que uma possível resolução, está em compreender que em cada etapa há um aumento de 4 triângulos, sendo este o fator comum entre as etapas, assim para uma etapa qualquer temos 4^n triângulos, sendo esta a fórmula para o cálculo da quantidade de triângulos. Com isso, essa subtarefa completa o ciclo para se resolver a Tarefa t_2, uma vez que precisou perpassar por todas as subtarefas anteriores, realizando sua análise praxeológica.

O Quadro 3 especifica a análise praxeológica da tarefa t_2 prevista para estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Observe que as subtarefas $t_{2.1}$, $t_{2.2}$, $t_{2.3}$ e $t_{2.4}$ correspondentes a tarefa t_2, evidencia o trabalho contínuo com a Organização Matemática. Assim, entendemos que essa é uma análise praxeológica *a priori* do tipo de tarefa T_2, que consistiu em uma análise matemática.

A seguir, apresentaremos uma análise praxeológica do tipo de tarefa T_3 referente a tarefa t_3, como é exposto no Quadro 4.

Quadro 4: Análise Praxeológica do tipo de tarefa T_3

<table>
<tr><td colspan="2">Tipo de Tarefa T_3</td><td colspan="3">Generalizar o cálculo da medida do perímetro do Fractal em cada etapa de sua construção</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarefa t_3</td><td colspan="3">Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro de cada etapa do Fractal Ilha de Koch considerando o comprimento de cada segmento do triângulo inicial como sendo c.</td></tr>
<tr><td>Etapas</td><td>Subtarefa</td><td>Técnica τ</td><td>Tecnologia θ</td><td>Teoria</td></tr>
</table>

	$t_{3.1}$: Encontrar a medida do perímetro da figura obtida na Etapa 0	Somar a medida de cada segmento que compõe a figura da Etapa 0	Conhecimento do elemento figural “segmento”; e noção de soma algébrica	Álgebra e Geometria
	$t_{3.2}$: Encontrar a medida do perímetro da figura obtida na Etapa 1	Encontrar a medida de cada segmento e em seguida, multiplicar essa medida pela quantidade de segmentos obtida na $t_{1.2}$	Conhecimento do elemento figural “segmento”; noção de divisão algébrica para obter a medida de cada segmento; noção de multiplicação algébrica para obter a medida do perímetro da figura	Aritmética, Álgebra e Geometria
	$t_{3.3}$: Encontrar a medida do perímetro da figura obtida na Etapa 2	Encontrar a medida de cada segmento e em seguida, multiplicar essa medida pela quantidade de segmentos obtida na $t_{1.3}$	Conhecimento do elemento figural “segmento”; noção de divisão algébrica para obter a medida de cada segmento; noção de multiplicação algébrica para obter a medida do perímetro da figura	Aritmética, Álgebra e Geometria
	$t_{3.4}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro na Etapa n	Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a medida do perímetro em uma Etapa n.	Noção de potenciação de números inteiros e de números fracionários; proporção e padrão recorrente.	Aritmética, Álgebra e Geometria

Fonte: Autores (2022)

Tendo em vista que o Quadro 4 apresenta a análise praxeológica, faremos nessa parte a descrição das resoluções que culminaram na realização e identificação do quarteto praxeológico mobilizado para cara subtarefa. Partindo disso, temos que na subtarefa $t_{3.1}$, compreendemos que não há a necessidade de um comprimento fixo, por isso, consideramos cada segmento do triângulo inicial como sendo c, ou seja, uma variável. Deste modo, a resolução que adotamos como sendo possível, é observar que na Etapa 0, que representa um triângulo equilátero, temos 3 lados e cada um tem o comprimento c, de maneira a concluir que o perímetro pode ser dado por $3c$.

Como consequência da subtarefa anterior, temos a subtarefa $t_{3.2}$. Para tanto, a resolução que permitiu que realizássemos a análise praxeológica disposta no Quadro 4 é observar que no processo de construção do fractal, quando é realizado a construção da Curva de Koch divide-se cada segmento em 3 partes iguais, gerando 4 segmentos advindos da curva, em cada lado do triângulo.

Assim, observando que o comprimento de cada segmento na Etapa 0 era c e como na Etapa 1 é realizado a divisão em 3 partes iguais, tem-se que o comprimento de cada segmento da Etapa 1 corresponde a $\frac{1}{3}c$. Como foi encontrado o resultado da subtarefa $t_{1.2}$, que consiste na quantidade de segmentos, resta realizar a multiplicação de ambos os valores. Portanto, o perímetro na Etapa 1 é $12 \cdot \frac{1}{3}c$, ou podemos reescrever da forma $3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}c$, sendo o perímetro nessa etapa.

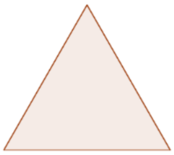
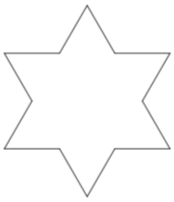
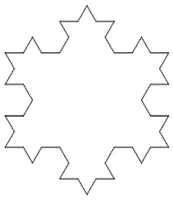
No que se refere a resolução da subtarefa $t_{3.3}$, temos um fato a ser considerado: a medida de cada segmento na etapa anterior. Ou seja, na Etapa 1 o comprimento representava $\frac{1}{3}c$, nesse sentido, para a Etapa 2, temos que observar que cada segmento foi dividido em 3 partes iguais novamente, de maneira que a medida do segmento na Etapa 2 é $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}c = \left(\frac{1}{3}\right)^2 c$. Assim, o perímetro na Etapa 2 é a multiplicação da quantidade de segmentos pelo seu comprimento, portanto, o perímetro é $48 \cdot \frac{1}{3}\frac{1}{3}c = 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 c$. Com essa resolução, observamos que foram mobilizadas outras noções matemáticas, permitindo identificar a técnica, tecnologia e teoria.

Para finalizar, temos a subtarefa $t_{3.4}$, esta faz o fechamento da Tarefa t_3, a qual realizamos uma análise praxeológica por meio da resolução que descreveremos nesse momento. Assim, utilizando os dados das subtarefas anteriores, temos que de cada segmento é $\frac{1}{3}c$ em cada etapa, a fórmula do comprimento de cada segmento em uma etapa qualquer é a $\left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{n}}$ c. Assim, temos a informação de que a quantidade de segmentos obtidos em qualquer etapa é $3 \cdot 4^{\mathrm{n}}$, portanto, basta fazer uma operação algébrica entre esses resultados, ou seja, a fórmula para o perímetro em uma Etapa n para esse Fractal é $3 \cdot 4^{\mathrm{n}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{n}}$ c. Com isso, concretiza-se o a resolução que permitiu realizar a análise e identifica o quarteto praxeológico.

O Quadro 4 apresenta uma especificação acerca da análise praxeológica realizara para a tarefa t_3, que foi prevista para estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Assim, entendemos que as subtarefas $t_{3.1}$, $t_{3.2}$, $t_{3.3}$ e $t_{3.4}$ correspondentes a tarefa t_3, sendo indicado o trabalho contínuo com a Organização Matemática. Desse modo, compreendemos que essa é uma análise praxeológica *a priori* do tipo de tarefa T_3, que consistiu em uma análise matemática.

A seguir, apresentaremos uma análise praxeológica do tipo de tarefa T_4 referente a tarefa t_4, como é exposto no Quadro 5.

Quadro 5: Análise Praxeológica do tipo de tarefa T_4

Tipo de Tarefa T_4	Generalizar o cálculo da medida da área do Fractal Ilha de Koch em cada etapa de sua construção			
Tarefa t_4	Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área de cada etapa do Fractal Ilha de Koch considerando A_0 a área do triângulo inicial			
Etapas	Subtarefa	Técnica τ	Tecnologia θ	Teoria
	$t_{4.1}$: Encontrar a área da figura obtida na Etapa 0	Considerar a área prevista no enunciado da Tarefa	Noção de incógnita e interpretação de enunciado matemático	Álgebra
	$t_{4.2}$:Encontrar a área da figura obtida na Etapa 1	Encontrar a medida da área dos triângulos acrescentados nessa etapa e somar com a área da etapa anterior (Etapa 0)	Conhecimento do elemento figural “triângulo”; noção geométrica de área; noção de multiplicação algébrica	Aritmética, Álgebra e Geometria
	$t_{4.3}$: Encontrar a área da figura obtida na Etapa 2	Encontrar a medida da área dos triângulos acrescentados nessa etapa e somar com a área da etapa anterior (Etapa 1)	Conhecimento do elemento figural “triângulo”; noção geométrica de área; noção de multiplicação algébrica	Aritmética, Álgebra e Geometria
	$t_{4.4}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área na Etapa n	Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a medida da área em uma Etapa n.	Noção de potenciação de números inteiros e de números fracionários; multiplicação e padrão recorrente; noção de progressão geométrica	Aritmética, Álgebra e Geometria

Fonte: Autores (2022)

Como podemos observar no Quadro 5, ele apresenta uma análise praxeológica que realizamos para a Tarefa t_4 e suas subsequentes subtarefas. Deste modo, nos próximos parágrafos descreveremos as resoluções que nos baseamos para identificar a técnica, tecnologia e teoria.

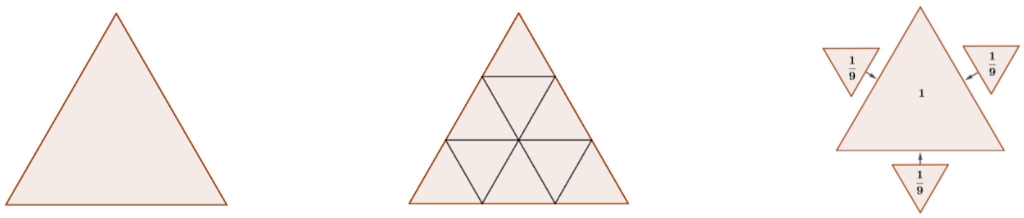
Para iniciar essas resoluções, temos a subtarefa $t_{4.1}$, esta é resolvida utilizando o próprio

RPEM, Campo Mourão, PR, Brasil, v.11, n.25, p.217-237, maio.-ago. 2022.

dado que o enunciado apresenta, assim, entendemos que a resolução é utilizar um termo genérico no cálculo da área na Etapa 0 (A_0). Ressaltamos que para encontrar a área de um triângulo equilátero utiliza-se a fórmula $A_0 = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$. Portanto, desde o início da nossa proposta, consideramos A_0 como sendo a área da Etapa 0. Observe que para essa é uma solução simples, contudo, foi necessário a mobilização de noções matemáticas que se perfazem durante a vida estudantil.

Na sequência, têm-se a subtarefa $t_{4.2}$, na qual entendemos que uma resolução possível se inicia a partir da utilização da área inicial como sendo A_0, na Etapa 0. Com isso, na Etapa 1, direciona-se para uma conclusão de que os triângulos gerados têm área igual a $\frac{1}{9}$ do triângulo inicial. Isso acontece porque no interior do triângulo inicial é obtido um total de 9 triângulos equiláteros menores, gerando uma área igual a $\frac{1}{9}$ da área inicial, ou seja, $\frac{1}{9}A_0$, como exemplifica a Figura 8. Como foram gerados 3 triângulos nessa etapa, tem-se que a área deles corresponde a $3\frac{1}{9}A_0$, obtendo como resultado o seguinte:

Figura 8: Área dos triângulos gerados na Etapa 1



Fonte: Autores (2022)

Portanto, com essas discussões, podemos observar que a área do Fractal Ilha de Koch na Etapa 1 é $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0$, lembrando que toda etapa iterada deve ser somada com a área inicial.

Foi concluído na subtarefa $t_{4.2}$ que a área do triângulo gerado corresponde a $\frac{1}{9}$ da área inicial. Assim, com auxílio do resultado anterior, entendemos que uma resolução possível para a subtarefa $t_{4.3}$, correspondente a Etapa 2, é encontrar as áreas dos triângulos gerados e a área total desse Fractal nessa etapa. Como são gerados triângulos menores quando comparado a etapa anterior, observa-se que um triângulo dessa etapa corresponde a uma área de $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$ da área inicial, ou $\left(\frac{1}{9}\right)^2 A_0$, pois ocorre de maneira similar ao apresentado na Figura 8. Desse modo, sabemos que foram gerados 12 triângulos nessa etapa, como observado na subtarefa $t_{2.3}$, e com isso, é realizado a multiplicação da quantidade de segmentos pela área dos triângulos gerados nessa etapa. Assim, temos que a área de todos os triângulos gerados nessa etapa corresponde a $3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 A_0$.

A partir dessas considerações, conclui-se que a área do Fractal Ilha de Koch na Etapa 2 equivale a soma de todas as áreas das etapas anteriores com a obtida nessa etapa. Portanto, a área da Etapa 2 é $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0 + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \mathrm{A}_0$. Logo, realizando a manipulação algébrica é possível identificar possíveis padrões, concluindo que $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \mathrm{A}_0$, na Etapa 2. Observe que nessa resolução, precisou utilizar-se diversas noções matemáticas para chegar assim na sua resolução, desse modo permitiu que pudéssemos apresentar uma análise praxeológica mais ampla para essa subtarefa.

Como forma de ampliar a compreensão dessa resolução, apresentamos uma próxima etapa para que elucide melhor o caminho tomado para o desfecho da Tarefa t_4. Nesse modo, para uma possível Etapa 3, temos a área como sendo $\mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0 + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \mathrm{A}_0 + 3 \cdot 4^2 \left(\frac{1}{9}\right)^3 \mathrm{A}_0$, e efetuando uma manipulação algébrica, conclui-se que $\mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3}\mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}\mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \mathrm{A}_0$. Lembrando que esse parágrafo, está como forma de complementariedade para compreensão das subtarefas, mas a Etapa 3 não faz parte do escopo da Organização Matemática.

Assim, temos então o desfecho, uma resolução possível para a subtarefa $t_{4.4}$, na qual temos a fórmula para o cálculo da medida de área na Etapa n que pode ser dada na sua forma extensa por $A_n = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3}.\mathrm{A}_0 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)\mathrm{A}_0 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^2 \mathrm{A}_0 + \cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{\mathrm{n}-1} \mathrm{A}_0$ em que foi possível identificar o fator comum. Mas também é possível utilizando a fórmula da soma da progressão geométrica (P.G.), caracterizando em uma outra forma de resolução, na qual, aplicando a fórmula da soma da P.G. temos $A_n = \frac{A_1(q^n-1)}{q-1}$ em que q é a razão dada por $q = \frac{a_2}{a_1}$, dessa forma, ao realizar os cálculos, conclui-se $q = \frac{4}{9}$ a razão. Basta aplicar na fórmula da soma da P.G. e concluir que a $\tau_{4.5.1}$ é $A_n = A_0\left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$. Ainda, como forma complementar, podemos considerar outra resolução, utilizando somatório, ou seja, teríamos que $\mathrm{A_n} = \mathrm{A}_0\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{\mathrm{i}-1}\right)$. Para tanto, a subtarefa $t_{4.5}$ é realizada, fechando a Tarefa t_4 e contribuindo para a formação da OM desenvolvida.

Ao discutir sobre as subtarefas referente a tarefa t_4, na análise *a priori*, que estão dispostas no Quadro 5, é apresentada uma análise praxeológica, em que foi prevista para estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Assim, entendemos que as subtarefas $t_{4.1}$, $t_{4.2}$, $t_{4.3}$ e $t_{4.4}$ correspondentes a tarefa t_4, se apresentam como um trabalho contínuo com a Organização Matemática.

Para tanto, por meio do que foi descrito até o momento, temos a análise praxeológica *a priori* que realizamos, que objetivamos em quatro tarefas para a construção de fórmulas do Fractal Ilha de Koch. Isso foi possível, graças ao auxílio do aporte teórico-metodológico adotado para essa pesquisa.

Conclusão

Com esta pesquisa, objetivamos realizar por meio da Teoria Antropológica do Didático (TAD), um estudo acerca de Organizações Praxeológicas desenvolvidas para a construção e exploração do Fractal Ilha de Koch. Nesse sentido, o estudo se pautou em uma análise praxeológica para se determinar uma fórmula para o cálculo da quantidade de segmentos, a quantidade de triângulos e o cálculo das medidas de perímetro e de área em cada uma das etapas do fractal.

Com essa análise praxeológica *a priori*, realizamos a modelização da OP que será implementada como parte de uma pesquisa de mestrado em andamento. As Organizações Matemáticas retratadas podem ser incrementadas nas salas de aulas a partir da mobilização de Organizações Didáticas, de maneira que pode ser escolhido o contexto e as situações em que serão apresentadas para os alunos. Assim, com a Teoria Antropológica do Didático, podemos isolar as tarefas e fazer uma análise a respeito do tipo de tarefa, da técnica, da tecnologia e da teoria.

Portanto, observamos que a TAD permitiu a elaboração, o estudo e análise acerca de um conhecimento e de práticas em sala de aula, propiciando um material de ensino e aprendizagem para estudantes da Educação Básica adequando ao contexto e à situação vigente. Pudemos constatar na análise *a priori* uma prévia de como poderia ser estudado tal temática em sala de aula. Desse modo, constatamos como o saber matemático pode ser desenvolvido e explorado em sala de aula, buscando a compreensão das fórmulas e de maneira geral, as noções da Geometria Fractal e o Fractal Ilha de Koch.

Esse estudo possibilita introdução do Fractal Ilha de Koch na Educação Básica. Além disso, se torna possível o uso da TAD que nos oportuniza realizar análises das praxeologias que são emergidas em cada tarefa. Portanto essa proposta, está direcionada a sala de aula de modo

RPEM, Campo Mourão, PR, Brasil, v.11, n.25, p.217-237, maio.-ago. 2022.

que o Fractal Ilha de Koch seja um tema que possa conduzir os alunos a aprendizagem de diversos assuntos da Matemática e gerar curiosidades a respeito da Geometria Fractal.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ARTAUD, M. Constituir uma organização matemática e uma organização de estudo – praxeologias para o professor e sua ecologia. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (org.). **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018. Cap. 5. p. 135-180.

BICUDO, M. A. V. (org.) **Educação Matemática.** São Paulo: Centauro, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: MEC, 2018.

CARVALHO, H. C. Geometria Fractal: perspectivas e possibilidades no ensino de matemática. 2005. 101 f. **Dissertação** (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

CHEVALLARD, Y. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (org.). **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018. Cap. 1. p. 31-50.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique: l'approche anthropologique. In: L'université d'été analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, 1998, La Rochelle. **Actes IREM de Clermont-Ferrand.** La Rochelle: Irem de Clermont-Ferrand, 1998. p. 91-120.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique Des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. 2. ed. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. **Organiser L'etude**: 3 ecologie & regulation. 3 Ecologie & Regulation. 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf. Acesso em: 18 ago. 2021.

CHEVALLARD, Y. **Organiser L'etude**: 3 ecologie & regulation. 3 Ecologie & Regulation. 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf. Acesso em: 18 ago. 2021.

GRESSLER, M. D. Construindo uma percepção complexa da realidade a partir do estudo dos fractais. 2008. 150 f. **Dissertação** (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, P, 2008.

LOVIS, K. A; FRANCO, V. S. As concepções de um grupo de professores de matemática sobre a importância da geometria na educação básica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 4, n. 7, p. 72-88, nov. 2020. Disponível em: http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/462/362. Acesso em: 15 fev. 2021.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática uma (nova) Introdução**. São Paulo: Educ, 1999.

MINELI, J. P. Fractais: generalização de padrões no ensino fundamental. 2012. 88 f. **Dissertação** (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica:** Matemática. Curitiba: Secretária de Estado da Educação do Paraná, 2008.

SALLUM, É. M. Fractais no ensino médio. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 57, n. 1, p. 1-8, 2005. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/57/1.htm. Acesso em: 23 abr. 2020.

VEJAN, M. P; FRANCO, V. S. **Geometria não-euclidiana/ geometria dos fractais**. 2009. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2207-8.pdf. Acesso em: 17 abr. 2020.

Recebido em: 16 de fevereiro de 2022
Aprovado em: 27 de julho de 2022